**Потоскуев Евгений Викторович**
*Кандидат физико-математических наук,*
*профессор кафедры «Алгебра и геометрия»*
*института математики, физики*
*и информационных технологий*
*Тольяттинского госуниверситета,*
*Почётный работник общего образования РФ.*

# Научиться решать задачи по стереометрии – реально?

В задачах по стереометрии требуется, в основном, находить площади и объёмы геометрических фигур, расположенных в пространстве, для чего, в свою очередь, приходится определять и находить расстояния между точками, прямыми и плоскостями.

## Расстояние от точки до прямой

Если расстояние от точки $M$ до фигуры $F$ равно $m$, то будем записывать: $\rho(M;\ F) = m$. Расстояние от точки $M$ до данной прямой $p$ равно длине перпендикуляра, опущенного из точки $M$ на прямую $p$.

Чтобы на рисунке через данную точку $M$ провести прямую, перпендикулярную данной прямой $p$, достаточно в плоскости, задаваемой точкой $M$ и прямой $p$, определить направление, перпендикулярное прямой $p$; это направление определяется любой прямой $q$, перпендикулярной прямой $p$. Тогда прямая, проведённая через $M$ параллельно прямой $q$, является искомой.

Для нахождения расстояния от точки $M$, не лежащей в плоскости $\beta$, до прямой $q$, лежащей в этой плоскости, проводят перпендикуляр $MP$ из точки $M$ на плоскость $\beta$ $(P \in \beta)$; $|MP| = \rho(M;\beta) = h$. При этом, если точка $P$ принадлежит прямой $q$, то $\rho(M;q) = \rho(M;\beta) = |MP| = h$. Если точка $P$ не принадлежит прямой $q$, то из точки $P$ проводят в плоскости $\beta$ перпендикуляр $PK$ к прямой $q$, $K \in q$. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах $MK \perp q$, поэтому

$$\rho(M;q) = |MK| = \sqrt{MP^2 + PK^2}.$$

При решении задач на нахождение расстояния от данной точки $M$ до данной прямой $a$ в пространстве можно построить точку $H$ пересечения прямой $a$ и плоскости, проведённой через точку $M$ перпендикулярно прямой $a$. Тогда $|MH| = \rho(M;a)$.

Рассмотрим, например, решение такой задачи.

**Задача 1.** Дан единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. (рис. 1) *а*) Найдите расстояние от точки $B$ до прямой $A_1C$; *б*) которая из точек, $A_1$ или $A$, расположена ближе к прямой $BD_1$?

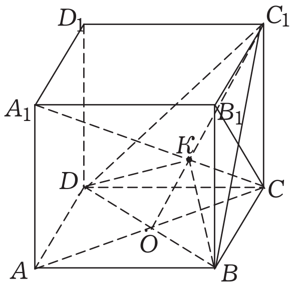


*Рис. 1*

**Решение.** *а*) Нужно найти плоскость, проходящую через точку $B$ и перпендикулярную прямой $A_1C$. Покажем, что такой плоскостью является плоскость $BC_1D$.

Докажем, что $CA_1 \perp (BC_1D)$.

Ортогональной проекцией диагонали $CA_1$ данного куба на плоскость грани $ABCD$ является диагональ $CA$ этой грани. Вследствие того, что $AC \perp BD$ (как диагонали квадрата $ABCD$), получаем: $CA_1 \perp BD$ (по теореме о трёх перпендикулярах). Аналогично, ортогональной проекцией диагонали $CA_1$ на плоскость грани $BCC_1B_1$ является её диагональ $CB_1$, перпендикулярная диагонали $BC_1$ грани $BCC_1B_1$, поэтому $CA_1 \perp BC_1$ (почему?).

Значит, $CA_1 \perp BD$, $CA_1 \perp BC_1$, $BD \cap BC_1 = B \Rightarrow CA_1 \perp (BC_1D)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

Обозначим: $K = CA_1 \cap (BC_1D)$ и построим точку $K$.

Так как диагональ $A_1C$ лежит в диагональной плоскости $ACC_1$, то точка $K$ должна принадлежать прямой пересечения плоскостей $BC_1D$ и $ACC_1$, то есть прямой $OC_1$, где $O = AC \cap BD$. Таким образом, $K = CA_1 \cap OC_1 = CA_1 \cap (BC_1D)$.

Следовательно, $A_1C$ перпендикулярна плоскости $BC_1D$ и пересекает её в точке $K$. Значит, расстоянием от точки $B$ до $A_1C$ является отрезок $BK$, и нужно найти его длину.

