Сергей Борисович Гашков
Доктор физико-математических наук, профессор кафедры дискретной математики механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова. Много лет преподавал математику также в ФМШ №18 при МГУ (ныне СУНЦ МГУ).

Неравенства и треугольники

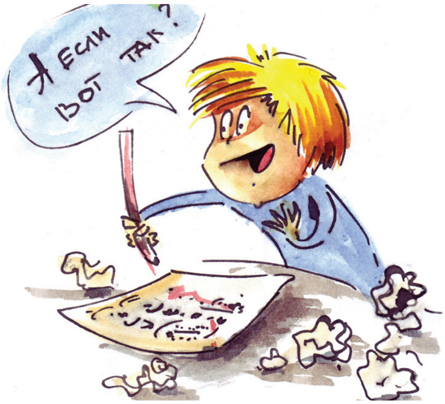
В статье предлагается подборка сведений об экстремальных свойствах треугольников. Задачи формулируются в виде неравенств. Часть из них даётся с указаниями или решениями. Некоторые из этих задач известны уже сотни лет, другие появились сравнительно недавно. Многие задачи предлагались на различных математических олимпиадах и конкурсах.

Некоторым читателям на первый взгляд тема этой статьи покажется странной, а название нелепым, так как объединяет вместе совершенно разные и далёкие друг от друга понятия. Действительно, часть школьников считает, что алгебра и геометрия совершенно разные науки и ничего общего между ними нет. Однако это конечно не так, и это известно всем достаточно хорошо знающим математику. Есть много пунктов, в которых алгебра пересекается с геометрией. Один из них – это геометрические неравенства, т. е. неравенства между числовыми измерениями различных геометрических объектов.

Хотя геометрические неравенства довольно специальная тема, количество различных задач в ней очень велико, и мы выбрали для нашей статьи довольно узкое направление. Фактически она посвящена задачам об экстремальных свойствах правильного треугольника. Это значит, что в ней собраны неравенства, связывающие между собой различные элементы треугольника, причём эти неравенства точные, т. е. они обращаются в равенства только для правильных треугольников. Поэтому каждое из этих неравенств соответствует некоторому экстремальному свойству треугольника, которым обладает только правильный треугольник. В формулировках мы опускаем утверждения о том, что неравенства обращаются в равенства только для правильного треугольника.

Вряд ли здесь собраны все такие задачи, но удивительно, как много их оказалось. Поэтому невозможно подробно изложить их решения в одной статье из-за ограничений в объёме, и значительная часть задач оставлена читателю для самостоятельной работы. Задачи расположены в определённом порядке, и решения следующих задач часто используют предыдущие, поэтому и решать их нужно в указанном порядке.

В элементарной геометрии часто трудно установить, кто первый опубликовал задачу или её решение, поэтому наши указания на авторство задач или решений будут фрагментарными. Слово «задача» в формулировках опускаем, а задачи нумеруем.



Для краткости под словом отрезок, сторона, медиана и т. п. часто будем понимать длину этого отрезка, стороны, медианы и т. д. Обозначим стороны треугольника a, b, c, опущенные на них высоты h_a, h_b, h_c, проведённые к ним биссектрисы l_a, l_b, l_c и медианы m_a, m_b, m_c. Противолежащие этим сторонам углы обозначим $\alpha = \angle A$, $\beta = \angle B$, $\gamma = \angle C$. Кратчайшую биссектрису обозначим l, а длиннейшую – L. Аналогичные обозначения введём для высот h, H и медиан m, M. Обозначим также S – площадь треугольника, p – его полупериметр, R и r – радиусы описанной и вписанной окружностей соответственно.

Длинные цепочки неравенств будем называть теоремами.

Теорема 1. Для произвольного треугольника справедливы неравенства:

$$\frac{h^2}{\sqrt{3}} \le 3\sqrt{3}r^2 \le \frac{\sqrt[3]{(h_a h_b h_c)^2}}{\sqrt{3}} \le$$

$$\le S \le \frac{2(ab + ac + dc) - a^2 - b^2 - c^2}{4\sqrt{3}} \le$$

$$\le \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt[3]{(abc)^2} \le \frac{p^2}{3\sqrt{3}} \le \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\sqrt{3}} \le$$

$$\le \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2.$$

Для доказательств понадобятся некоторые тождества и неравенства, непосредственно не связанные с темой статьи, но интересные сами по себе.

