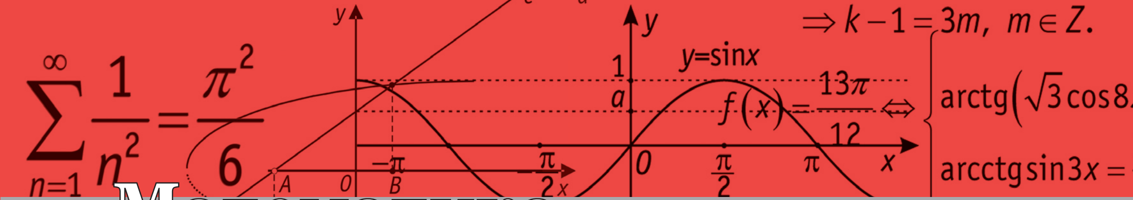


Корнеев Владимир Фёдорович
Учитель математики, пенсионер, г. Дрогобыч.

Метод оценок для решения уравнений и неравенств

Метод оценок – нестандартный метод решения уравнений и неравенств, который часто встречается при решении некоторых заданий школьных и вузовских олимпиад, а также заданий из ЕГЭ (в основном в части С) и незаслуженно обделён вниманием школы.

Основная идея метода оценок состоит в том, чтобы найти мажоранту (миноранту) некоторой функции. Мажорантой (минорантой) функции $f(x)$ на заданном промежутке называется такое число M, что $f(x) \le M$ ($f(x) \ge M$ соответственно) для всех x из данного промежутка. Само слово мажоранта (миноранта) происходит от французского *majorer* (*minorer*), что в переводе означает «преувеличивать» («преуменьшать»).

Пусть мы имеем уравнение

$$f(x) = g(x)$$

или неравенство

$$f(x) \le g(x)$$

и существует такое число M, что для любого x из области определения данных функций $f(x) \ge M$ и $g(x) \le M$ (обращаем внимание на то, что меньшая функция ($f(x)$) должна быть не меньше миноранты, а большая функция ($g(x)$) должна быть не больше мажоранты). Тогда исходное уравнение (неравенство) равносильно системе неравенств

$$M \le f(x) \le g(x) \le M,$$

что равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = M, \\ g(x) = M \end{cases} \Rightarrow \quad f(x) = g(x) = M.$$

Уравнения и неравенства решаются совершенно одинаково, главное в

подобных задачах – увидеть наличие мажоранты (миноранты).

Можно попробовать применить метод оценок в следующих случаях:

1) задано смешанное уравнение (или неравенство), т. е. в задании есть разнородные функции;

2) входящие в уравнение (неравенство) функции имеют сложный, трёхэтажный или пугающий вид;

3) в одной части уравнения (неравенства) стоят ограниченные функции, а в другой вполне конкретные числа;

4) переменных в задании больше, чем уравнений или неравенств.

Метод оценок требует умения оперировать такими понятиями, как функция и её свойства (монотонность, ограниченность, экстремумы и др.), производная, среднее арифметическое, среднее геометрическое, а также знания некоторых нестандартных неравенств и тождеств.

Применение метода оценок значительно сокращает и упрощает решение задач. Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Решить уравнение

$$\cos 4x - \cos 2x = \sqrt{5 - \sin^2 3x}.$$

Решение. Оценим каждую часть уравнения:

$$f(x) = \cos 4x - \cos 2x,$$

$$g(x) = \sqrt{5 - \sin^2 3x}.$$

$$-1 \le \cos 4x \le 1, \quad -1 \le -\cos 2x \le 1,$$

$$-2 \le f(x) \le 2.$$

$$-1 \le -\sin^2 3x \le 0, \quad 4 \le 5 - \sin^2 3x \le 5,$$

$$2 \le \sqrt{5 - \sin^2 3x} \le \sqrt{5}, \quad g(x) \ge 2.$$

Получаем следующую систему:

$$2 \le g(x) = f(x) \le 2, \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} \cos 4x - \cos 2x = 2, \\ \sqrt{5 - \sin^2 3x} = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 4x = 1, \\ \cos 2x = -1, \\ \sin^2 3x = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ 2x = \pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}, \\ 3x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi m, \ m \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Используя единичную окружность, получаем решение уравнения

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi l, \ l \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi l, \ l \in \mathbb{Z}.$

Пример 2. Решить уравнение

$$\sqrt{4 - x} + \sqrt{x - 2} = x^2 - 6x + 11.$$

Решение. Оценим каждую часть уравнения:

$$f(x) = \sqrt{4 - x} + \sqrt{x - 2},$$

$$g(x) = x^2 - 6x + 11.$$

Найдём область определения $f(x)$:

$$D(f): \begin{cases} 4 - x \ge 0, \\ x - 2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le 4, \\ x \ge 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D(f) = [2; 4].$$

Далее найдём мажоранту $f(x)$ с помощью производной:

$$f'(x)=\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{x-2}\right)'=$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{4-x}}+\frac{1}{2\sqrt{x-2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{x-2}}{2\sqrt{(4-x)\cdot(x-2)}}.$$

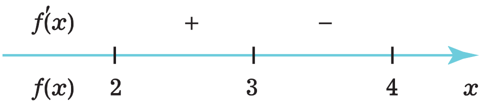
Область определения $D(f')=(2;4)$.

