

Колесникова Софья Ильинична

*Старший преподаватель кафедры высшей математики
Московского физико-технического института (МФТИ),*

*специалист ЗФТШ при МФТИ,
редактор журнала «Потенциал».*

*Автор пособий «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ»
и «Решение сложных задач ЕГЭ».*



Несколько способов решения задач ЕГЭ

В статье рассмотрено всего два неравенства, содержащих квадратный трёхчлен под знаком модуля. Вроде бы понятные задачи, но оказалось, что их можно решить по крайней мере пятью способами. Всё зависит от того, как избавиться от модуля.

Можно задачу решить графически, можно раскрыть модуль стандартным способом, можно воспользоваться сведением неравенства $|f(x)| > g(x)$ к совокупности нера-

венств $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x) \end{cases}$ или сведением

неравенства $|f(x)| \leq g(x)$ к системе

$\begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq -g(x), \end{cases}$ можно применить

производную для нахождения экстремума, можно вообще не раскрывать модуль.

Каждый из способов мы пытаемся оформить так, чтобы его мож-

но было изучать независимо от остальных.

Заметим сразу, что эти задачи, как показывает работа в ЗФТШ МФТИ, можно решить и другими способами.

Задача 1. Найдите все значения a , при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = 2ax + |x^2 - 8x + 15|$$

больше 1.

Эта задача довольно долго находится в тренировочных вариантах ЕГЭ. Решение разработчиков автору не попало. Возможно, оно находится среди пяти предложенных ниже.

Первый способ (графический)

Переформулируем условие задачи:

Решить задачу – это значит найти все значения параметра a , при каждом из которых значение функ-

ции $y_1(x) = |x^2 - 8x + 15|$ больше $y_2(x) = 1 - 2ax$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

Заметим, что $x^2 - 8x + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=3 \end{cases}$

– в этих точках «излома» графика функции $y_1(x)$ условие должно выполняться:

$$x=5 \Rightarrow 0 > 1 - 10a \Leftrightarrow a > \frac{1}{10},$$

$$x=3 \Rightarrow 0 > 1 - 2a \cdot 3 \Leftrightarrow a > \frac{1}{6}.$$

Поэтому теперь будем рассматривать только $a > \frac{1}{6}$.

Построим эскиз графика функции $y_1(x) = |x^2 - 8x + 15|$, не содержащей параметр – рис. 1.

Теперь прикинем возможные положения прямой $y_2(x) = 1 - 2ax$.

Заметим, что все они проходят через точку $(0; 1)$ – рис. 1.

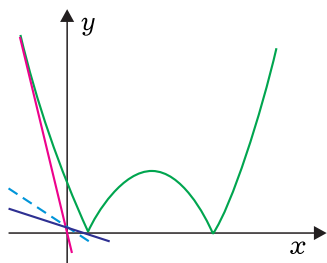


Рис. 1

Видно, что график $y_1(x) = |x^2 - 8x + 15|$ расположен выше графика $y_2(x) = 1 - 2ax$ при всех $x \in \mathbb{R}$, если положение прямой (пунктир на рисунке) находится между прямой $y_2(x) = 1 - 2ax$, проходящей через точку $(1; 0)$, и касательной к

параболе $y(x) = x^2 - 8x + 7, x < 1$, проведённой из точки $(0; 3)$ – рис. 1.

Уравнение первой прямой: $0 = 1 - 2a \cdot 3 \Leftrightarrow a = \frac{1}{6} \Rightarrow$

$$y(x) = 1 - 3x.$$

Теперь найдём все a , при которых прямая $y_2(x) = 1 - 2ax$ является касательной к параболе $y(x) = x^2 - 8x + 15, x < 3$. Это значит, что уравнение $x^2 - 8x + 15 = 1 - 2ax \Leftrightarrow x^2 - 2x(4 - a) + 14 = 0$ имеет единственный корень при $x < 3$, т. е.

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 15 = 1 - 2ax \Leftrightarrow x^2 - 2x(4 - a) + 14 = 0, \\ \frac{D}{4} = (4 - a)^2 - 14 = a^2 - 8a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = 4 \pm \sqrt{14} \Leftrightarrow \\ x < 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 4 + \sqrt{14} \Rightarrow x = 4 - a < 3 \Leftrightarrow a > 1, \\ a = 4 - \sqrt{14} \end{cases}$$

Значит, у нас $a \in \left(\frac{1}{6}; 4 + \sqrt{14}\right)$,

уравнение касательной

$$y = 1 - 2(4 + \sqrt{14})x.$$

Ответ. $\left(\frac{1}{2}; 4 + \sqrt{14}\right)$.

Второй способ (тоже графический – раскрытие модуля)

В этом способе будем тоже строить эскизы только хорошо знакомых парабол.