1. (*Бляшке*) Докажите, что

$$h/3 \le r.$$

2. Докажите равенство

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

и выведите из него неравенство

$$h \le 3r.$$

3. Докажите тождество

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz =$$
$$= ((x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2)/2$$

и выведите из него неравенства

$$xy + xz + yz \le x^2 + y^2 + z^2,$$
$$3(xy + xz + + yz) \le (x + y + z)^2.$$

4. Из предыдущего неравенства выведите

$$(x + y + z)^2 \le 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

(частный случай неравенства между средним арифметическим и средним квадратичным) и

$$3xyz(x + y + z) \le (xy + xz + yz)^2$$

(частный случай неравенств Мюрхеда).

5. Докажите общее неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным (частный случай неравенства Коши):

$$(x_1 + \ldots + x_n)^2 \le n(x_1^2 + \ldots + x_n^2).$$

Указание:

$$n(x_1^2 + \ldots + x_n^2) - (x_1 + \ldots + x_n)^2 =$$
$$= \sum_{1 \le i \le j \le n} (x_i - x_j)^2.$$

6. Докажите тождество

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z) \times$$
$$\times ((x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2)/2$$

и выведите из него частный случай неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим: для неотрицательных x, y, z

$$3xyz \le x^3 + y^3 + z^3.$$

Более привычная форма записи этого неравенства:

$$\sqrt[3]{xyz} \le \frac{x+y+z}{3}.$$

7. Выведите из неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим неравенство между средним геометрическим и средним гармоническим положительных чисел x, y, z:

$$\frac{27}{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^3} \le xyz,$$

или, что равносильно

$$\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \le \sqrt[3]{xyz}.$$

8. Убедитесь, что все предыдущие неравенства обращаются в равенства только при $x = y = z$.

Из утверждений предыдущих задач вытекает следующая

Теорема 2. Для положительных чисел x, y, z

$$\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \le \sqrt[3]{xyz} \le \sqrt{\frac{xy+xz+yz}{3}} \le$$

$$\le \frac{x+y+z}{3} \le \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}.$$

Эти неравенства являются частным случаем неравенств Ньютона–Маклорена, которые в полном виде далее не понадобятся.

9. Выведите из неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим неравенство

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt[3]{(abc)^2} \le \frac{p^2}{3\sqrt{3}}.$$

В следующих пяти задачах предполагается, что читатель немного знает тригонометрию.

10. Если $\alpha, \beta, \gamma > 0$, $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, то $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \ge -3/2$.

Указание. Рассмотрим единичные векторы с общим началом и углами α, β, γ между ними и возведём их сумму скалярно в квадрат. Так как скалярный квадрат любого вектора неотрицателен, то, раскрывая скобки и используя свойства скалярного произведения, имеем:

$$3 + 2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) \ge 0.$$

11. Докажите, что

$$4p^2 = (a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2) \le 27R^2.$$

Решение. Обозначая α, β, γ углы, под которыми видны из центра описанной окружности стороны a, b, c, и применяя теорему косинусов и неравенство

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \ge -3/2,$$

имеем:

$$a^2+b^2+c^2 = 2R^2(3 - \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) \le$$

$$\le 9R^2,\text{ откуда}$$

$$4p^2 = (a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2) \le 27R^2.$$

12. Если α, β, γ лежат в пределах от $-\pi$ до π и $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le 3\sqrt{3}/2.$$

Решение. Если один из углов отрицателен, то два другие положительны и неравенство очевидно, так как $3\sqrt{3}/2 > 2$. Считая α, β, γ углами треугольника, рассмотрим другой треугольник, у которого стороны видны из центра описанного вокруг него круга с единичным радиусом под углами 2α, 2β, 2γ (если сумма двух из них меньше π, то вместо третьего угла берём сумму остальных двух), тогда его полупериметр равен $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$, и остаётся применить неравенство

$$p \le 3\sqrt{3}/2.$$

13. Если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то

$$4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta - \gamma) +$$

$$+ \sin(\alpha - \beta + \gamma) + \sin(\beta + \gamma - \alpha).$$

Решение. Заменяя $2\sin\alpha\sin\beta$ на $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$, в формуле

$$(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))\sin\gamma$$

два раза выполняя преобразование произведения $2\cos\varphi\sin\gamma$ в сумму $\sin(\varphi + \gamma) - \sin(\varphi - \gamma)$ и учитывая, что $\sin(\alpha + \beta + \gamma) = 0$, имеем:

$$4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \sin(\alpha+\beta-\gamma) +$$
$$+\sin(\alpha-\beta+\gamma)+\sin(\beta+\gamma-\alpha).$$

14. Если α, β, γ – углы треугольника, то

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \le 3\sqrt{3}\,/\,8.$$

Указание. Примените две предыдущие задачи.

