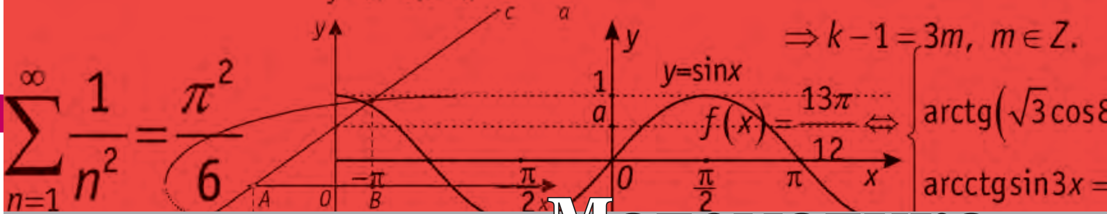
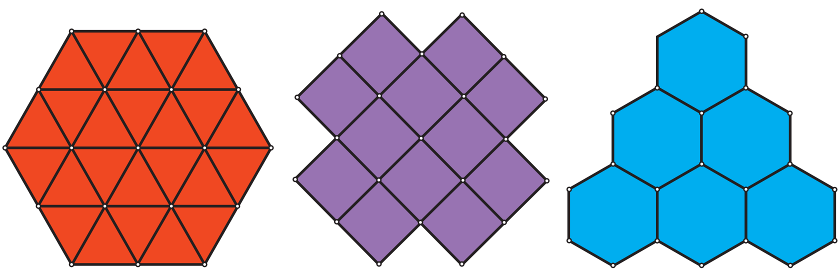


Вавилов Валерий Васильевич
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова и школы имени А.Н. Колмогорова. Заслуженный преподаватель и лауреат Ломоносовской премии МГУ. Автор 23 книг, более 300 статей научного, методического и научно-популярного характера.

Мозаики на плоскости

В статье рассматриваются разбиения плоскости на правильные многоугольники, которые находят многочисленные применения в различных областях науки и искусства.

1. Широко известны покрытия плоскости правильными многоугольниками (без наложений), которые показаны на рис. 1.



а *б* *в*

Рис. 1

Специфика этих покрытий состоит в том, что в каждом из них участвуют правильные многоугольники *одного вида и «звёзды» в каждом узле одинаковы*; звезда – это любой узел (он же вершина многоугольника) и стороны всех многоугольников, которые встречаются в этом узле.

Других покрытий плоскости указанного типа не существует (то есть когда в разбиении участвуют только одинаковые правильные многоугольники). Для доказательства, во-первых, заметим, что сумма всех внутренних углов правильного p-угольника равна $(p-2)180° = (p-2)\pi$, и поэтому углы при любой его вершине равны

$$\alpha_p = \left(1-\frac{2}{p}\right)\pi,\ p = 3, 4, 5, \ldots$$

Так, например,

$$\alpha_3 = \frac{\pi}{3} = 60°,\ \ \alpha_4 = \frac{\pi}{2} = 90°,$$

$$\alpha_5 = \frac{3\pi}{5} = 108°,\ \alpha_6 = \frac{2\pi}{3} = 120°,$$

$$\alpha_{10} = \frac{4\pi}{5} = 144°,\ \alpha_{12} = \frac{5\pi}{6} = 150°.$$

Во-вторых, если к каждой вершине правильного p-угольника примыкают (без наложений) такие же многоугольники и их общее число равно k, то сумма внутренних углов всех многоугольников, примыкающих к одной вершине, должна быть равна $360° = 2\pi$. Поэтому

$$k(1 - 2/p)\pi = 2\pi$$

и, следовательно:

$$1/k + 1/p = 1/2.$$

Чтобы решить это уравнение (в натуральных числах), можно его записать в виде $(p - 2)(k - 2) = 4$. Имеются только три возможности: $4 \cdot 1 = 4$, $2 \cdot 2 = 4$, $1 \cdot 4 = 4$. Таким образом:

$$\begin{cases} p-2=4, \\ k-2=1, \end{cases} \begin{cases} p-2=2, \\ k-2=2, \end{cases} \begin{cases} p-2=1, \\ k-2=4. \end{cases}$$

Из этих систем находим, что имеется только три возможности, которые и показаны на рисунке 1: $p = 6$, $k = 3$; $p = 4$, $k = 4$; $p = 3$, $k = 4$.