Раскроем модуль:

$$\begin{aligned} y &= 2ax + |x^2 - 8x + 15| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = y_1(x) = x^2 - 2(4 - a)x + 15, x \in (-\infty; 3] \cup [5; +\infty), \\ y = y_2(x) = -x^2 + 2(4 + a)x - 15, x \in [3; 5]. \end{cases} \end{aligned}$$

Заметим, что условие задачи должно выполняться и в точках «излома»:

$$y_1(3) = y_2(3) = 3^2 - 2(4-a)3 + 15 = 6a > 1 \Leftrightarrow a > \frac{1}{6},$$

$$y_1(5) = y_2(5) = 5^2 - 2(4-a)5 + 15 = 10a > y_1(3) \quad a > \frac{1}{6}$$

т. е. значение в точке $x=5$ всегда больше, чем значение в точке $x=3$.

Поэтому все остальные значения будем сравнивать со значением

$$y_1(3) \text{ при } a > \frac{1}{6}.$$

Причём, никаких масштабов не соблюдаем, даже, если мы видим, что, например, функция $y_1(x) = x^2 - 2(4-a)x + 15$ равна 15 при $x=0$, $y_2(0) = -15$ (честно говоря, школьники не очень ясно представляют — они привыкли параболы именно строить, а не «прикидывать»). Нам важно, где расположены вершины парабол, чтобы проследить за расположением точек возможного экстремума.

Наиболее интересна парабола $y_1(x) = x^2 - 2(4-a)x + 15$, значения у которой в вершине могут быть меньше 0.

Так как $a > \frac{1}{6} > 0$, то всегда

$$4-a < 4+a \Rightarrow x_{1\text{верш}} < x_{2\text{верш}},$$

$$4-a < 4 < 5, \quad 4+a > 4 > 3.$$

Поэтому взаимное расположение $y_1(x)$ и $y_2(x)$ возможно в двух вариантах — рис. 2 и 3: вершина параболы $y_1(x)$ находится либо правее 3 — (рис. 2), либо левее 3 — (рис. 3).

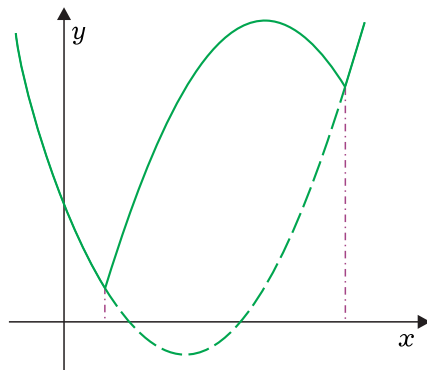


Рис. 2. $3 \leq 4-a \leq 5$

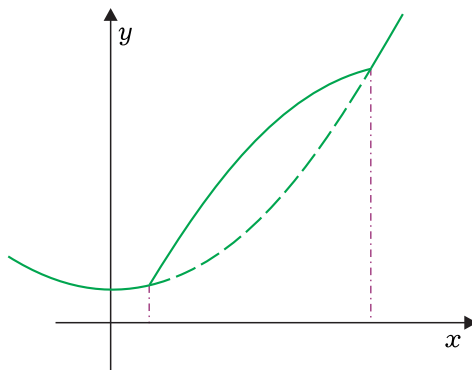


Рис. 3. $4-a < 3$

Ясно, что $y_1(x_{\text{верш}}) = 15 - (4-a)^2 = -(a^2 - 8a + 1)$ может быть как положительным, так и отрицательным, а $y_2(x_{\text{верш}}) = (4+a)^2 - 15 = a^2 + 8a + 1$ всегда положительно.

Рассмотрим оба случая отдельно.

1. $3 \leq 4-a \leq 5 \Leftrightarrow -1 \leq a \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 4+a \leq 7$ — рис. 2.

Решение задачи есть, если $y_{\min} = y_1(3) = 6a > 1 \Rightarrow a \in \left(\frac{1}{6}; 1\right]$ — рис. 2.

2. $4-a < 3 \Leftrightarrow a > 1 \Rightarrow 4+a > 5$ — рис. 3.

Решение задачи есть, если

$$y_{\min} = y_1(x_{\text{верш}}) = 15 - (4 - a)^2 > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 8a + 2 < 0 - \text{рис.3.}$$

$$a \in (4 - \sqrt{14}; 4 + \sqrt{14}) \Rightarrow a \in (1; 4 + \sqrt{6})$$

$$3. \ 4 - a > 5 \Leftrightarrow a < -1 \Rightarrow \emptyset \left(\text{так как } a > \frac{1}{6} \right)$$

Из 1 и 2 следует, что

$$a \in \left(\frac{1}{6}; 4 + \sqrt{14} \right).$$

Ответ. $\left(\frac{1}{6}; 4 + \sqrt{14} \right).$

Третий способ (решение с помощью дифференцирования).

Раскроем модуль:

$$\begin{aligned} y &= 2ax + |x^2 - 8x + 15| = \\ &= \begin{cases} x^2 - 2(4 - a)x + 15, x \in (-\infty; 1] \cup [7; +\infty), \\ -x^2 + 2(4 + a)x - 15, x \in [1; 7]. \end{cases} \end{aligned}$$

Разработчики ЕГЭ предполагают, видимо, решать эту задачу раскрытием модуля так, как в предыдущем решении, но, как показывает опыт общения с выпускниками (и это, честно говоря, удивляет), минимальное или максимальное значение функции у них однозначно связано с дифференцированием, которое они только что изучали. При этом никто из них не получил полного правильного ответа, потому что они плохо представляют себе, что делать с «угловыми» точками, где функция не дифференцируема. На самом деле там может быть локальный экстремум, если производная при переходе через такую точку меняет знак.

