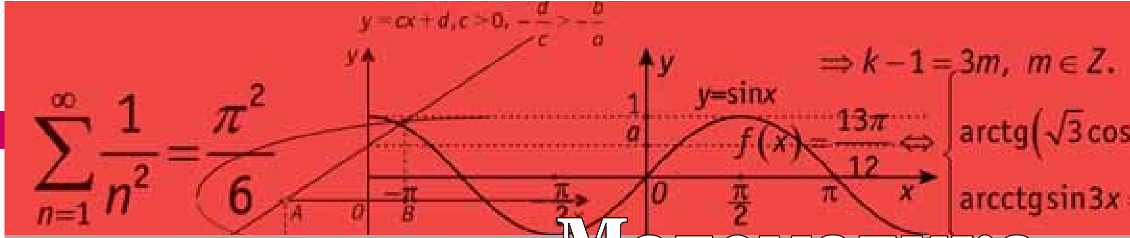

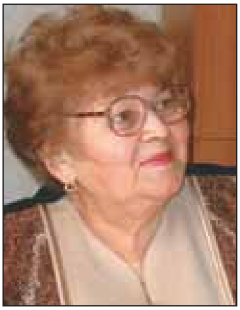

Колесникова София Ильинична
Старший преподаватель кафедры высшей математики Московского физико-технического института (МФТИ), специалист Федеральной заочной физико-технической школы (ФЗФТШ) при МФТИ. Окончила Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (МГУ), имеет большой опыт работы со старшеклассниками, автор пособий «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ» и «Решение сложных задач ЕГЭ».

Монотонные функции в уравнениях и неравенствах

В пособиях автора и в статьях в нашем журнале рассматривались условия равносильности для показательных и логарифмических неравенств («Потенциал» №3-4, 2005). Как показывает практика работы с учителями и школьниками, методика, если принимается, успешно усваивается. Причём школьники, если начинают по ней решать, работают с большим удовольствием: ведь решать становится намного проще. Как показывает опыт проверки заданий ФЗФТШ при МФТИ, всё-таки не все используют эту методику – именно поэтому автор не решалась широко использовать её для произвольных

монотонных функций. Однако всё чаще школьники старших классов спрашивают, как решить некоторые довольно громоздкие уравнения или неравенства, которые заведомо не решаются школьными методами. Школьники при этом сами говорят, что решением является такое-то число. Откуда оно взялось? Из монотонности – робко, но гордо произносят они. Как именно это следует для данной задачи? На этот вопрос, как правило, ответа нет. Работать с произвольными монотонными функциями непросто. Практика показала, что и школьникам, и некоторым учителям трудно даётся этот материал. Трудность состоит в том, что функции, как правило, сложные, монотонны по отношению к «аргументу», а не независимой переменной – поэтому разобраться, по отношению к чему они монотонны, не всегда сразу удаётся. В последние годы всё чаще стали появляться такие задачи и на вступительных экзаменах в вузы. Как правило, эти задачи можно было решить и школьными методами, но довольно громоздко. Но вот появилась задача (пример 3), которую «по-школьному» я решать не умею. Именно она дала повод и необходимость написать эту статью.

Монотонные функции в уравнениях. Единственность значений монотонной функции

Заметим, что у любой изучаемой в школе функции есть промежутки монотонности – с монотонными в области определения функциями знакомы все: это $y = x^3$, $y=\sqrt[3]{x}$, $y=\sqrt{x}$, $y=\log_2 x$, $y=6^x$ и т. д. Что нас будет интересовать больше всего? Это, прежде всего, то, что *любое* своё значение монотонная функция принимает только в *одной* точке. Отсюда следует, что если функция $f(t)$ определена и строго монотонна (возрастает или убывает) на некотором промежутке T, то

$f(t_1)=f(t_2) \Leftrightarrow t_1=t_2$ для $t_1, t_2 \in T$. (1)

На самом деле, чаще всего придётся иметь дело со сложными функциями $f(u(x))$ и $f(v(x))$. Тогда переформулируем условие равносильности (1): если функция $f(t)$ строго монотонна на некотором промежутке T, а $u(x)\in T$ и $v(x)\in T$, то

$$f(u(x))=f(v(x)) \Leftrightarrow u(x)=v(x).$$

В этом случае роль t_1 и t_2 играют значения $u(x)\in T$ и $v(x)\in T$ в некоторой точке x.