15. Во всех предыдущих неравенствах равенство возможно лишь при $\alpha=\beta=\gamma$.

16. Докажите неравенство

$$S \le \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt[3]{(abc)^2}.$$

Указание. Перемножив равенства $2S = ab\sin\gamma$, $2S = bc\sin\alpha$, $2S = ac\sin\beta$ и применив предыдущее неравенство, имеем:

$$8S^3 = (abc)^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \le$$
$$\le 3(abc)^2\sqrt{3}\,/\,8.$$

17. Докажите равенство

$$S = \frac{abc}{4R}$$

и неравенства

$$\sqrt[3]{abc} \le \sqrt{3}R,\quad S \le \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2.$$

Указание. Примените равенства $2S = ab\sin\gamma$, $c = 2R\sin\gamma$ и предыдущую задачу.

18. Во всех предыдущих неравенствах равенство возможно лишь при $a = b = c$.

19. Докажите равенство

$$h_ah_bh_c = \frac{8S^3}{abc}.$$

Указание. Перемножьте равенства $2S = ah_a = bh_b = ch_c$.

Доказательство теоремы 1. Неравенство $h \le 3r$ уже доказано. Неравенство

$$27r^3 \le h_ah_bh_c$$

следует из соотношения

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$$

и неравенства между средним геометрическим и средним гармоническим. Выражая площадь S по формуле Герона, подставляя в неё вместо p

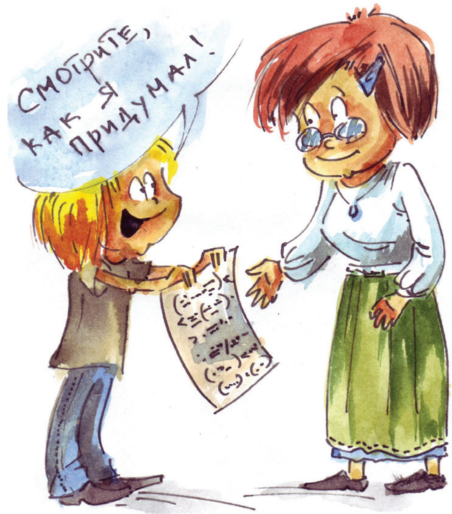
$$(p-a)+(p-b)+(p-c),$$

из неравенства

$$3xyz(x+y+z) \le (xy+xz+yz)^2$$

выводим неравенство:

$$4\sqrt{3}S \le 2(ab+ac+bc) - a^2 - b^2 - c^2.$$



Используя формулу Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

можно проверить, что величина

$$2(ab+ac+bc) - a^2 - b^2 - c^2$$

в 16 раз больше квадрата площади треугольника со сторонами $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$. (Проверьте, что он существует!) Поэтому из доказанного выше неравенства

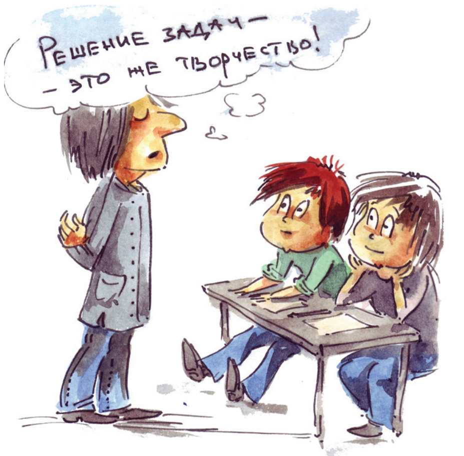
$$S \le \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt[3]{(abc)^2}$$

следует неравенство

$$2(ab+ac+bc) - a^2 - b^2 - c^2 \le$$
$$\le 16\left(\sqrt{3}4\sqrt[3]{\left(\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}\right)^2}\right)^2 = 3\sqrt[3]{(abc)^2}.$$

Из того же неравенства, учитывая, что

$$h_ah_bh_c = \frac{8S^3}{abc},$$



выводим неравенство

$$\frac{\sqrt[3]{(h_a h_b h_c)^2}}{\sqrt{3}} = \frac{4S^2}{\sqrt{3}\sqrt[3]{(abc)^2}} \leq S.$$

Все остальные неравенства теоремы уже были доказаны выше. Докажем ещё несколько неравенств.