Так как $CK \perp (BC_1D)$, $C_1C = CB = CD$, то $KC_1 = KB = KD$ (как проекции равных наклонных), значит, точка $K$ – центроид $\Delta BC_1D$. Находим: $C_1B = \sqrt{2}$ (как диагональ единичного квадрата), поэтому в правильном $\Delta BC_1D$ имеем: $OC_1 = \dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$, тогда $BK = KC_1 = \dfrac{2}{3}OC_1 = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$. Таким образом,

$$\rho(B;\, A_1C) = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Решение задачи *б*) предлагается провести самостоятельно.

**Ответ.** *а*) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$; *б*) точки $A$ и $A_1$ равноудалены от прямой $BD_1$.

Рассмотрим решение аналогичных задач, избрав в качестве многогранника правильную шестиугольную призму.

**Задача 2.** $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис. 2) – правильная шестиугольная призма, все рёбра которой равны 1. Найдите расстояние от вершины $B$ до прямых: *а*) $E_1F$; *б*) $D_1F_1$; *в*) $C_1D_1$; *г*) $AD_1$; *д*) $CD_1$.

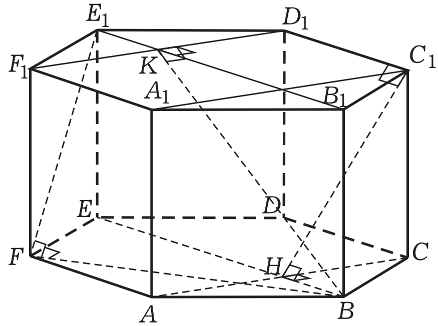


*Рис. 2*

**Решение.** 1) Для решения этой задачи применительно к правильной шестиугольной призме полезно на отдельном (выносном) рисунке изобразить нижнее основание данной призмы – правильный шестиугольник $ABCDEF$ (рис. 3), сторона которого равна 1. Взаимное расположение диагоналей и сторон этого шестиугольника, их длины и величины углов между ними известны из планиметрии.

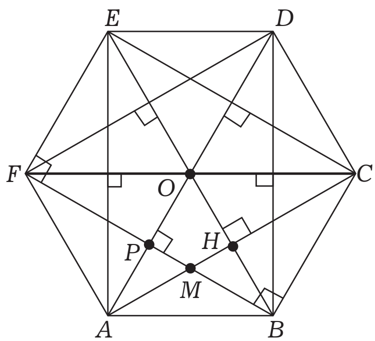


*Рис. 3*

Будем решать эту задачу, сочетая изображения правильного шестиугольника и правильной шестиугольной призмы.

*а*) Имеем: $F_1F \perp (ABC)$, $BF \subset (ABC) \Rightarrow F_1F \perp BF$ (рис. 2) (по определению прямой, перпендикулярной плоскости); $BF \perp EF$ (шестиугольник $ABCDEF$ – правильный (рис. 3). Поэтому $BF \perp (F_1FE)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости), откуда $BF \perp FE_1$ (почему?). Это означает, что

$$\rho\ (B;\ FE_1) = BF = \sqrt{3}\,.$$

*б*) Имеем: $B_1B \perp (ABC)$, $BE \subset (ABC) \Rightarrow B_1B \perp BE$ (по опрелию прямой, перпендикулярной плоскости); $BE \perp AC$ (рис. 3). Поэтому $AC \perp (B_1BE)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости), откуда $AC \perp BK$ (почему?), где $K = E_1B_1 \cap D_1F_1$. (рис. 2) Значит, $BK \perp D_1F_1$ $(AC \parallel D_1F_1)$, тогда

$$\rho\,(B;D_1F_1) = BK = \sqrt{B_1B^2 + B_1K^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}\,.$$

*в*) Обозначим: $H = BE \cap AC$ (рис. 2). Имеем: $BE \parallel CD$, $CD \parallel C_1D_1 \Rightarrow BE \parallel C_1D_1 \Rightarrow \rho\,(B;C_1D_1) = \rho\,(H;C_1D_1)$. Из $BE \perp (ACC_1)$, $BE \parallel C_1D_1$ следует $C_1D_1 \perp (ACC_1)$, откуда $C_1D_1 \perp HC_1$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости, так как $HC_1 \subset (ACC_1)$). Это означает, что $\rho\,(B;C_1D_1) = HC_1$. В прямоугольном $\Delta HCC_1$ находим:

$$HC_1 = \sqrt{C_1C^2 + CH^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}\,.$$

Значит, $\rho\,(B;C_1D_1) = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

*г*) Так как $BD \perp AB$ (рис. 3), то $BD_1 \perp AB$ (по теореме о трёх перпендикулярах), поэтому $\Delta ABD_1$ – прямоугольный (рис. 4).