Пример 1. (МГУ, 2001, мехмат) Решите уравнение

$$4x-3|x-1|=4\sqrt{5x+14}-3\left|\sqrt{5x+14}-1\right|.$$

Запишем ОДЗ: $5x+14\ge 0$ (без особой необходимости неравенства в ОДЗ уравнений решать не надо!).

Первый способ (раскроем все модули). Теперь аккуратно сначала раскроем $\left|\sqrt{5x+14}-1\right|$, а затем $|x-1|$:

$$4x-3|x-1|=$$
$$=4\sqrt{5x+14}-3\left|\sqrt{5x+14}-1\right| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\sqrt{5x+14}+3|x-1|-4x=$$
$$=3\left|\sqrt{5x+14}-1\right| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{5x+14}-1\ge 0, \\ \sqrt{5x+14}+3|x-1|-4x+3=0; \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{5x+14}-1< 0, \\ 7\sqrt{5x+14}+3|x-1|-4x-3=0. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge -\dfrac{13}{5}, \\ \sqrt{5x+14}+3|x-1|-4x+3=0; \end{cases} \\ \begin{cases} x< -\dfrac{13}{5}, \\ 7\sqrt{5x+14}+3|x-1|-4x-3=0. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1\ge 0, \\ \sqrt{5x+14}-x=0; \end{cases} \\ \begin{cases} -\dfrac{13}{5}\le x<1, \\ \sqrt{5x+14}=7x-6; \end{cases} \\ \begin{cases} x< -\dfrac{13}{5}, \\ 7\sqrt{5x+14}=7x. \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=7; \\ \begin{cases} -\frac{13}{5}\le x<1, \\ 7x-6\ge 0, \\ 49x^2-89x+22=0. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=7$$

Ответ. 7. Итак, громоздко, но задача решается.

Второй способ (без раскрытия модулей). Посмотрим на условие задачи внимательней. Есть что-то «общее» у левой и правой частей. Если рассмотреть функцию $y(x)=4x-3|x-1|$, то условие задачи переписывается так: $y(x)=y\left(\sqrt{5x+14}\right)$. Построим график функции

$$y(x)=4x-3|x-1|=\left[\begin{array}{l} x+3,\ x\ge 1, \\ 7x-3,\ x<1 \end{array}\right. \text{– рис. 1.}$$

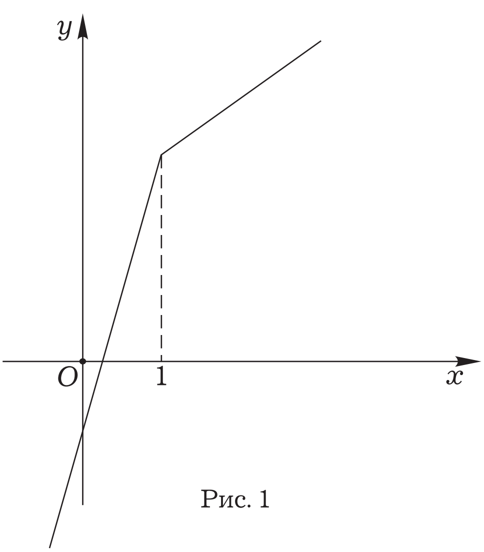

Рис. 1

Видно, что она непрерывна и строго возрастает, поэтому любое значение принимает только один раз, то есть $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow x_1=x_2$. Отсюда следует, что

$$y(x)=y\left(\sqrt{5x+14}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\sqrt{5x+14}\Leftrightarrow x=7.$$

Ответ. 7.

Пример 2. (МГУ, 2001, мехмат) Решите самостоятельно уравнение $3x-2|x-2|=3\sqrt{3x+18}-2\left|\sqrt{3x+18}-2\right|$.

Ответ. 6.

