Вавилов Валерий Васильевич
Заслуженный учитель России, профессор и заместитель директора по научной работе СУНЦ МГУ им. М.В. Ломоносова.

Многоугольники на клетчатой бумаге

Одним из важных объектов, который возникает в различных задачах алгебры, теории чисел и анализа, является *ортогональная целочисленная решётка* Z^2. Она состоит из всех точек плоскости Oxy, у которых обе координаты – целые числа. Точки решётки можно рассматривать как *узлы клетчатой бумаги*, размер клеточки которой равен единице.

Ортогональная решётка на плоскости является мощным средством, которое позволяет переводить аналитические задачи на геометрический язык и обратно. Движение на этом своеобразном мосту между анализом и геометрией стало достаточно интенсивным и двусторонним. Мы приглашаем встретиться на этом мосту и полюбоваться красотами одной из раскинувшихся перед нами панорам. Мы изучим возможности расположения так называемых полуправильных многоугольников на ортогональной решётке таким образом, чтобы все вершины многоугольника находились в узлах решётки.

Правильный треугольник

Если все вершины многоугольника лежат в узлах решётки Z^2, то говорят, что он *расположен* на этой решётке.

Равноугольным многоугольником называется многоугольник, у которого внутренние углы равны, но стороны могут и отличаться друг от друга.

Равносторонним многоугольником называется многоугольник, у которого все стороны равны, но внутренние углы могут и отличаться друг от друга.

Пересечение множества равноугольных и множества равносторонних многоугольников составляет *множество правильных многоугольников*.

Подчеркнём, что в этих определениях ничего не говорится о выпуклости многоугольников. Примеры равноугольных многоугольников, расположенных на решётке, показаны на рис. 1: слева – шестиугольники, справа – квадрат и восьмиугольник. Частными случаями равносторонних являются многоугольники, ограниченные замкнутыми ломаными с единичными длинами звеньев и прямыми углами между звеньями.

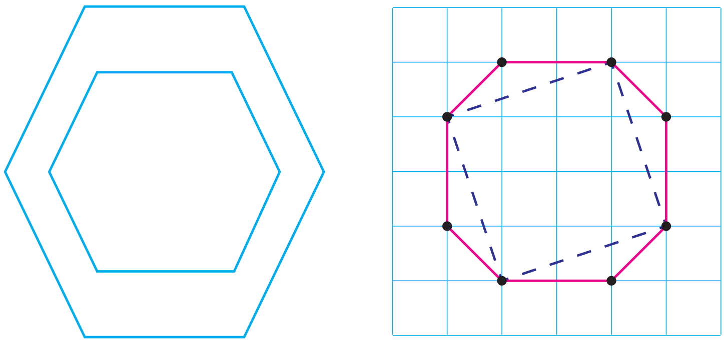

Рис. 1

Основной рассматриваемый ниже вопрос состоит в изучении множества всех полуправильных (и правильных) многоугольников, которые можно расположить на ортогональной решётке точек.

Впервые, видимо, подобный вопрос рассматривался Е. Лукасом в 1978 году для правильного треугольника. Этот вопрос важен с исторической точки зрения, поэтому мы рассмотрим доказательство Лукаса того, что *правильный треугольник расположить нужным образом на ортогональной решётке нельзя*.

Для доказательства предположим противное, то есть что существуют правильные треугольники, которые можно расположить на решётке Z^2.

Будем считать, что среди таких треугольников мы выбрали наименьший и что начало координат находится в одной из его вершин, а две другие вершины имеют координаты (a, b) и (c, d). Тогда четыре целых числа a, b, c, d не имеют общих делителей, отличных от ± 1 (взаимно просты). В противном случае можно перейти к треугольнику меньшего размера с вершинами в точках $(0,0)$, $(a/k,\ b/k)$, $(c/k,\ d/k)$, где k – общий делитель всех четырех чисел (рис. 2).

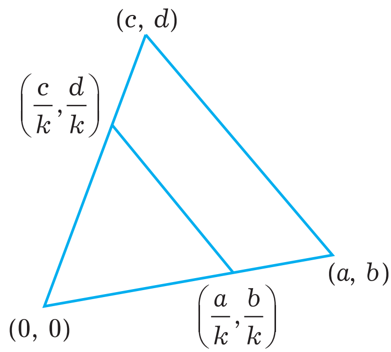

Рис. 2

Запишем равенство сторон треугольника в координатах:

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = (a-c)^2 + (b-d)^2.$$

Отсюда заключаем, что

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 2(ac + bd).$$

Следовательно,

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4(ac + bd),$$

т. е. сумма квадратов четырех чисел делится на 4.