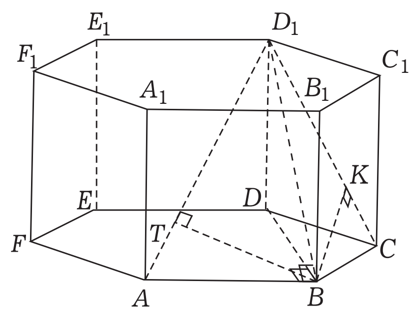


*Рис. 4*

Пусть $BT$ – высота $\Delta ABD_1$. Тогда (рис. 4) $BT = \rho\,(B;AD_1) = \dfrac{AB \cdot BD_1}{\sqrt{AB^2 + BD_1^2}}$. В прямоугольном $\Delta BDD_1$ находим:

$$BD_1 = \sqrt{BD^2 + DD_1^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2\,.$$

Значит, $\rho\,(B;AD_1) = \dfrac{1 \cdot 2}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

**Ответ.** *а)* $\sqrt{3}$; *б)* $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$; *в)* $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$; *г)* $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$; *д)* $\dfrac{\sqrt{14}}{4}$.

## Расстояние от точки до плоскости

Для нахождения расстояния от точки $M$ до плоскости $\alpha$ проводят перпендикуляр $MP$ из точки $M$ на эту плоскость $(P \in \alpha)$; тогда $|MP| = h = \rho\,(M;\alpha)$.

Рассмотрим решение следующей задачи.

**Задача 3.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, ребро которого равно 18. Найдите расстояние до плоскости $BC_1D$ от точек $C$, $A$, $D_1$ и $B_1$.

**Решение.** При решении задачи 1 было доказано, что $CA_1 \perp (BC_1D)$, при этом $CA_1 \cap (BC_1D) = K$. Это означает, что $\rho\,(C;\,(BC_1D)) = CK$ (рис. 5).

Найдём длину отрезка $CK$.

Имеем: $CA_1 \perp (BC_1D)$, $OC_1 \subset (BC_1D)$ (рис. 5) $\Rightarrow CA_1 \perp OC_1 \Rightarrow \Delta CC_1K$ – прямоугольный, значит,

$$CK = \sqrt{C_1C^2 - C_1K^2}.$$

В правильном треугольнике $BC_1D$ (его стороны равны $18\sqrt{2}$) находим:

$$C_1O = \frac{18\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{6}.$$

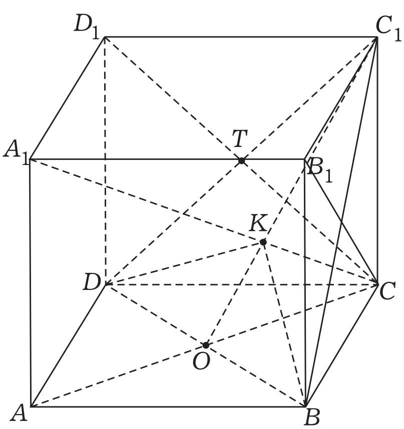

*Рис. 5*

Так как $CK \perp (BC_1D)$, $C_1C = CB = CD$, то $KC_1 = KB = KD$ (как проекции равных наклонных), значит, точка $K$ – центроид $\Delta BC_1D$, откуда: $C_1K = \dfrac{2}{3}\,C_1O = \dfrac{2}{3}\cdot 9\sqrt{6} = 6\sqrt{6}$. Тогда

$$\rho\,(C;\,(BC_1D)) = CK = \sqrt{C_1C^2 - C_1K^2} = \sqrt{18^2 - (6\sqrt{6})^2} = 6\sqrt{3}.$$

Расстояние от данной точки $A$ до данной плоскости $\alpha$ при решении задач можно определить без построения соответствующего перпендикуляра из точки $A$ на плоскость $\alpha$. Например, удобно пользоваться следующим «*методом пропорций*»: если прямая $AB$ пересекает плоскость $\alpha$ в точке $O$ и известно расстояние $\rho\,(B;\alpha)$ от точки $B$ до этой плоскости, то $\dfrac{\rho\,(A;\alpha)}{\rho\,(B;\alpha)} = \dfrac{OA}{OB}$, откуда

$$\rho\,(A;\alpha) = \frac{OA}{OB}\cdot\rho\,(B;\alpha).$$

Расстояния от вершин $A$, $B_1$ и $D_1$ до плоскости $BC_1D$ найдём «методом пропорций».