Пример 3. (МГУ, 2006, биофак) Решите уравнение

$$9^{\arcsin(3-2x)}+\log_3\left(2\arcsin(3-2x)\right)-$$
$$-3^{\arccos(9-6x)}+\log_{1/3}\arccos(9-6x)=0.$$

Как решать уравнение – совершенно не ясно, поэтому найдём, на всякий случай, сначала ОДЗ:

$$\begin{cases} 0<2\arcsin(3-2x)\le\pi, \\ 0<\arccos(9-6x)\le\pi, \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 0<3-2x\le 1, \\ -1\le 9-6x<1, \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 1\le x<1{,}5, \\ \frac{4}{3}<x\le\frac{5}{3}, \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{4}{3}<x<1{,}5.$$

Теперь преобразуем уравнение:

$$9^{\arcsin(3-2x)}+\log_3\left(2\arcsin(3-2x)\right)-$$
$$-3^{\arccos(9-6x)}+$$
$$+\log_{1/3}\arccos(9-6x)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3^{2\arcsin(3-2x)}+\log_3\left(2\arcsin(3-2x)\right)=$$
$$=3^{\arccos(9-6x)}+\log_3\arccos(9-6x).$$

В отличие от предыдущего примера, это уравнение не решается школьными методами. Внимательно приглядевшись к левой и правой час ти, замечаем, что уравнение можно записать в виде

$$y\left(2\arcsin(3-2x)\right)=y\left(\arccos(9-6x)\right),$$

где

$$u(x)=2\arcsin(3-2x),$$
$$v(x)=\arccos(9-6x),\ \text{а}$$
$$y(t)=3^t+\log_3 t.$$

Присмотримся к функции

$y(t)=3^t+\log_3 t$ при $t>0$: она непрерывна и строго возрастает. Поэтому $y(t_1)=y(t_2)\Leftrightarrow t_1=t_2$:

$3^{2\arcsin(3-2x)}+\log_3(2\arcsin(3-2x))=$

$=3^{\arccos(9-6x)}+\log_3\arccos(9-6x)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\arcsin(3-2x)=\arccos(9-6x)$.

Решим полученное уравнение:

$\cos 2\arcsin(3-2x)=$

$=\cos\arccos(9-6x)\Leftrightarrow 1-2(3-2x)^2=$

$=9-6x\Leftrightarrow 4x^2-15x+13=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{15\pm\sqrt{17}}{8}$.

Учтём ОДЗ и получим, что

$$x=\frac{15-\sqrt{17}}{8}.$$

Ответ. $\dfrac{15-\sqrt{17}}{8}$.

Пример 4. (МГУ, 2006, биофак) Решите самостоятельно уравнение $9^{\arcsin(2x+1)}+$
$+\log_3(2\arcsin(2x+1))-3^{\arccos(6x+3)}+$
$+\log_{1/3}\arccos(6x+3)=0$.

Ответ. $\dfrac{-7+\sqrt{17}}{8}$.

Пример 5. Решите уравнение $\sqrt{x^2-16}+\log_2(x-4)+\sqrt{\arcsin(x-4)}=$
$=3+\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

Рассмотрим функцию $y(t)=\sqrt{t(t+8)}+\log_2 t+\sqrt{\arcsin t}$ $(t=x-4)$. Она непрерывна и монотонно возрастает при $t>0$, поэтому любое значение принимает только один раз. «Угадаем» подбором значение $y(1)=3+\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$. Отсюда следует, что решением является $x=5$.

Ответ. 5.

Сложность примера состоит в том, что это уравнение тоже не решается школьными методами.

Монотонные функции и неравенства

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна и строго возрастает на некотором промежутке X. Тогда, если $f(x_2)>f(x_1)$, x_2, $x_1\in X$, то $x_2>x_1$, т. е. $f(x_2)>f(x_1)\Rightarrow x_2>x_1$. Если же $x_2>x_1$, то $f(x_2)>f(x_1)$, т. е. $x_2>x_1\Rightarrow f(x_2)>f(x_1)$. А это значит, что для строго возрастающей непрерывной функции верно, что

$$f(x_2)>f(x_1)\Leftrightarrow x_2>x_1.$$

Для неравенства другого знака аналогично показывается, что

$$f(x_2)<f(x_1)\Leftrightarrow x_2<x_1.$$

Отсюда получаем **правило 1**:

Знак разности $f(x_2)-f(x_1)$ непрерывной возрастающей функции совпадает со знаком разности x_2-x_1 в ОДЗ.