Теорема 3. Для произвольного треугольника справедливы неравенства

$$S \leq \frac{2(m_a m_b + m_a m_c + m_b m_c)}{3\sqrt{3}} - \\ - \frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{3\sqrt{3}} \leq \\ \leq \frac{\sqrt[3]{(m_a m_b m_c)^2}}{\sqrt{3}} \leq \frac{(m_a + m_b + m_c)^2}{9\sqrt{3}} \leq \\ \leq \frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{3\sqrt{3}} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\sqrt{3}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2.$$

Для доказательства понадобятся несколько фактов о медианах.

20. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

21. Медианы можно вычислять по следующей формуле:

$$m_a = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}.$$

Указание. Достроить треугольник до параллелограмма, продолжив медиану за сторону на отрезок, равный длине медианы, и применить задачу 20.

22. Справедливо равенство

$$4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

Указание. Три формулы из задачи 21 возвести в квадрат и сложить.

23. Площадь треугольника, составленного из медиан, равна трём четвертям площади исходного треугольника.

Указание. Через вершину треугольника провести отрезок, равный и параллельный медиане, не выходящей из этой вершины. Треугольник, образованный этим отрезком и выходящей из этой вершины медианой и будет треугольником, составленным из медиан. Его третья сторона делит боковую сторону исходного треугольника в отношении один к трём.

Для доказательства первых двух неравенств теоремы 3 составим из медиан треугольник и применим к нему неравенство теоремы 1. Последнее неравенство доказано в теореме 1. Предпоследнее равенство доказано в задаче 22. Остальные неравенства вытекают из неравенств между средними.

Ещё одно семейство неравенств даёт следующая

Теорема 4. Для произвольного треугольника справедливы неравенства:

$$\frac{h^2}{\sqrt{3}} \leq \frac{l^2}{\sqrt{3}} \leq S \leq \\ \leq \frac{2(ab + ac + bc) - a^2 - b^2 - c^2}{4\sqrt{3}} \leq \\ \leq \frac{l_a^2 + l_b^2 + l_c^2}{3\sqrt{3}} \leq \\ \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}} \leq \frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{3\sqrt{3}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2.$$

Для доказательства понадобится несколько фактов о биссектрисах.

24. Биссектрисы можно вычислять по следующей формуле:

$$l_a = \sqrt{bc - \frac{bca^2}{(b+c)^2}} = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}.$$

Указание. Применить теорему о делении биссектрисой противоположной стороны и теорему Пифагора.

25. Справедливы неравенства:

$$bc - \frac{a^2}{4} \le l_a^2 \le p(p-a).$$

Равенства возможны лишь при $b = c$.

Указание. Применить предыдущую задачу и неравенство

$$4bc \le (b+c)^2.$$

Докажем теперь теорему. Складывая неравенства $l_a^2 \le p(p-a)$, получаем, что

$$l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \le p(p-a) + p(p-b) + + p(p-c) = p^2.$$

Складывая неравенства

$$bc - \frac{a^2}{4} \le l_a^2$$

и используя неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + ac + bc,$$

имеем:

$$l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \ge ab + ac + bc - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} \ge$$
$$\ge \frac{3(2(ab + ac + bc) - a^2 - b^2 - c^2)}{4}.$$

Для того чтобы закончить доказательство теоремы, нужно решить ещё несколько задач. Первая из них в чуть иной формулировке предлагалась автором на Московской олимпиаде в 1985 г.

26. Докажите, что $\frac{l^2}{\sqrt{3}} \le S$.