Попробуем и мы решить задачу именно так.

Найдём сначала значения в «угловых» точках:

$$y(3) = 6a > 1 \Leftrightarrow a > \frac{1}{6} \Rightarrow y(5) = 10a > y(3).$$

Теперь ясно, что $a > \frac{1}{6}$ и всегда

$$y(5) > y(3).$$

Найдём производную рассматриваемой функции

$$y' = \begin{cases} 2x - 2(4 - a) = 2(x - (4 - a)), x \in (-\infty; 3) \cup (5; +\infty), \\ -2x + 2(4 + a) = -2(x - (4 + a)), x \in (3; 5) \end{cases}$$

и её нули

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = (4 - a), x \in (-\infty; 3) \cup (5; +\infty), \\ x = (4 + a), x \in (3; 5). \end{cases}$$

Производные в точках $x = 3$, $x = 5$ не существуют.

Так как нам нет необходимости определять точки максимума или минимума, а необходимо только найти наименьшее значение, то мы не будем расставлять знаки производной на промежутках.

Найдём значения в каждой из возможных точек экстремума, сравним их со значением в точке $x = 3$. Затем найдём все значения a , при каждом из которых минимальное из сравниваемых значений больше 1.

Возможных точек экстремума на промежутках $(-\infty; 3) \cup (5; +\infty)$ и $(3; 5)$ две.

1) $x = 4 - a$, если

или $4 - a < 3 \Leftrightarrow a > 1 \Rightarrow 4 + a > 5$ (откуда следует, что в точке $x = 5$ экстремума нет), или

$$4 - a > 5 \Leftrightarrow a < -1 \Rightarrow \emptyset \left(\text{так как } a > \frac{1}{6} \right).$$

При этом

$$\begin{aligned} y(4 - a) &= (4 - a)^2 - 2(4 - a)^2 + 15 = \\ &= -a^2 + 8a - 1. \end{aligned}$$

Сравним $y(4-a)$ с $y(3)$:

$$\begin{aligned} y(4-a) - y(3) &= -a^2 + 8a - 1 - 6a = \\ &= -(a^2 - 2a + 1) = -(a-1)^2 < 0 \end{aligned}$$

Значит, при $a > 1$ минимальным является значение $y(4-a)$. По условию задачи, оно больше 1, т. е.

$$\begin{aligned} y(4-a) &= -a^2 + 8a - 1 > 1 \Leftrightarrow \\ a^2 - 8a + 2 < 0 &\Leftrightarrow a \in (4 - \sqrt{14}; 4 + \sqrt{14}). \end{aligned}$$

Так как $a > 1$, то $a \in (1; 4 + \sqrt{14})$.

$$\begin{aligned} 2) \quad 3 < a + 4 < 5 &\Leftrightarrow -1 < a < 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{6} < a < 1 \Rightarrow 3 < 4 - a < 5 \end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned} y(4+a) &= -(4+a)^2 + 2(4+a) - 15 = \\ &= a^2 + 8a + 1 > 6a. \end{aligned}$$

Поэтому минимальное значение в этом случае будет $y(3)$, а $a \in \left(\frac{1}{6}; 1\right)$.

3) Точки $x = 4 - a, x = 4 + a$ могут совпадать с точкой $x = 3$.

Тогда

а) $4 - a = 3 \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow a + 4 = 5 \Rightarrow$ локальных экстремумов нет, и минимальное значение в точке $x = 3 \Rightarrow y(3) = y(4 - a) = 6a > 1$ (помним, что $y(5) > y(3)$).

$$\text{б) } 4 + a = 3 \Leftrightarrow a = -1 \Rightarrow \emptyset$$

Отсюда следует, что $a = 1$ — решение.

Из 1) — 3) следует, что $a \in \left(\frac{1}{6}; 4 + \sqrt{14}\right)$.

Ответ. $a \in \left(\frac{1}{6}; 4 + \sqrt{14}\right)$.

Четвёртый способ (решение тоже с помощью дифференцирования).

Многие школьники решают эту задачу вроде бы так же, как в предыдущем способе. Но они часто аккуратно находят то, что просят — в нашем случае именно точки минимума, хотя для нахождения наименьшего значения, как мы видели, это не обязательно.

Решим и мы так же.