2. Попробуем *снять ограничение* на то, что в покрытии правильными многоугольниками участвуют *только одинаковые* правильные многоугольники. Но, что важно, *сохраним условие*, что в каждом таком возможном покрытии правильными многоугольниками без наложений все «звёзды устроены одинаково» (включая и порядок следования многоугольников при обходе против часовой стрелки вокруг каждого узла). Именно такие покрытия плоскости называются *мозаиками* (или *правильными паркетами*). При этом мы будем считать две мозаики различными, если их нельзя наложить друг на друга.

Например, выясним, существует ли такая мозаика, в каждом узле которой сходятся два правильных треугольника и два правильных шестиугольника (отметим, что сумма углов двух треугольников и двух шестиугольников равна $2 \cdot 60° + 2 \cdot 120° = 360°$). Возможны два способа их расположения около узла мозаики, показанных на рис. 2 и 3 *а*.

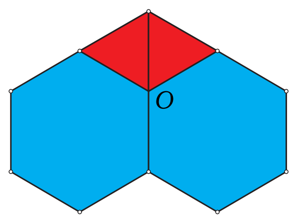


Рис. 2

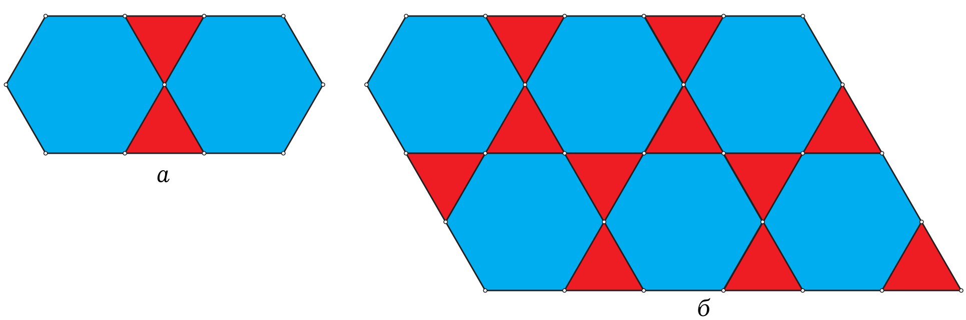


Рис. 3

Один из них *приводит к мозаике* (рис. 3 *б*). Вторая фигура (рис. 2) после многократного прикладывания равных ей образцов приводит к разбиению плоскости без наложений на правильные треугольники и шестиугольники. Но такое разбиение правильной мозаикой не будет, так как в нём имеются два типа устройства звёзд. Кроме показанного на рис. 2, имеются также узлы, где сходятся 6 треугольников. Читателю предлагается убедиться в этом самостоятельно. Итак, фигура на рис. 2 приводит к разбиению плоскости на правильные многоугольники, но *мозаикой не является*. О разбиениях плоскости на правильные многоугольники с разным устройством звёзд в узлах см. [1].

3. **Теорема.** *На плоскости существует ровно одиннадцать различных мозаик.*

Доказательство (см. [2], [3]). Рассмотрим какой-либо узел мозаики и обозначим через p_k число примыкающих к нему правильных k-угольников ($k \geq 3$), а через α_k – величину внутреннего угла правильного k-угольника. Тогда в каждом узле мозаики имеет место соотношение

$$\sum \alpha_k p_k = 2\pi,$$

где в сумму включаются все слагаемые с номерами k, для которых к узлу примыкает хотя бы один k-угольник (для остальных k, по определению, полагаем $p_k = 0$).

Таким образом, имеем основное уравнение:

$$\sum (1 - \frac{2}{k}) p_k = 2. \qquad (1)$$

Ясно, что в узле мозаики сходятся не менее трёх и не более шести правильных многоугольников. Только два многоугольника встречаться не могут, так как нет правильного многоугольника с углами в 180°. Семь (и более) правильных многоугольников в мозаике не могут примыкать к одной вершине, так как в этом случае найдётся многоугольник с углом меньше 60°, а таких правильных многоугольников не существует. Итак, в левой части уравнения (1) может быть три, четыре, пять и шесть слагаемых.

Рассмотрим все эти случаи по отдельности.

А. Три многоугольника в узле мозаики. Изучим эту ситуацию, разбив её на три более конкретные.

1) Пусть в каждом узле встречаются три одинаковых многоугольника. Тогда из (1) получаем равенство $3(1 - 2/k) = 2$, и поэтому $k = 6$ (рис. 1).

2) Пусть в каждом узле сходятся два одинаковых k-угольника и один, отличный от них, правильный n-угольник.