Решение. Обозначим биссектрисы через AA_1, BB_1, CC_1. Без ограничения общности считаем, что $c \le a$, $c \le b$. Тогда согласно свойству биссектрис

$$\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{b}{c} \ge 1, \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{a}{c} \ge 1$$

и согласно формуле для площади треугольника $2S = ab\sin\gamma$ имеем неравенство для площадей $S_{CA_1B_1} \ge \frac{1}{4}S_{ABC}$, из которого следует, что площадь четырёхугольника ABA_1B_1 не больше трёх четвертей S_{ABC}. Обозначим O точку пересечения биссектрис AA_1, BB_1. Согласно теореме о внешнем угле треугольника угол между ними равен $\frac{\pi}{2} + \frac{\gamma}{2}$, где γ – угол при вершине C треугольника ABC, а так как $\gamma \ge \pi/3$, то $\frac{\pi}{2} + \frac{\gamma}{2} \ge \frac{2\pi}{3}$, значит

$$S_{ABA_1B_1} = \frac{1}{2} l_b l_c \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) \ge$$
$$\ge \frac{1}{2} l^2 \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}l^2}{4},$$

откуда имеем

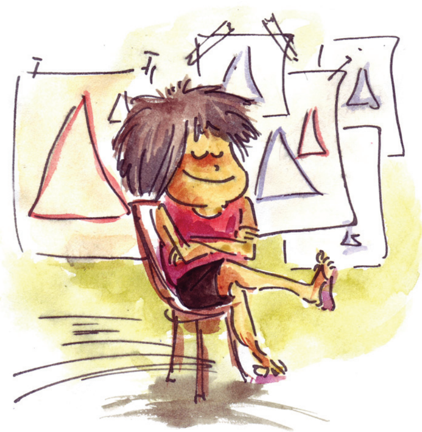
$$S_{ABC} \ge \frac{4}{3} S_{ABA_1B_1} \ge \frac{\sqrt{3}l^2}{3}.$$

27. Докажите, что

$$\frac{h^2}{\sqrt{3}} \le \frac{l^2}{\sqrt{3}} \le S \le \frac{L^2}{\sqrt{3}} \le \frac{M^2}{\sqrt{3}}.$$

Указание. Примените задачу 26 и уже доказанное неравенство теоремы 4:

$$S \le \frac{l_a^2 + l_b^2 + l_c^2}{3\sqrt{3}}.$$



28. Докажите, что

$$3(l_a l_b l_c)^{2/3} \le \frac{(l_a + l_b + l_c)^2}{3} \le$$
$$\le l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \le p^2 \le$$
$$\le m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \le \frac{27}{4}R^2.$$

Указание. Примените задачи 4, 6, неравенство $l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \le p^2$ и теорему 3.

Теперь теорему 4 можно считать полностью доказанной. Некоторое дополнение к задаче 28 даёт следующая задача.

29. Докажите, что

$$(l_a l_b l_c)^{2/3} \le (pS)^{2/3} \le \frac{p^2}{3}.$$

Указание. Перемножая неравенства задачи 25 и используя формулу Герона и теорему 1, имеем:

$$l_a^2 l_b^2 l_c^2 \le p^3(p-a)(p-b)(p-c) =$$
$$= p^2S^2 \le p^6 / 27.$$

30. Докажите, что

$$9r \le h_a + h_b + h_c \le l_a + l_b + l_c \le p\sqrt{3}.$$

Указание. Примените задачи 2, 28 и неравенство теоремы 2.

Дополнением к задаче 30 служит такая задача

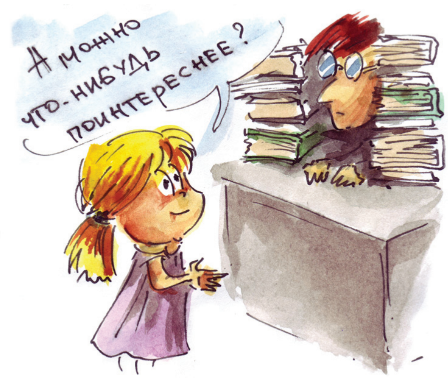
31. Докажите неравенство

$$p\sqrt{3} \le r + 4R.$$

Решение. Введём обозначения $r_a = S/(p-a)$, $r_b = S/(p-b)$, $r_c = S/(p-c)$ (на самом деле это радиусы *вневписанных* окружностей треугольника со сторонами *a, b, c,* но этот факт далее не понадобится). Из формулы Герона и задачи 17 выводятся тождества:

$$r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c = \frac{S^2}{(p-a)(p-b)} +$$
$$+ \frac{S^2}{(p-a)(p-c)} + \frac{S^2}{(p-c)(p-b)} =$$
$$= p(p-c) + p(p-b) + p(p-a) =$$
$$= p(3p-a-b-c) = p^2,$$

$$r_a + r_b + r_c - r = \frac{S}{p-a} +$$
$$+ \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c} - \frac{S}{p} =$$
$$= S\left(\frac{2p-a-b}{(p-a)(p-b)} + \frac{c}{p(p-c)}\right) =$$
$$= cS\left(\frac{p(p-c)+(p-a)(p-b)}{p(p-a)(p-b)(p-c)}\right) =$$
$$= cS\frac{p^2 - pc + p^2 - ap - bp + ab}{S^2} =$$
$$= \frac{c}{S}(2p^2 - p(a+b+c) + ab) =$$
$$= \frac{abc}{S} = 4R.$$