По условию задачи, минимальное значение

$$y(x) = 2ax + |x^2 - 8x + 15|$$

больше 1 — значит, оно больше 1 и в «угловых» точках:

$$x^2 - 8x + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ x = 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y(3) > 1, \\ y(5) > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a > 1, \\ 10a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow a > \frac{1}{6} \Rightarrow y(5) > y(3).$$

Раскроем модуль:

$$\begin{aligned} y &= 2ax + |x^2 - 8x + 15| = \\ &= \begin{cases} x^2 - 2(4-a)x + 15, & x \in (-\infty; 3] \cup [5; +\infty), \\ -x^2 + 2(4+a)x - 15, & x \in [3; 5]. \end{cases} \end{aligned}$$

Найдём производную рассматриваемой функции

$$y' = \begin{cases} 2x - 2(4-a) = 2(x - (4-a)), & x \in (-\infty; 3] \cup [5; +\infty), \\ -2x + 2(4+a) = -2(x - (4+a)), & x \in (3; 5) \end{cases} \quad (1)$$

и её нули

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = (4-a), & x \in (-\infty; 3] \cup (5; +\infty), \\ x = (4+a), & x \in (3; 5). \end{cases}$$

Положение нулей зависит от значений параметра.

В точках $x = 3, x = 5$, как видите в (1), производные не определены.

Попробуем разобраться в том, как расположены возможные точки экстремума.

Рассмотрим все случаи отдельно.

1) $4 - a < 3 \Leftrightarrow a > 1 \Rightarrow 4 + a > 5$ – рис. 4,

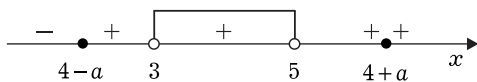


Рис. 4. $4 - a < 3$.

Расставим знаки производной.

По разные стороны от угловых точек производные не меняют знак – там нет экстремумов, значит, минимум при $x = 4 - a$:

$$x = 4 - a \Rightarrow y(4 - a) = -(4 - a)^2 + 15 > 1 \Leftrightarrow$$

$$a \in (4 - \sqrt{14}; 4 + \sqrt{14}) \stackrel{a > 1}{\Rightarrow} a \in (1; 4 + \sqrt{14})$$

$$2) 4 - a > 5 \Leftrightarrow a < -1 \Rightarrow \emptyset \left(a > \frac{1}{6} \right)$$

$$3) 3 \leq 4 - a \leq 5 \Leftrightarrow -1 \leq a \leq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} < a \leq 1 \Rightarrow 4 \frac{1}{6} < 4 + a \leq 5$$

Расставим знаки производной – рис. 5.

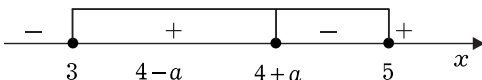


Рис. 5. $3 \leq 4 - a \leq 5$

Из расстановки знаков производной видно, что локальные минимумы находятся как раз в «угловых» точках $x = 3$ и $x = 5$, т. к. производная при переходе через них меняет знак с минуса на плюс. Тогда

$$y_{\min} = y(3) = 6a > 1 \Rightarrow a > \frac{1}{6}, \text{ так как}$$

$y(5) > y(3)$, т.е. в этом случае

$$a \in \left(\frac{1}{6}; 1 \right].$$

Учитывая 1) – 3), получаем, что

$$a \in \left(\frac{1}{6}; 4 + \sqrt{14} \right).$$

$$\text{Ответ. } \left(\frac{1}{6}; 4 + \sqrt{14} \right).$$

Пятый способ (с применением равносильной совокупности и теорем Виета)

Переформулируем условие задачи.

Решить задачу – это значит найти все значения параметра a , при каждом из которых значение функции $y(x) = |x^2 - 8x + 15|$ больше

$$y(x) = 1 - 2ax \text{ при всех } x \in \mathbb{R}.$$

Воспользуемся тем, что заданное неравенство равносильно совокупности неравенств:

$$2ax + |x^2 - 8x + 15| > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R}, \\ \begin{cases} x^2 - 8x + 15 > 1 - 2ax, \\ x^2 - 8x + 15 < 2ax - 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R}, \\ \begin{cases} y_1(x) = x^2 - 2x(4 - a) + 14 > 0, \\ y_2(x) = x^2 - 2x(4 + a) + 16 < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (1)$$

Значит, надо найти все значения параметра a , при каждом из которых совокупность неравенств (1) выполнена на всей оси.

1) Заметим, что, в частности, (1) должно выполняться в точках $x = 3, x = 5$:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(3) = 3^2 - 2 \cdot 3(4-a) + 14 = -1 + 6a > 0 \Leftrightarrow a > \frac{1}{6}, \\ y_2(3) = 3^2 - 2 \cdot 3(4+a) + 16 = 1 - 6a < 0 \Leftrightarrow a > \frac{1}{6}, \\ y_1(5) = y_2(5) = 5^2 - 2 \cdot 5(4-a) + 14 = -1 + 10a > 0 \Leftrightarrow a > \frac{1}{10} \\ y_2(5) = 5^2 - 2 \cdot 5(4+a) + 16 = 1 - 10a < 0 \Leftrightarrow a > \frac{1}{10} \end{array} \right. \Leftrightarrow a > \frac{1}{6}$$

Поэтому теперь будем рассматривать только $a > \frac{1}{6}$.

2) Пусть первое неравенство выполнено на всей оси.