Квадраты целых чисел при делении на 4 дают только остатки 0 или 1. Поэтому или все четыре числа a, b, c, d чётные, или все нечётные. Первое невозможно потому, что эти числа, по нашему выбору, взаимно просты. Второе же невозможно потому, что тогда не выполняется соотношение

$$a^2 + b^2 = (a-c)^2 + (b-d)^2,$$

ибо его левая часть не делится на 4, а правая – делится. Полученное противоречие и доказывает нужное утверждение.

Равносторонние многоугольники

Теорема 1. Имеют место следующие два утверждения:

1) *На решётке* Z^2 *нельзя расположить ни одного равностороннего многоугольника с нечётным числом сторон.*

2) *На решётке* Z^2 *можно расположить равносторонний многоугольник с любым чётным числом сторон.*

Доказательство. 1) Предположим противное, т. е. что существует равносторонний многоугольник с нечётным числом сторон, который можно расположить на решётке Z^2. Будем считать, что этот многоугольник имеет наименьшую возможную длину стороны. Пусть

$\vec{v}_k = \vec{x}_k i + \vec{y}_k j$ $(k = 1, 2, ..., n)$ – векторы, направленные вдоль сторон многоугольника. Сумма всех этих векторов равна нулю и они имеют равные длины, значит,

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = 0,$$

$$y_1 + y_2 + ... + y_n = 0,$$

$$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = ...$$

$$... = x_n^2 + y_n^2 = a^2,$$

где через a обозначена длина стороны многоугольника.

Возводя каждое из первых равенств в квадрат, а затем складывая полученные результаты (с учётом последующих n равенств), получаем соотношение

$$na^2 = -2\sum_{i \neq j}\left(x_i x_j + y_i y_j\right).$$

Так как a^2 – натуральное число (квадрат расстояния между двумя точками с целыми координатами) и n нечётно, a^2 является чётным числом. Если a^2 делится на 4, то все x_i и y_i являются чётными числами, поскольку попарная сумма их квадратов делится на 4. Но этого быть не может, так как тогда из векторов $\vec{v}_k / 2$, которые в этом случае также имеют целочисленные координаты, можно составить равносторонний n-угольник. Он имеет сторону вдвое меньше, чем исходный, а это невозможно по нашей договорённости.

Пусть теперь a^2 делится на 2, но не делится на 4. Но тогда все x_i и y_i – нечётные числа, так как все они удовлетворяют уравнению $x_i^2 + y_i^2 = a^2$. Таким образом, сумма

$$\sum_{i \neq j}\left(x_i x_j + y_i y_j\right)$$

является чётным числом и поэтому a^2 делится на 4, что, как мы уже знаем, невозможно.

2) Пристраивая к равностороннему шестиугольнику квадраты и шестиугольники (один шаг этого процесса показан на рис. 3), убеждаемся, что вторая часть теоремы 1

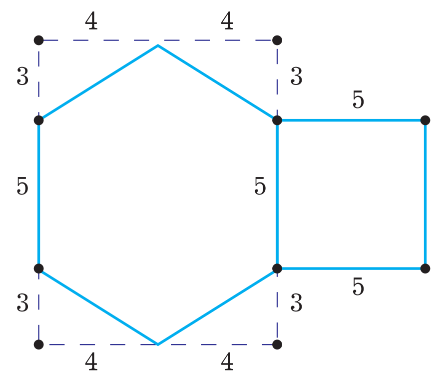

Рис. 3

действительно имеет место. Правда, при этом получаются невыпуклые равносторонние многоугольники с чётным числом сторон. Однако предъявить выпуклый многоугольник также возможно (см. задачу 2).

Равноугольные многоугольники

Для изучения класса равноугольных многоугольников нам понадобится следующее утверждение:

Число $\operatorname{tg}(2\pi/n)$ *при натуральных значениях* n *всегда является иррациональным числом, за исключением случаев* $n = 1, 2, 4, 8$.