Здесь уравнение (1) принимает вид:

$$\left(1 - \frac{2}{n}\right) + 2\left(1 - \frac{2}{k}\right) = 2,$$

откуда

$$k = \frac{4n}{n-2} = 4 + \frac{8}{n-2}.$$

Простым перебором убеждаемся, что выражение справа будет натуральным числом только при $n = 3$, 4, 6, 10; соответствующие им значения $k = 12$, 8, 6, 5. (случай $n = k = 6$ мы уже отмечали выше и здесь не рассматриваем). Таким образом, для построения мозаик в этом случае возникают ещё три новых различных типа узлов возможных мозаик, показанные на рис. 4.

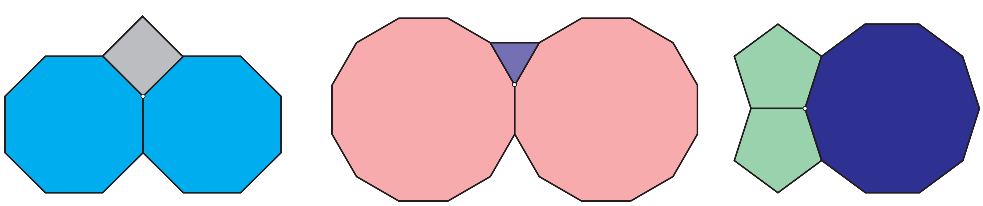


Рис. 4

Из рисунков 5 и 6 видно, что два первых типа строения узлов приводят к двум мозаикам: прикладывание этих фигур друг к другу даёт нужное замощение плоскости.

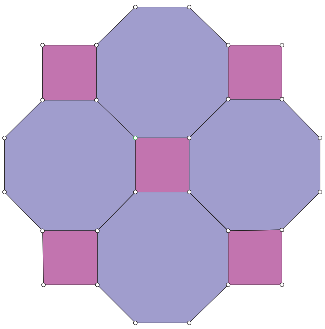


Рис. 5

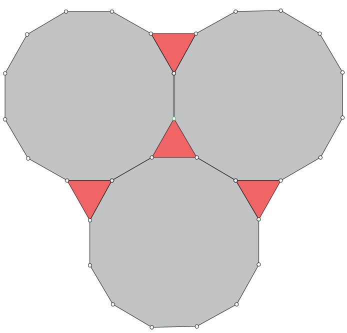


Рис. 6

Легко убедиться непосредственно, что третья фигура на рис. 4 не приводит к разбиению плоскости без наложений и, тем самым, не приводит к мозаике.

3) Итак, осталось изучить уравнение (в случае А)

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\frac{1}{k}=\frac{1}{2}, \qquad (2)$$

то есть когда к узлу примыкают три различных многоугольника (с n, k и m сторонами). Заметим, что среди троек натуральных чисел, удовлетворяющих этому уравнению (2) и отвечающих некоторой мозаике, нет нечётных чисел. Действительно, предположив, например, что k – нечётное число, легко убеждаемся, что попеременно к его сторонам нельзя приставить правильные n-угольники и m-угольники так, чтобы получить мозаику.

Таким образом, можно считать, что $n = 2n_1$, $m = 2m_1$, $k = 2k_1$ и из (2) заключаем, что

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{m_1}+\frac{1}{k_1}=1.$$

Без ограничения общности можно считать, что $k_1 < m_1 < n_1$. Тогда из уравнений следует неравенство

$$1=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{m_1}+\frac{1}{k_1}<\frac{3}{k_1},$$

и поэтому $k_1 = 2$. Тогда

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{m_1}=\frac{1}{2}.$$

Единственным нужным решением этого уравнения служит пара натуральных чисел (проверьте самостоятельно): $m_1 = 3$, $n_1 = 6$.

Итак, в рассматриваемом случае $n = 12$, $m = 6$, $k = 4$, то есть к каждому узлу примыкают правильные 12-угольник, шестиугольник и квадрат, и непосредственным прикладыванием получаем мозаику (рис. 7).

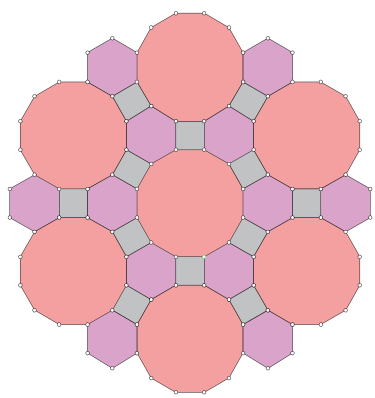


Рис. 7

Б. Четыре многоугольника в узле мозаики. Здесь мы имеем уравнение

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\frac{1}{k}+\frac{1}{l}=1,$$

причём можно считать, что $l \le k \le$ $\le m \le n$.