Тогда

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - 2x(4-a) + 14 > 0, \\ x \in \mathbb{R} \end{array} \right. \Leftrightarrow \frac{D}{4} = (4-a)^2 - 14 = a^2 - 8a + 2 < 0 \Leftrightarrow a \in (4 - \sqrt{14}; 4 + \sqrt{14})$$

Сравним

$$4 - \sqrt{14} \vee \frac{1}{6} \Leftrightarrow 23 \vee 6\sqrt{14} \Leftrightarrow \Leftrightarrow 529 \vee 504 \Rightarrow 4 - \sqrt{14} > \frac{1}{6}.$$

Отсюда следует, что первое неравенство выполнено на всей оси при $a \in (4 - \sqrt{14}; 4 + \sqrt{14})$.

Осталось исследовать поведение совокупности для $a \in \left(\frac{1}{6}; 4 - \sqrt{14}\right]$ и $a \in [4 + \sqrt{14}; +\infty)$.

Заметим, что второе неравенство $y_2(x) = x^2 - 2x(4+a) + 16 < 0$ не может быть выполнено на всей оси. Оно может быть выполнено лишь на конечном промежутке между корнями при условии, что

$$\frac{D}{4} = (4+a)^2 - 16 > 0 \Leftrightarrow a(a+8) > 0.$$

У нас $a > \frac{1}{6} \Rightarrow$ корни x_1^2, x_2^2 всегда

есть: $x_2^{1,2} = 4 + a \pm \sqrt{a(a+8)}$.

3) Рассмотрим промежуток $a \in [4 + \sqrt{14}; +\infty)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^2 x_2^2 = 16 > 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 2(4+a) > 0 \end{array} \right. \Rightarrow x_1^2 > 0, x_2^2 > 0.$$

Функция $y_2(x) = x^2 - 2x(4+a) + 16$ на этом промежутке удовлетворяет условию $y_2(x) < 0$ и при этом $x \in (x_1^2; x_2^2) \subset \mathbb{R}_+$.

Заметим, что

$y_1(x) = x^2 - 2x(4-a) + 14$ не удовлетворяет условию $y_1(x) > 0$ на отрезке $[x_1^1; x_2^1]$, где

$$\begin{aligned} a \geq 4 + \sqrt{14} \Rightarrow 4 - a < 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1^1 x_2^1 = 14 > 0, \\ x_1^1 + x_2^1 = 2(4-a) < 0 \end{array} \right. \Rightarrow x_1^1 < 0, x_2^1 < 0 \end{aligned}$$

$$y_1(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [x_1^1; x_2^1] \subset \mathbb{R}_-$$

Так как $[x_1^1; x_2^1] \cup (x_1^2; x_2^2) = \emptyset$,

то совокупность не выполнена на $[x_1^1; x_2^1]$ – рис. 6.

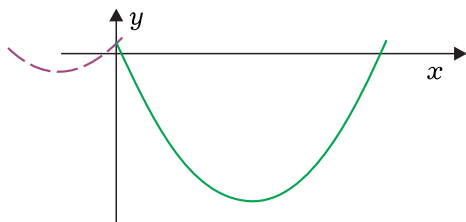


Рис. 6. $a \in [4 + \sqrt{14}; +\infty)$

4) Теперь рассмотрим промежуток $a \in \left(\frac{1}{6}; 4 - \sqrt{14}\right]$. В этом случае первое неравенство выполнено, если

$$\begin{aligned} x &\in (-\infty; x_1^1) \cup (x_1^2; +\infty), \\ x_1^1 &= 4 - a - \sqrt{a^2 - 8a + 2}, x_1^2 = \\ &= 4 - a + \sqrt{a^2 - 8a + 2}. \end{aligned}$$

Второе неравенство выполнено, если $x \in (x_2^1; x_2^2)$.

Задача имеет решение, если

$$\begin{cases} x_1^1 > x_2^1, \\ x_1^2 < x_2^2 \end{cases} \text{ - рис. 7.}$$

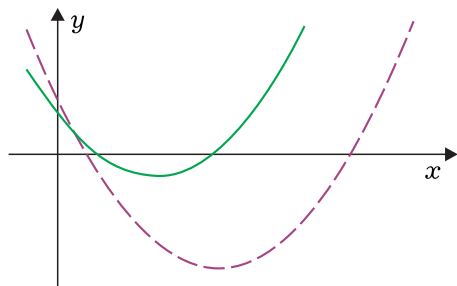


Рис. 7. $a \in \left(\frac{1}{6}; 4 - \sqrt{14}\right]$

а) Проверим первое условие:

$$\begin{aligned} 4 - a - \sqrt{a^2 - 8a + 2} &> 4 + a - \sqrt{a(a + 8)} \Leftrightarrow \\ \sqrt{a^2 + 8a} - \sqrt{a^2 - 8a + 2} - 2a &> 0 \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} y(x) &= \sqrt{a^2 + 8a} - \sqrt{a^2 - 8a + 2} - 2a \Rightarrow \\ y'(x) &= \frac{a + 4}{\sqrt{(a + 4)^2 - 16}} + \frac{4 - a}{\sqrt{(4 - a)^2 - 14}} - 2 > \\ &> \frac{a + 4}{a + 4} + \frac{4 - a}{4 - a} - 2 = 0, 4 - a \geq 0 \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} y\left(\frac{1}{6}\right) &= \sqrt{\frac{1}{6}^2 + 8 \cdot \frac{1}{6}} - \sqrt{\frac{1}{6}^2 - 8 \cdot \frac{1}{6} + 2} - 2 \cdot \frac{1}{6} = 0, \\ \text{а } y'(x) &> 0, \quad \frac{1}{6} \leq x < 4, \end{aligned}$$

то $y(x) > 0$ при $a \in \left(\frac{1}{6}; 4 - \sqrt{14}\right]$.