Для его доказательства применим формулу

$$\operatorname{tg} n\alpha = \frac{C_n^1 \operatorname{tg}\alpha - C_n^3 \operatorname{tg}^3\alpha + C_n^5 \operatorname{tg}^5\alpha - \ldots + (-1)^{(n-1)/2} \operatorname{tg}^n\alpha}{1 - C_n^2 \operatorname{tg}^2\alpha + C_n^4 \operatorname{tg}^4\alpha - \ldots + (-1)^{(n-1)/2} \operatorname{tg}^{n-1}\alpha}, \qquad (1)$$

где C_n^k – коэффициенты из формулы бинома Ньютона

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots$$
$$\ldots + C_n^n a^0 b^n.$$

Доказательство формулы (1) легко получить методом математической индукции, и мы предлагаем читателю сделать это самостоятельно.

Будем считать, что $n \geq 5$ и $n \neq 8$, так как случаи $n = 1, 2, 3, 4, 8$ ясны. Пусть $\alpha = 2\pi/n$. Тогда $\operatorname{tg}(n\alpha) = 0$ и по формуле (1) число $x = \operatorname{tg}(2\pi/n)$ является корнем уравнения с целыми коэффициентами

$$n - C_n^3 x^2 + C_n^5 x^4 - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{(n-1)/2} x^{n-1} = 0. \qquad (2)$$

В этом уравнении старший коэффициент равен ± 1, следовательно, в множестве рациональных чисел оно может иметь только целые корни (мы воспользовались тем утверждением, что если уравнение с целыми коэффициентами имеет рациональный корень p/q, то знаменатель q обязан делить старший коэффициент этого уравнения, а числитель p – делить свободный коэффициент). Поэтому если x – рациональное число, то оно может быть только целым.

Рассмотрим два случая: а) $n = mp$, где p – нечётное простое число; б) $n = 2^k$ и $k \geq 4$ (этими случаями исчерпываются все возможности).

а) Если $m = 1$, т. е. $n = p$, то из равенства (2) вытекает, что x^2 делит p и, следовательно, $x = \operatorname{tg}(2\pi/n) = \pm 1$. Но это невозможно для нечётного простого n.

Пусть теперь $n = mp$, где $m > 1$. Если число $\operatorname{tg}(2\pi/n)$ рационально, то, как видно из формулы (1), число $\operatorname{tg}(2\pi m/n) = \operatorname{tg}(2\pi/p)$ также рационально, а этого, по доказанному выше, быть не может.

б) Пусть теперь $n = 2^k$ и $k \geq 4$. Так как $\operatorname{tg}(2\pi/16) = \sqrt{2} - 1$ – число иррациональное, по формуле (1) все числа вида $\operatorname{tg}(2\pi/2^k)$ $(k \geq 4)$ также иррациональны.

Нужное утверждение доказано.

Теорема 2. *Из всех возможных равноугольных многоугольников на решётке* Z^2 *можно расположить только прямоугольник и восьмиугольник.*

Доказательство. Будем считать, что $n \geq 4$, так как случай правильного треугольника уже рассматривался ранее. Тот факт, что квадрат и равноугольный восьмиугольник можно расположить на решётке, виден из рис. 1. Пусть теперь $n > 4$ и равноугольный n-угольник можно разместить на решётке Z^2. Тогда векторы, которые формируют его стороны, имеют целочисленные координаты (рис. 4) и угол между любыми двумя соседними векторами равен $2\pi/n$.

Отметим, что если два луча, исходящие из начала координат, проходят через узлы (a, b) и (c, d) решётки Z^2 (рис. 5), то тангенс угла θ между этими лучами является числом рациональным или не определен, так как

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} =$$

$$= \frac{\frac{d}{c} - \frac{b}{a}}{1 + \frac{d}{c}\frac{b}{a}} = \frac{ad - bc}{ac + bd}.$$

Будем считать точку O началом координат (рис. 4); тогда угол между лучами $[OP)$ и $[OQ)$ равен $2\pi/n$, и $\operatorname{tg}(2\pi/n)$, как мы видели выше (указанные лучи проходят через узлы решётки), должен быть при $n > 4$ рациональным числом. А это, по доказанному выше, возможно только в случае, когда $n = 8$.