Прямая $AC$ пересекает плоскость $BC_1D$ в точке $O$ (рис. 5), при этом $OA = OC$, значит, $\rho\,(A;(BC_1D)) = \rho\,(C;(BC_1D)) = 6\sqrt{3}$.

Аналогично, точкой пересечения прямой $D_1C$ и плоскости $BC_1D$ является точка $T = D_1C \cap C_1D$, поэтому $D_1T = TC$, значит, $\rho\,(D_1;\,(BC_1D)) = \rho\,(C;\,(BC_1D)) = 6\sqrt{3}$; точкой пересечения прямой $B_1C$ и плоскости $BC_1D$ является точка пересечения диагоналей $B_1C$ и $C_1B$, поэтому

$$\rho\,(B_1;\,(BC_1D)) = \rho\,(C;\,(BC_1D)) = 6\sqrt{3}.$$

**Ответ.** $6\sqrt{3}$.

*Замечание.* Примечательно, что для нахождения расстояния $\rho(D_1;(BC_1D))$ «методом пропорций» не нужно доказывать, что $D_1C$ и $(BC_1D)$ не перпендикулярны. Более того, мы не «опускали» перпендикуляры на $(BC_1D)$ из точек $A$, $B_1$ и $D_1$ при нахождении расстояний от них до этой плоскости.

**Задача 4.** $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис. 6) – правильная шестиугольная призма, все рёбра которой равны 1. Найдите расстояние от вершин $F$ и $B_1$ до плоскости $AF_1D$.

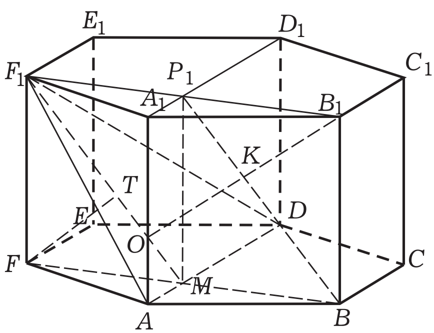


*Рис. 6*

**Решение.** Имеем: $AD\perp BF$; $AD\perp DD_1$, $DD_1 \parallel BB_1$ $\Rightarrow$ $AD\perp BB_1$ (рис. 6), тогда $AD\perp(B_1BF)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости) $\Rightarrow$ $(F_1AD)\perp(B_1BF)$ (по признаку перпендикулярности двух плоскостей). Это означает: перпендикуляр из вершины $F$ на $(F_1AD)$ расположен в $(B_1BF)$ и перпендикулярен прямой $F_1M = (F_1AD) \cap \cap (B_1BF)$. Пусть точка $T$ – основание этого перпендикуляра, $T\in F_1M$ (рис. 6). Тогда $FT = \rho(F; (F_1AD))$. Найдём длину $FT$. В прямоугольном $\Delta F_1FM$: $FM = 0{,}5BF = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $F_1F = 1$. Значит,

$$FT = \frac{FF_1\cdot FM}{\sqrt{F_1F^2+FM^2}} = \frac{1\cdot 0{,}5\sqrt{3}}{\sqrt{1+(0{,}5\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Таким образом, $\rho(F; (F_1AD)) = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Перпендикуляр $B_1O$ из вершины $B_1$ на $(F_1AD)$ также расположен в $(B_1BF)$ и перпендикулярен прямой $F_1M$, при этом $O\in F_1M$.

Так как $F_1M \parallel P_1B$ (в прямоугольнике $FF_1B_1B$ точки $P_1$ и $M$ – середины противоположных сторон), то точка $K = P_1B\cap B_1O$ является серединой перпендикуляра $B_1O$ (по теореме Фалеса). Учитывая, что $FT = B_1K$, приходим к выводу:

$$B_1O = 2B_1K = 2FT = \frac{2\sqrt{21}}{7}.$$

Значит,

$$\rho(B_1; (F_1AD)) = \frac{2\sqrt{21}}{7}.$$

**Ответ.** $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$ и $\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$.

## Задачи для самостоятельного решения

**Задача 5.** $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – правильная шестиугольная призма, все рёбра которой равны 1. Найдите расстояние: *а*) от точки $B$ до прямой $DE_1$; *б*) от точки $B$ до прямой $AC_1$; *в*) от точки В до прямой $D_1F$; *г*) от точки $B$ до прямой $C_1F$; *д*) от точки $B$ до прямой $F_1D$.