Отсюда следует, что $x_1^1 > x_2^1$.

б) Проверим второе условие:

$$\begin{aligned} 4 - a + \sqrt{a^2 - 8a + 2} &< 4 + a + \sqrt{a(a + 8)} \Leftrightarrow \\ \frac{1}{3} + \frac{7}{6} &< 2a + \sqrt{a^2 + 8a} > \sqrt{a^2 - 8a + 2} < \frac{5}{6} \Rightarrow \\ \Rightarrow x_1^2 &< x_2^2, \quad a > \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Объединяя 1) - 4), получаем, что

$$a \in \left(\frac{1}{6}; 4 + \sqrt{14}\right).$$

Ответ. $\left(\frac{1}{6}; 4 + \sqrt{14}\right)$.

Задача 2. Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$|x^2 - 8x + a + 5| > 10$$

не имеет решений на отрезке $[a - 6; a]$.

Графическое решение этой задачи опубликовано в №12 «Потенциал» за 2019 г. Приведём ещё четыре решения.

Первый способ (модуль не раскрываем).

Неравенство

$$|x^2 - 8x + a + 5| > 10$$

не имеет решений на отрезке $[a-6; a]$ – это равносильно тому, что на всём отрезке $[a-6; a]$ выполнено неравенство $|x^2 - 8x + a + 5| \leq 10$.

В частности, оно должно быть выполнено в граничных точках отрезка:

$$a) x = a - 6 \Rightarrow |(a-6)^2 - 8(a-6) + a + 5| \leq 10 \Leftrightarrow$$

$$|a^2 - 19a + 89| \leq 10 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 19a + 89 \leq 10, \\ a^2 - 19a + 89 \geq -10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a^2 - 19a + 79 \leq 0, \\ a^2 - 19a + 99 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \left[\frac{19 - \sqrt{45}}{2}; \frac{19 + \sqrt{45}}{2} \right], \\ a \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \in \left[\frac{19 - \sqrt{45}}{2}; \frac{19 + \sqrt{45}}{2} \right].$$

$$б) x = a \Rightarrow |a^2 - 8a + a + 5| \leq 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |a^2 - 7a + 5| \leq 10 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 7a + 5 \leq 10, \\ a^2 - 7a + 5 \geq -10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a^2 - 7a - 5 \leq 0, \\ a^2 - 7a + 15 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \left[\frac{7 - \sqrt{69}}{2}; \frac{7 + \sqrt{69}}{2} \right], \\ a \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \in \left[\frac{7 - \sqrt{69}}{2}; \frac{7 + \sqrt{69}}{2} \right].$$

Из а) – б) следует, что неравенство $|x^2 - 8x + a + 5| \leq 10$ выполнено в обеих точках, если $a \in \left[\frac{19 - \sqrt{45}}{2}; \frac{7 + \sqrt{69}}{2} \right]$, при этом видно, что

$$1) a > 4,$$

$$2) a - 6 \in \left[\frac{19 - \sqrt{45}}{2} - 6; \frac{7 + \sqrt{69}}{2} - 6 \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a - 6 \in \left[\frac{7 - \sqrt{45}}{2}; \frac{\sqrt{69} - 5}{2} \right] \Rightarrow a - 6 < 4,$$

т. е. $0 < a - 6 < 4 < a$, а это значит, что вершина параболы находится внутри отрезка – эскиз на рис. 8.

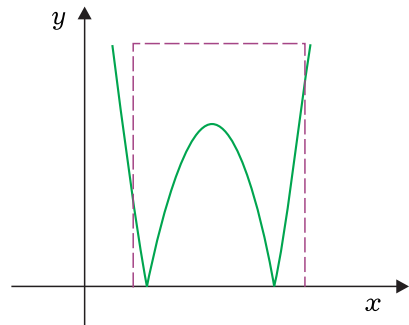


Рис. 8. $a = 7$

Теперь необходимо, чтобы неравенство $|x^2 - 8x + a + 5| \leq 10$ выполнялось и в вершине:

$$x = 4 \Rightarrow |16 - 32 + a + 5| \leq 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 11 \leq 10, \\ a - 11 \geq -10 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq a \leq 21 \quad \text{— видно,}$$

$$\text{что при } a \in \left[\frac{19 - \sqrt{45}}{2}; \frac{7 + \sqrt{69}}{2} \right]$$

условие выполнено.