Если функция $f(x)$ непрерывна и строго убывает на некотором промежутке X, то, как известно, если $f(x_2)>f(x_1)$, то $x_2<x_1$, если же $x_2<x_1$, то $f(x_2)>f(x_1)$. А это значит, что для строго убывающей непрерывной функции верно, что

$$f(x_2)>f(x_1)\Leftrightarrow x_2<x_1.$$

Для неравенства другого знака аналогично показывается, что

$$f(x_2)<f(x_1)\Leftrightarrow x_2>x_1.$$

Отсюда получаем **правило 2**:

Знак разности $f(x_2)-f(x_1)$ не-

прерывной убывающей функции противоположен знаку разности $x_2 - x_1$ *в ОДЗ.*

Эти правила дают возможность исследовать довольно сложные неравенства, где решение зависит от знака разности непрерывной строго монотонной функции в двух различных точках.

Чаще всего правила будем применять к сложным функциям $f(u(x))$ и $f(v(x))$. Тогда переформулируем их: *если функция* $f(t)$ *возрастает на некотором промежутке* T*, а* $u(x) \in T$ *и* $v(x) \in T$*, то знак разности* $f(u(x)) - f(v(x))$ *совпадает со знаком разности* $u(x) - v(x)$ *в ОДЗ; если функция* $f(t)$ *убывает на некотором промежутке* T*, а* $u(x) \in T$ *и* $v(x) \in T$*, то знак разности* $f(u(x)) - f(v(x))$ *противоположен знаку разности* $u(x) - v(x)$ *в ОДЗ;*

Пример 6. (МИФИ, 2005)
Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 2x - 8}{\arcsin\frac{x-3}{3}} \geq 0.$$

Функция $y(t) = \arcsin t$ возрастает на области определения, поэтому знак
$\arcsin t \equiv \arcsin t - 0 \equiv \arcsin t - \arcsin 0$
совпадает со знаком t. Отсюда следует, что знак $\arcsin\frac{x-3}{3}$ совпадает со знаком $(x-3)$. Тогда

$$\frac{x^2 - 2x - 8}{\arcsin\frac{x-3}{3}} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{x-3}{3}\right| \leq 1, \\ \frac{(x+2)(x-4)}{\frac{x-3}{3}} \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0;6], \\ \frac{(x+2)(x-4)}{x-3} \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0;3) \cup [4;6].$$

Ответ. $[0;3) \cup [4;6]$.

Пример 7. (МГУ, 2005, мехмат)
Решите неравенство

$$\frac{3 - x - \sqrt{5 - x^2}}{\cos\frac{2x-7}{4} - \cos\frac{x-5}{4}} \geq 0.$$

Ответ. $[1;2) \cup (2;\sqrt{5}]$.

Найдём, как всегда, ОДЗ:

$$5 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-\sqrt{5};\sqrt{5}].$$

Первый способ. Преобразуем левую часть неравенства:

$$\frac{3 - x - \sqrt{5 - x^2}}{\cos\frac{2x-7}{4} - \cos\frac{x-5}{4}} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x + 2}{\sin\frac{3x-12}{8} \cdot \sin\frac{x-2}{8}} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-2)}{\sin\frac{3x-12}{8} \cdot \sin\frac{x-2}{8}} \leq 0.$$

Так как x изменяется на конечном отрезке, то выясним, в каких пределах изменяются аргументы наших тригонометрических функций:

$$\frac{-3\sqrt{5} - 12}{8} \leq \frac{3x - 12}{8} \leq \frac{3\sqrt{5} - 12}{8},$$

$$\frac{-\sqrt{5} - 2}{8} \leq \frac{x - 2}{8} \leq \frac{\sqrt{5} - 2}{8}.$$

Отсюда следует, что

$$-\pi < \frac{3x - 12}{8} < 0, \quad -\frac{\pi}{2} < \frac{x - 2}{8} < \frac{\pi}{2}.$$

Так, что же отсюда может следовать? Ясно! Тогда $\sin\frac{3x-12}{8}<0$ на всём этом промежутке, а поэтому

$$\frac{3-x-\sqrt{5-x^2}}{\cos\frac{2x-7}{4}-\cos\frac{x-5}{4}}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-2)}{\sin\frac{x-2}{8}}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2, \\ \begin{cases} x<2, \\ x\ge 1. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in[1;2)\cup(2;+\infty).$$