Если $l > 4$, то $1/l < 1/4$, $1/n <$ $1/4$, $1/m < 1/4$, $1/k < 1/4$, и поэтому

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\frac{1}{k}+\frac{1}{l}<1.$$

Таким образом, $l \le 4$.

1) Если $l = 4$, то получаем уравнение:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\frac{1}{k}=\frac{3}{4}.$$

Отсюда следует (как?), что $n = m = k =$ $= l = 4$. Это приводит к мозаике, состоящей из одних квадратов (рис. 1).

2) Если $l = 3$, то

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\frac{1}{k}=\frac{2}{3}.$$

Если предположить, что $k \ge 5$, то имеем:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\frac{1}{k}\le\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}<\frac{2}{3}.$$

Поэтому $k < 5$.

2*а*) Если $k = 4$, то

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{5}{12}.$$

При $m \ge 5$ отсюда заключаем, что $1/n \ge 5/12 - 1/5 = 13/60$, т. е. $13n \le 60$, а это невозможно при $n \ge$ $\ge m \ge 5$.

При $m = 4$ получаем $n = 6$ (при этом $l = 3$ и $k = 4$).

2*б*) Если $k = 3$, то из уравнения

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{1}{3}$$

легко находим только два решения: $m = 4$, $n = 12$ и $m = 6$, $n = 6$.

Подводя итоги **в ситуации Б** (когда в узле сходятся четыре многоугольника), получаем следующие возможности:

- $l = k = m = n = 4$ (мозаика из квадратов).
- $l = 3$, $k = m = 4$, $n = 6$, и это решение позволяет сконструировать две базовые фигуры, показанные на рис. 8.

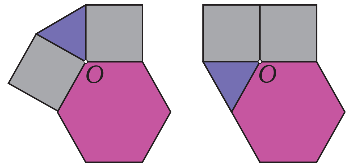


Рис. 8

Первая их них, как легко убедиться, даёт мозаику (рис. 9), а вторая к мозаике не приводит (убедитесь в этом самостоятельно).

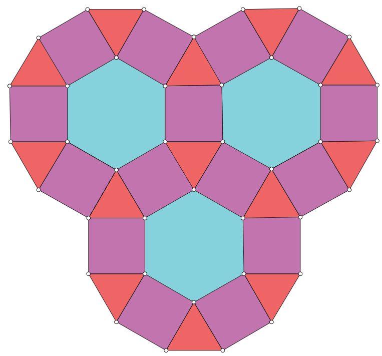


Рис. 9

- $l = k = 3$, $m = n = 6$. Здесь, как мы уже обсуждали выше в п. 1, только одна из двух возможных базовых фигур приводит к мозаике (рис. 3).
- $l = k = 3$, $m = 4$, $n = 12$. В этом случае получаем две возможные базовые фигуры для построения мозаики, показанные на рис. 10.

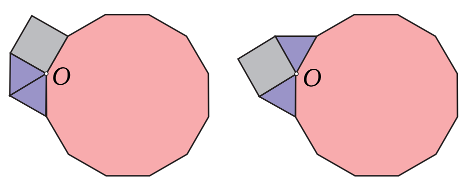


Рис. 10

Проверьте самостоятельно, что ни одна из фигур рис. 10 не приводит к мозаикам.

В. Шесть многоугольников в узле мозаики могут быть только в том случае, когда они все треугольники (рис. 1).

Г. Пять многоугольников в узле мозаики. Здесь мы получаем уравнение вида

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{j}=\frac{3}{2},$$

где также можно считать, что $j \le l \le$ $\le k \le m \le n$. Легко показать (выясняя, как и раньше, поочерёдно: *насколько большим может быть самое маленькое из чисел*), что $j = l = k = 3$, и поэтому

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{1}{2}.$$

Отсюда получаем два решения: $m = 3$, $n = 6$ и $m = n = 4$.

Первая возможность ($n = 6$; $m =$ $= j = l = k = 3$) даёт единственную мозаику, показанную на рис. 11.