$$\text{Ответ. } \left[\frac{19 - \sqrt{45}}{2}; \frac{7 + \sqrt{69}}{2} \right].$$

Второй способ (решаем равносильную систему)

Неравенство

$$|x^2 - 8x + a + 5| > 10$$

не имеет решений на отрезке $[a-6; a]$ — это равносильно тому, что на всём отрезке $[a-6; a]$ выполнено неравенство $|x^2 - 8x + a + 5| \leq 10$, т. е.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} |x^2 - 8x + a + 5| \leq 10, \\ x \in [a-6; a] \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + a + 5 \leq 10, \\ x^2 - 8x + a + 5 \geq -10, \\ x \in [a-6; a] \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + a - 5 \leq 0, \\ x^2 - 8x + a + 15 \geq 0, \\ x \in [a-6; a] \end{cases} \end{aligned}$$

Обозначим:

$$f_1(x) = x^2 - 8x + a - 5, f_2(x) = x^2 - 8x + a + 15.$$

Тогда

1) Неравенство $x^2 - 8x + a - 5 \leq 0$ выполнено на $[a-6; a]$:

$$\begin{cases} f_1(x) = x^2 - 8x + a - 5 \leq 0, \\ x \in [a-6; a] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_1(a-6) \leq 0, \\ f_1(a) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (a-6)^2 - 8(a-6) + a - 5 \leq 0 \Leftrightarrow a^2 - 19a + 79 \leq 0, \\ a^2 - 8a + a - 5 \leq 0 \Leftrightarrow a^2 - 7a - 5 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a \in \left[\frac{19-3\sqrt{5}}{2}; \frac{19+3\sqrt{5}}{2} \right], \\ a \in \left[\frac{7-\sqrt{69}}{2}; \frac{7+\sqrt{69}}{2} \right] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \in \left[\frac{19-3\sqrt{5}}{2}; \frac{7+\sqrt{69}}{2} \right]$$

2) Неравенство $x^2 - 8x + a + 15 \geq 0$ выполнено на $[a-6; a]$:

$$\begin{cases} f_2(x) = x^2 - 8x + a + 15 \geq 0, \\ x \in [a-6; a] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_2(a-6) \geq 0, \\ f_2(a) \geq 0, \\ x_{\text{верш}} = 4 \notin (a-6; a), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_2(a-6) \geq 0, \\ f_2(a) \geq 0, \\ x_{\text{верш}} = 4 \in (a-6; a), \\ f_2(4) \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (a-6)^2 - 8(a-6) + a + 15 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 19a + 99 \geq 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}, \\ a^2 - 7a + 15 \geq 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}, \\ a \in (-\infty; 4] \cup [10; +\infty), \\ f_2(a-6) \geq 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}, \\ f_2(a) \geq 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}, \\ a \in (4; 10), \\ 16 - 32 + a + 15 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \in \mathbb{R}$$

Из 1) и 2) следует, что

$$a \in \left[\frac{19-3\sqrt{5}}{2}; \frac{7+\sqrt{69}}{2} \right].$$

$$\text{Ответ. } \left[\frac{19-3\sqrt{5}}{2}; \frac{7+\sqrt{69}}{2} \right].$$

Третий способ (аналитический)

Заметим, что

$$|x^2 - 8x + a + 5| \leq 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -10 \leq x^2 - 8x + a + 5 \leq 10$$

Рассмотрим функцию

$y(x) = x^2 - 8x + a + 5$ и её значения в граничных точках:

$$\begin{aligned} y(a-6) &= (a-6)^2 - 8(a-6) + a + 5 = \\ &= a^2 - 19a + 89, \quad y(a) = a^2 - 7a + 5. \end{aligned}$$

Чтобы парабола $y(x) = x^2 - 8x + a + 5$, расположенная на отрезке $[a-6; a]$, поместилась в полосу $|y(x)| \leq 10$, необходимо, чтобы выполнялось условие $|y(a-6) - y(a)| \leq 20$, т. е.

$$|y(a-6) - y(a)| = |a^2 - 19a + 89 - a^2 + 7a - 5| = |-12a + 84| \leq 20 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -12a + 84 \leq 20, \\ -12a + 84 \geq -20 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{16}{3} \leq a \leq \frac{26}{3} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{2}{3} \leq a-6 \leq \frac{8}{3} \Rightarrow \begin{cases} a \geq \frac{16}{3} > 4, \\ a-6 \leq \frac{8}{3} < 4 \end{cases} \Rightarrow a-6 < 4 < a.$$

Отсюда следует, что вершина параболы $y(x) = x^2 - 8x + a + 5$ находится внутри отрезка $[a-6; a]$ — рис. 9.