Учтём ОДЗ и получим

$$x\in[1;2)\cup\left(2;\sqrt{5}\right].$$

Второй способ. Попробуем применить теорию монотонных функций. Так как x изменяется на конечном отрезке, то выясним, в каких пределах изменяются аргументы косинусов:

$\frac{-2\sqrt{5}-7}{4}\le\frac{2x-7}{4}\le\frac{2\sqrt{5}-7}{4}$,

$\frac{-\sqrt{5}-5}{4}\le\frac{x-5}{4}\le\frac{\sqrt{5}-5}{4}$, т. е. аргументы косинусов принадлежат промежутку $(-\pi;0)$, а здесь $\cos t$ монотонно возрастает, а потому знак разности $\cos u-\cos v$ совпадает со знаком разности $(u-v)$. Поэтому

$$\frac{3-x-\sqrt{5-x^2}}{\cos\frac{2x-7}{4}-\cos\frac{x-5}{4}}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-x-\sqrt{5-x^2}}{\frac{2x-7}{4}-\frac{x-5}{4}}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{5-x^2}+(x-3)}{x-2}\le 0$$

(т.к. $x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]\Rightarrow x-3<0\Rightarrow$

$\Rightarrow\sqrt{5-x^2}-(x-3)>0$)

$$\frac{5-x^2-(x-3)^2}{x-2}\le 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2+6x-4}{x-2}\le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-1)}{x-2}\ge 0 \Leftrightarrow x\in[1;2)\cup(2;+\infty).$$

Учтём ОДЗ и получим, что $x\in[1;2)\cup\left(2;\sqrt{5}\right]$.

Ответ. $[1;2)\cup\left(2;\sqrt{5}\right]$.

Пример 8. Решите неравенство

$$\frac{\arccos\frac{x-2}{2}-\arccos\frac{4-x}{2}}{\left(x-\frac{7}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)}\le 0.$$

Ответ. $\left(\frac{5}{2};3\right]\cup\left(\frac{7}{2};4\right]$.

$$\text{ОДЗ:}\begin{cases} -1\le\frac{x-2}{2}\le 1, \\ -1\le\frac{4-x}{2}\le 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[0;4], \\ x\in[2;6], \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x\in[2;4]$.

В чём трудность примера? Конечно, прежде всего, в том, что многие просто не помнят свойств $\arccos x$. А функция $y=\arccos x$ строго убывает на своей области определения. Поэтому пример можно решить «по-школьному»: рассмотреть две системы

$$\begin{cases} \arccos\frac{x-2}{2}-\arccos\frac{4-x}{2}\le 0, \\ \left(x-\frac{7}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)>0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \arccos\frac{x-2}{2}-\arccos\frac{4-x}{2}\ge 0, \\ \left(x-\frac{7}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)<0. \end{cases}$$

Но можно поступить и по-другому: воспользуемся монотонным убыванием $y=\arccos x$, а, значит, тем, что знак разности

$$\arccos\frac{x-2}{2}-\arccos\frac{4-x}{2}$$

совпадает со знаком «обратной» разности аргументов $\left(\frac{4-x}{2}\right)-\left(\frac{x-2}{2}\right)$.

Тогда

$$\frac{\arccos\frac{x-2}{2}-\arccos\frac{4-x}{2}}{\left(x-\frac{7}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{4-x}{2}-\frac{x-2}{2}}{\left(x-\frac{7}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{\left(x-\frac{7}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(\frac{5}{2};3\right]\cup\left(\frac{7}{2};+\infty\right).$$

Учтём ОДЗ и получим, что

$$x\in\left(\frac{5}{2};3\right]\cup\left(\frac{7}{2};4\right].$$

Ответ. $\left(\frac{5}{2};3\right]\cup\left(\frac{7}{2};4\right]$.

Пример 9. Решите неравенство

$$\frac{\left(\arccos\frac{x-2}{2}-\arccos\frac{4-x}{2}\right)}{\left(x-\frac{7}{2}\right)}\times \frac{\left(2^{x^2-3x+1}-2^{2x^2-8x+7}\right)}{\left(x-\frac{5}{2}\right)}\ge 0.$$