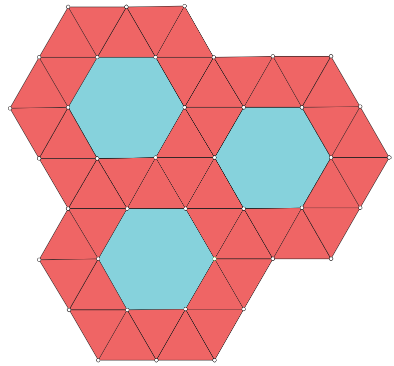


Рис. 11

Второму решению уравнения ($j =$ $= l = k = 3$; $m = n = 4$) соответствуют два возможных строения узла (их видно на рис. 12) и каждому из них соответствуют свои мозаики (рис. 12).

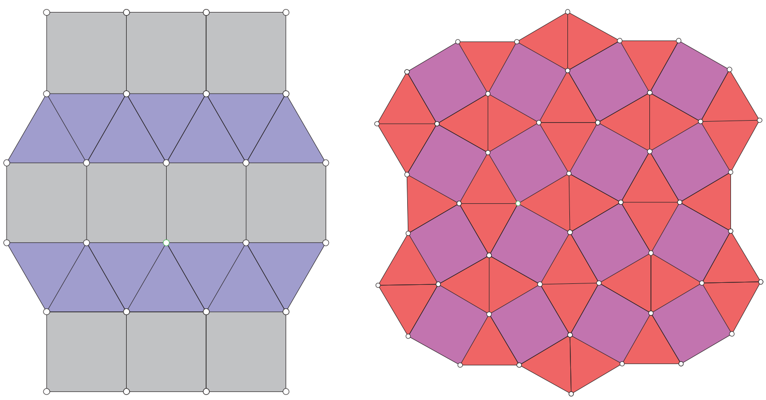


Рис. 12

Этим завершается доказательство теоремы: все различные мозаики показаны на рисунках 1, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12.

4. Возможны, конечно, разбиения всей плоскости на правильные многоугольники (их называют паркетами) без дополнительного условия о равенстве звёзд в каждом узле паркета. Так, например, на рис. 13 показан паркет, у которого встречаются узловые звёзды двух разных типов. Такие паркеты часто называют неоднородными паркетами и их бесконечно много (почему?).

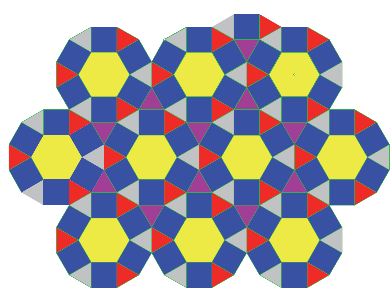


Рис. 13

Кроме того, существуют и разбиения плоскости на многоугольники, которые правильными не являются. Широко известна так называемая мозаика Р. Пенроуза, которая составлена из ромбов двух разных типов (рис. 14).

Хорошую возможность для конструирования паркетов различного вида предоставляет программный продукт [4], который поможет не только в воспроизведении уже известных мозаик и различных неоднородных паркетов, но и в создании новых разбиений плоскости.

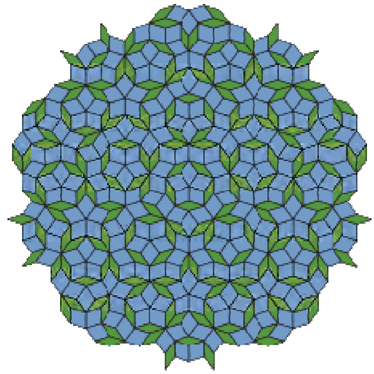


Рис. 14

Литература

1. *Штейнгауз Г.* Математический калейдоскоп. – М.: Наука, 1981.

2. *Колмогоров А.Н.* Паркеты из правильных многоугольников. // Квант. – 1970. – №3.

3. *Михайлов О.* Одиннадцать правильных паркетов. // Квант. – 1979. – №2.

4. Образовательный комплекс «Математика 5-11». – М.: ЗАО «1С», АНО «Учебно-издательский центр «Интерактивная линия», Учреждение «Институт новых технологий», 2004. (Авторы: Дубровский В.Н., Башмаков М.И., Вавилов В.В. и др.).

5. *Вавилов В.В.* Геометрия-10. Тезисы лекций. – М.: Школа имени А.Н. Колмогорова, 2007, 72 с.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Сила впечатления

Однажды французский художник Эдгар Дега рассматривал картины своего друга Клода Моне из цикла «Тополя», на которых с исключительным мастерством были изображены ветви деревьев, гнущиеся под порывами сильного ветра, – создавалось полное впечатление «ветровой стихии». Прошло лишь немного времени, и Дега сказал: «Извини, дружище, я пойду – у меня такое чувство будто отовсюду дует».

«Тополя», 1891.
Клод Моне