Применяя к задаче 3, имеем:

$$3p^2 = 3(r_a + r_b + r_a r_c + r_b r_c) \le$$
$$\le (r_a + r_b + r_c)^2 = (r + 4R)^2.$$

Как следствие двух предыдущих задач, имеем цепочку неравенств:

$$9r \le h_a + h_b + h_c \le l_a + l_b + l_c \le$$
$$\le p\sqrt{3} \le r + 4R.$$

Дополняет эти неравенства такая задача.

32. Докажите, что

$$9r \le h_a + h_b + h_c \le l_a + l_b + l_c \le$$
$$\le m_a + m_b + m_c \le 9R/2.$$

Указание. Примените задачи 28, 4.

Задачу 32 можно рассматривать как уточнение неравенства Чаппла – Эйлера между радиусами вписанной и описанной окружностей треугольника: $2r \le R$. Впрочем, это неравенство можно доказать совсем просто, почти в две строчки. Попробуйте придумать такое доказательство сами.

33. Докажите, что

$$27r^2 \le h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \le$$
$$\le l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \le m_a^2 + m_b^2 +$$
$$+ m_c^2 \le 27R^2 / 4.$$

Указание. Примените задачи 2, 28 и теорему 2.

Из предыдущей задачи также вытекает неравенство Чаппла – Эйлера. И из следующей задачи тоже.

34. Докажите, что

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \ge \frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} \ge$$
$$\ge \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} \ge \frac{2}{R}.$$

Указание. Примените задачи 2, 28 и теорему 2.

35. Докажите, что

$$\sqrt{3}h \le \sqrt{3}l \le \sqrt{3}m \le p \le r\sqrt{3}R / 2.$$

Указание. Свести к случаю равнобедренного треугольника (с данной боковой медианой).

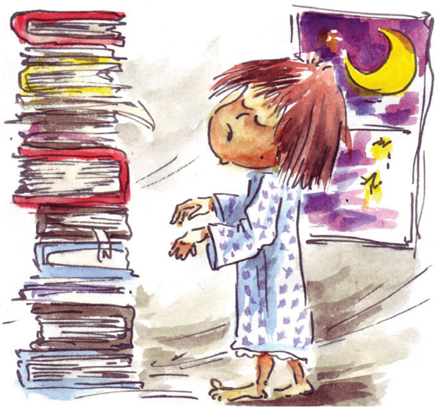
36. Докажите, что

$$p \le 3\sqrt{3}R / 2 \le \sqrt{3}M.$$

Указание. Окружность с центром в точке пересечения медиан и радиусом $2M/3$ накрывает треугольник.

Как следствие двух предыдущих задач, получаем цепочку неравенств для полупериметра:

$$\sqrt{3}h \le \sqrt{3}l \le \sqrt{3}m \le p \le 3\sqrt{3}R / 2 \le \sqrt{3}M.$$



Литература

1. *Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М.* Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. – М.: Наука, 1970.

2. *Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М.* Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии. – М.: Наука, 1974.

3. *Васильев Н.Б., Егоров А.А.* Задачи Всесоюзных математических олимпиад. – М.: Наука, 1988.

4. Венгерские математические олимпиады. – М.: «Мир», 1976.

5. Польские математические олимпиады. – М.: «Мир», 1978.

6. Зарубежные математические олимпиады. – М.: Наука, 1987.

7. *Прасолов В.В.* Задачи по планиметрии. – М.: Наука, 1986.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Математика в кулинарии

В университетской столовой студенты толпятся возле вывешенного у кассы меню. Варианты обедов в нём в зависимости от качества и цены следуют друг за другом в порядке убывания того и другого.

– Так... – произносит в раздумьи студент-математик, – нам предлагают выбор обеда из следующих: действительный, комплексный и мнимый.