В отличие от предыдущего примера, решить его «по-школьному» уже труднее – количество систем увеличится. Если же использовать правила 1 и 2 ($y=2^t$ возрастает на R), то немедленно получаем, что

$$\frac{\left(\arccos\frac{x-2}{2}-\arccos\frac{4-x}{2}\right)}{\left(x-\frac{7}{2}\right)}\times$$

$$\times\frac{\left(2^{x^2-3x+1}-2^{2x^2-8x+7}\right)}{\left(x-\frac{5}{2}\right)}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{4-x}{2}-\frac{x-2}{2}\right)}{\left(x-\frac{7}{2}\right)}\times$$

$$\times\frac{\left(x^2-3x+1-\left(2x^2-8x+7\right)\right)}{\left(x-\frac{5}{2}\right)}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-3)\left(x^2-5x+6\right)}{\left(x-\frac{7}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-3)^2(x-2)}{\left(x-\frac{7}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left[2;\ \frac{5}{2}\right)\cup\{3\}\cup\left(\frac{7}{2};\ +\infty\right).$$

Ответ. $\left[2;\ \frac{5}{2}\right)\cup\{3\}\cup\left(\frac{7}{2};\ +\infty\right)$.

В заключение приведём пример, в котором одну и ту же функцию, вообще говоря, можно рассматривать как две разные монотонные функции.

Пример 10. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{\log_2(x-3)}+10^{\log_2(x-3)}}{\sqrt[4]{x^2-11x+31}-\sqrt[4]{x-4}}-$$

$$-\frac{\sqrt{\log_2\left(x^2-3x\right)}+10^{\log_2\left(x^2-3x\right)}}{\sqrt[4]{x^2-11x+31}-\sqrt[4]{x-4}}\geq 0.$$

Ответ. $(5;7)$.

Найдём ОДЗ:

$$\begin{cases}\log_2(x-3)\geq 0,\\ \log_2\left(x^2-3x\right)\geq 0,\Leftrightarrow\\ x-4\geq 0.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 4,\\ x\in\left(-\infty;\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right]\cup\left[\frac{3+\sqrt{13}}{2};+\infty\right)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$<=> x\geq 4$.

Рассмотрим функции $y(t)=\sqrt[4]{t}$ и $y(t)=\sqrt{t}+10^t$: они монотонно возрастают при $t>0$, и для них знак разности $y(t_2)-y(t_1)$ совпадает со знаком разности аргументов t_2-t_1. Тогда

$$\frac{\sqrt{\log_2(x-3)}+10^{\log_2(x-3)}}{\sqrt[4]{x^2-11x+31}-\sqrt[4]{x-4}}-$$

$$-\frac{\sqrt{\log_2\left(x^2-3x\right)}-10^{\log_2\left(x^2-3x\right)}}{\sqrt[4]{x^2-11x+31}-\sqrt[4]{x-4}}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$<=>\frac{\log_2(x-3)-\log_2\left(x^2-3x\right)}{x^2-11x+31-x+4}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-3-x^2+3x}{x^2-11x+31-x+4}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-\frac{x^2-4x+3}{x^2-12x+35}=-\frac{(x-1)(x-3)}{(x-5)(x-7)}\geq 0\Leftrightarrow$$

$<=> x\in[1;3]\cup(5;7)$.

Учитывая ОДЗ, получаем $x\in(5;7)$.

Но можно рассмотреть функцию

$y(u)=\sqrt{\log_2 u}+10^{\log_2 u}$ – она тоже монотонно возрастает при $u>0$ и тогда, согласно правилам 1 и 2,

$$\frac{\sqrt{\log_2(x-3)}+10^{\log_2(x-3)}}{\sqrt[4]{x^2-11x+31}-\sqrt[4]{x-4}}-$$

$$-\frac{\sqrt{\log_2\left(x^2-3x\right)}-10^{\log_2\left(x^2-3x\right)}}{\sqrt[4]{x^2-11x+31}-\sqrt[4]{x-4}}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-3-x^2+3x}{x^2-11x+31-x+4}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-\frac{x^2-4x+3}{x^2-12x+35}=\frac{(x-1)(x-3)}{(x-5)(x-7)}\leq 0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x\in[1;3]\cup(5;7)$.

Учтём ОДЗ и получим, что $x\in(5;7)$.

Ответ. $(5;7)$.

Литература

1. «Потенциал» № 3–4, 2005.
2. С.И. Колесникова «Решение сложных задач ЕГЭ», Айрис Пресс, Москва.
3. С.И. Колесникова «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ», Айрис Пресс, Москва.