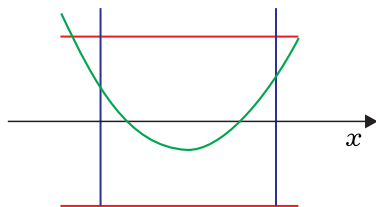


Рис. 9

Тогда неравенства

$$|x^2 - 8x + a + 5| \leq 10 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow -10 \leq x^2 - 8x + a + 5 \leq 10$ выполнены на отрезке $[a-6; a]$, если выполнены условия:

$$\begin{cases} y(a-6) \leq 10, \\ y(4) \geq -10, \\ y(a) \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 19a + 89 \leq 10, \\ 4^2 - 8 \cdot 4 + a + 5 \geq -10, \\ a^2 - 7a + 5 \leq 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \in \left[\frac{19 - \sqrt{45}}{2}; \frac{19 + \sqrt{45}}{2} \right], \\ a \geq 1, \\ a \in \left[\frac{7 - \sqrt{69}}{2}; \frac{7 + \sqrt{69}}{2} \right] \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left[\frac{19 - \sqrt{45}}{2}; \frac{7 + \sqrt{69}}{2} \right]$$

Ответ. $\left[\frac{19 - \sqrt{45}}{2}; \frac{7 + \sqrt{69}}{2} \right]$.

Четвёртый способ (идея из Интернета)

Рассмотрим функцию

$$y(x) = x^2 - 8x + a + 5 = (x-4)^2 + a - 11.$$

Её график — парабола $y(x) = x^2$, передвинутая по оси Ох на 4 единицы, а по оси Оу на $a - 11$.

Вычислим разность между значениями функции $y(x) = x^2$ (что то же, для функции $y(x) = (x-4)^2 + a - 11$) на концах отрезка длины 6:

$$0 < y(a+6) - y(a) = (a+6)^2 - a^2 = 12a + 36.$$

Очевидно, что, если вершина $x=0$ находится слева от отрезка $[a; a+6]$, т. е. $a \geq 0$, то на нём функция строго возрастает и $y(a+6) - y(a) \geq 36$ — парабола не поместится в полосу шириной 20.

В силу симметрии параболы, вершина не сможет находиться и справа от отрезка (тогда

$$\begin{aligned} a+6 \leq 0, 0 < y(a) - y(a+6) &= a^2 - (a+6)^2 = \\ &= -12(a+6-6) - 36 = -12(a+6) + 36 \geq 0. \end{aligned}$$

Поэтому в нашей задаче вершина параболы находится внутри отрезка $[a-6; a]$.

Значит, для решения задачи должны быть выполнены условия:

$$\begin{cases} y(a-6) \leq 10, \\ y(4) \geq -10, \\ y(a) \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 19a + 89 \leq 10, \\ 4^2 - 8 \cdot 4 + a + 5 \geq -10, \\ a^2 - 7a + 5 \leq 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \in \left[\frac{19 - \sqrt{45}}{2}; \frac{19 + \sqrt{45}}{2} \right], \\ a \geq 1, \\ a \in \left[\frac{7 - \sqrt{69}}{2}; \frac{7 + \sqrt{69}}{2} \right] \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left[\frac{19 - \sqrt{45}}{2}; \frac{7 + \sqrt{69}}{2} \right]$$

Ответ. $\left[\frac{19 - \sqrt{45}}{2}; \frac{7 + \sqrt{69}}{2} \right]$.

Калейдоскоп Калейдоскоп Калейдоскоп



Иллюстрация.
Нанобиоробот. Дизайнер
@Lion_on_helium, пресс-
служба МФТИ

На заре нанобиороботов

Мы являемся свидетелями того, как самые смелые идеи писателей-фантастов становятся реальностью, а порой и обыденностью. Чрезвычайно привлекательная идея крошечных роботов, запрограммированных самостоятельно выявлять и лечить болезни, а также постоянно отслеживать состояние организма, изначально относилась к области фантастики. Однако сейчас такие биологические нанороботы обсуждаются не только на научных симпозиумах, но и в обществе – о них спорят, их боятся, их ждут.

Редакция журнала Chemical Reviews предоставила учёным из Лаборатории нанобиотехнологий МФТИ и Лаборатории биофотоники Института общей физики РАН, активно ведущим исследования в этой области. Это является признанием передовых позиций российского коллектива в столь перспективном научном направлении. Ожидается, что печатная версия появится в ноябрьском номере Chemical Reviews, причем обложка номера будет посвящена именно этому обзору.

«Мы гордимся тем, что редакция Chemical Reviews остановила свой выбор на работе нашего коллектива», – говорит Максим Никитин, заведующий Лабораторией нанобиотехнологий МФТИ. «Прогресс, достигнутый в данном научном направлении во всем мире за последние четыре года, не может не впечатлять. Когда в конце 2014 года мы опубликовали в журнале Nature Nanotechnology нашу работу, в которой впервые показали возможность превращения любой наночастицы в биокомпьютерный агент, количество научных публикаций в этой области было незначительным. Сейчас же число статей исчисляется сотнями. Они затрагивают самые различные применения таких систем: распознавание клеточных мишеней для адресной доставки лекарств, управление сенсорными возможностями наноагентов, контролируемое высвобождение лекарственных средств, направленную трансформацию химического окружения и многие другие. Очень приятно, что наши разработки были у истоков этого тренда. Постараемся удерживать лидерство в этом научном направлении».

<https://mipt.ru/newsblog>