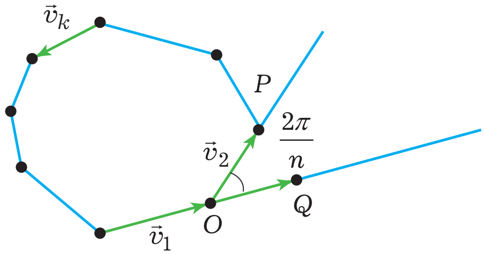

Рис. 4

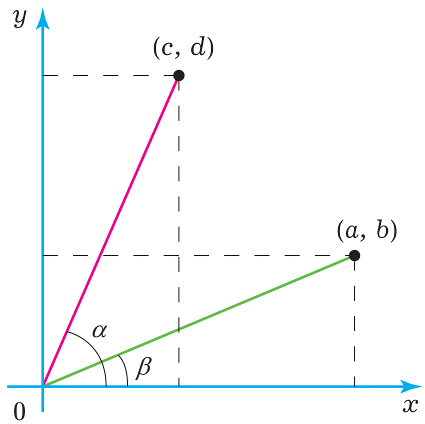

Рис. 5

Правильные многоугольники

Из доказанных выше двух теорем следует, что кандидатами на правильные многоугольники, которые можно расположить на ортогональной решётке точек Z^2, являются только квадрат и правильный восьмиугольник. Докажем, что правильный восьмиугольник в действительности расположить нельзя.

Предположим противное и выберем среди всех тех правильных восьмиугольников, которые можно расположить на ортогональной решётке, тот, который имеет самую маленькую сторону; пусть длина его стороны равна a.

Выберем какой-либо узел решётки O и отложим от него отрезки, равные и параллельные сторонам восьмиугольника со стороной a. Тогда концы этих отрезков являются вершинами правильного восьмиугольника (т. е. он расположен на решётке Z^2); сделайте соответствующий рисунок самостоятельно. Это является следствием так называемого *правила параллелограмма*, которому удовлетворяют узлы ортогональной решётки: если три вершины параллелограмма являются узлами решётки Z^2, то и четвёртая его вершина также является узлом этой решётки. Сторону b вновь построенного восьмиугольника легко вычислить, так как он вписан в окружность радиуса a; получаем:

$$b = 2\sin(\pi / 8) < 2\sin(\pi / 6)a = a.$$

Но это невозможно из-за выбора

числа a (т. е. рассматриваемого исходного восьмиугольника). Полученное противоречие и доказывает, что правильный восьмиугольник на решётке Z^2 расположить нельзя.

О многих других свойствах многоугольников на решётках можно посмотреть в книге *Вавилов В.В., Устинов А.В.* Многоугольники на решётках. – М: МЦНМО, 2006.

Задачи

1. (Московская олимпиада, 1964) На клетчатой бумаге проведена замкнутая ломаная с вершинами в узлах сетки, все звенья которой равны. Докажите, что число звеньев этой ломаной чётно.

2. Докажите, что на решётке Z^2 можно расположить выпуклый равносторонний многоугольник с любым чётным числом сторон.

3. Докажите, что единственным правильным многоугольником на плоскости, все вершины которого имеют рациональные координаты, является квадрат.

4. (*Исследовательский проект*) Найдите все правильные и полуправильные многоугольники, которые можно расположить на каждой из правильных плоских мозаик, то есть покрытии плоскости при помощи правильных многоугольников (но, может быть, разных типов).

О мозаиках (которых только 11 различных) можно посмотреть статью *Колмогоров А.Н.* Паркеты из правильных многоугольников // Квант, №8, 1986.

Мудрые мысли Мудрые мысли Мудрые мысли

Я бы предпочёл найти истинную причину хотя бы одного явления, чем стать королём Персии.

Демокрит

Научные истины всегда парадоксальны, если судить на основании повседневного опыта, который улавливает лишь обманчивую видимость вещей.

К. Морт

Очарование, сопровождающее науку, может победить свойственное людям отвращение к напряжению разума.

Гаспар Монж

Естествознание так человечно, так правдиво, что я желаю удачи каждому, кто отдаётся ему...

В. Гёте

Природа никогда не заботилась о том, чтобы законы, которые ею управляют, были удобны для понимания.

Л.Н. Арцимович