**Ответ.** *а*) $\sqrt{3}$; *б*) $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$; *в*) $\dfrac{\sqrt{39}}{4}$; *г*) $\dfrac{\sqrt{30}}{5}$; *д*) $\dfrac{\sqrt{39}}{4}$.

**Задача 6.** Точка $M$ не принадлежит плоскости $\alpha$, а точка $B$ лежит в этой плоскости. Что собой представляет множество оснований всех перпендикуляров, проведённых из точки $M$ ко всем прямым плоскости $\alpha$, проходящим через точку $B$?

*Указание.* Пусть точка $A$ – основание перпендикуляра $MA$ на плоскость $\alpha$, $p$ – любая прямая этой плоскости, проведённая через точку $B$. Если $MH$ – перпендикуляр из $M$ на $p$ ($H \in p$), то по теореме о трёх перпендикулярах $AH \perp p$, то есть $\angle AHB = 90^\circ$. Это означает, что точка $H$ принадлежит окружности диаметра $AB$. При повороте прямой $p$ вокруг точки $B$ на угол $180^\circ$ точка $H$ «опишет» окружность диаметра $AB$. Точки $A$ и $B$ принадлежат этой окружности. (Почему?)

**Задача 7.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (рис. 7). Точка $E$ – середина ребра $BB_1$, точка $K$ – середина ребра $CC_1$, точка $M$ – середина ребра $A_1B_1$.

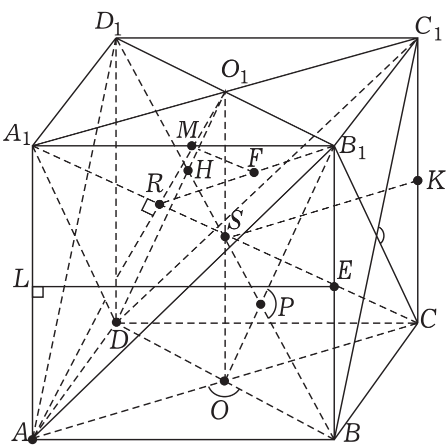


*Рис. 7*

Определите отрезки, проведённые перпендикулярно: *а)* из точки $A$ на $(BB_1D_1)$; *б)* из точки $B$ на $(ACB_1)$; *в)* из точки $A_1$ на $(AB_1D_1)$; *г)* из точки $B$ на $(A_1C_1D)$; *д)* из точки $E$ на $(ADD_1)$; *е)* из точки $K$ на $(BB_1D)$; *ж)* из точки $M$ на $(AB_1D_1)$. Найдите длину каждого из этих перпендикуляров, если ребро куба равно 6.

**Ответ.** *а)* $AO, 3\sqrt{2}$; *б)* $BP, 2\sqrt{3}$; *в)* $A_1R, 2\sqrt{3}$; *г)* $BH, 4\sqrt{3}$; *д)* $EL$, 6; *е)* $KS, 3\sqrt{2}$; *ж)* $MF, \sqrt{3}$.

**Задача 8.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб с ребром, равным 14. Найдите расстояние:

1) до плоскости $AB_1C$ от вершин: *а)* $B$; *б)* $D$; *в)* $A_1$; *г)* $C_1$; *д)* $D_1$;

2) до плоскости $A_1BC_1$ от вершин: *а)* $B_1$; *б)* $D_1$; *в)* $A$; *г)* $C$; *д)* $D$.

**Ответ:** 1 и 2. *а)* $\frac{14\sqrt{3}}{3}$; *б)* $\frac{14\sqrt{3}}{3}$; *в)* $\frac{14\sqrt{3}}{3}$; *г)* $\frac{14\sqrt{3}}{3}$; *д)* $\frac{28\sqrt{3}}{3}$.

**Задача 9.** $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – правильная шестиугольная призма, все рёбра которой равны 1. Найдите расстояние: *а)* от точки $B$ до плоскости $A_1EF$; *б)* от точки $B$ до плоскости $AB_1C$; *в)* от точки $B$ до плоскости $B_1FD$; *г)* от точки $B$ до плоскости $ACD_1$; *д)* от точки $B$ до плоскости $DFE_1$.

**Ответ.** *а)* $\frac{2\sqrt{21}}{7}$; *б)* $\frac{\sqrt{5}}{5}$; *в)* $\frac{3\sqrt{13}}{13}$; *г)* $\frac{\sqrt{2}}{4}$; *д)* $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

## Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

– Что это, если человек упал с высоты 30 метров и не разбился?
– Случайность.
– А если ещё раз?
– Совпадение.
– А в третий?
– Привычка!