Найдём критические точки $f(x)$:

$$\sqrt{4-x}-\sqrt{x-2}=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 4-x=x-2 \;\Rightarrow\; x=3.$$

Так как $3\in D(f)$ и $f'(3)=0$, получаем, что $x=3$ – критическая точка $f(x)$. Функция $f(x)$ в левой части уравнения непрерывна и на отрезке $[2;4]$ имеет единственный экстремум. В нашем случае



$$\max_{[2;4]} f(x)=f(3)=2 \;\Rightarrow\; f(x)\le 2.$$

Оценим правую часть уравнения, выделяя полный квадрат:

$$g(x)=x^2-6x+11=(x-3)^2+2,$$

$$D(g)=\mathbb{R},\quad g(x)\ge 2.$$

Таким образом, получили

$$\begin{cases} f(x)\le 2,\\ g(x)\ge 2\end{cases} \Rightarrow\; f(x)=g(x)=2.$$

То есть решением уравнения будет число $x=3$.

Ответ. $x=3$.

Несмотря на то, что способ нахождения наибольшего и наименьшего значений с помощью производной достаточно громоздкий, иногда он бывает единственно возможным. Поэтому владеть им необходимо и полезно.

Пример 3. Найти множество значений функции

$$y=\frac{9}{\pi}\arccos\frac{3\sqrt{2}+\sin x-\cos x}{4\sqrt{2}}.$$

Решение. Применим метод оценок. Для этого, используя основные свойства тригонометрических функций, преобразуем аргумент арккосинуса и оценим получившуюся функцию:

$$\frac{3\sqrt{2}+\sin x-\cos x}{4\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(3+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(3+\cos\frac{\pi}{4}\sin x-\sin\frac{\pi}{4}\cos x\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(3+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

$$-1\le \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\le 1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\le 3+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\le 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\le \frac{1}{4}\left(3+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)\le 1.$$

Так как функция $y=\arccos x$ монотонно убывает на всей области определения, то навешивая арккосинус на последние неравенства, знак неравенств меняем на противоположный:

$$0\le \arccos 1\le$$

$$\le \arccos\left(\frac{1}{4}\left(3+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)\le$$

$$\le \arccos\frac{1}{2}\le\frac{\pi}{3};$$

$$0\le\frac{9}{\pi}\arccos\left(\frac{1}{4}\left(3+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)\le 3,$$

$$\text{или}\qquad 0\le y\le 3.$$

Ответ. $y\in[0;3]$.

Пример 4. Решите неравенство

$$\sqrt{16-\ (5x+2)^2}\ \ge 4+\cos^2\frac{15\pi x}{4}.$$

Решение. Найдём область допустимых значений переменной x:

$$16-(5x+2)^2\ge 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(4-5x-2)(4+5x+2)\ge 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(2-5x)(6+5x)\ge 0\ \Rightarrow x\in[-1,2;0,4].$$

Оценим каждую часть неравенства:

$$f(x)=\sqrt{16-(5x+2)^2};$$

$$g(x)=4+\cos^2\frac{15\pi x}{4}.$$

$$16-(5x+2)^2\le 16\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=\sqrt{16-(5x+2)^2}\le 4.$$

$$0\le\cos^2\frac{15\pi x}{4}\le 1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\le 4+\cos^2\frac{15\pi x}{4}\le 5\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\le g(x)\le 5\Rightarrow g(x)\ge 4.$$

Исходное неравенство возможно

неравенства равны 4, т. е. данное неравенство равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases}\sqrt{16-(5x+2)^2}=4,\\ 4+\cos^2\dfrac{15\pi x}{4}=4\end{cases}\Rightarrow x=-\frac{2}{5}=-0,4.$$

Ответ. $x=-0,4$.

Пример 5. Решите неравенство

$$(x^2+2x+2)\cdot\cos(x+1)\ge 2x^2+4x+3.$$

Решение. Так как

$$x^2+2x+2=(x+1)^2+1\ge 1,\qquad \forall x\in\mathbb{R},$$

разделим обе части неравенства на это выражение и получим равносильное неравенство

$$\cos(x+1)\ge\frac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\cos(x+1)\ge 1+\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\cos(x+1)\ge 1+\frac{(x+1)^2}{(x+1)^2+1}.$$

В такой форме удобно оценить обе части неравенства, используя простейшие свойства входящих функций:

$$f(x)=\cos(x+1),$$

$$g(x)=1+\frac{(x+1)^2}{(x+1)^2+1}.$$

$$-1\le\cos(x+1)\le 1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1\le f(x)\le 1\ \Rightarrow f(x)\le 1.$$

$$1+\frac{(x+1)^2}{(x+1)^2+1}\ge 1\Rightarrow g(x)\ge 1,$$

$$1\le g(x)\le f(x)\le 1.$$

Получаем равносильную систему уравнений:

$$\begin{cases}\cos(x+1)=1,\\ 1+\dfrac{(x+1)^2}{(x+1)^2+1}=1\end{cases}\Rightarrow x=-1.$$

Ответ. $x=-1$.

Пример 6. При каких значениях параметра a неравенство

$$\sqrt{x^2-10x+26}\geq\frac{a^2+2a-3}{a^2+2a-8}$$

верно для всех значений x?

Решение. Пусть

$$g(x)=\sqrt{x^2-10x+26},$$

$$f(a)=\frac{a^2+2a-3}{a^2+2a-8},$$

тогда

$$f(a)\leq g(x).$$

Оценим каждую функцию, предварительно преобразуя данные выражения:

$$g(x)=\sqrt{x^2-10x+26}=\sqrt{(x-5)^2+1}.$$

$$\begin{cases}D(g):\;\; x(-\infty;+\infty),\\ E(g):\;\; y(1;+\infty]\end{cases}\Rightarrow\; g(x)\geq 1.$$

$$f(a)=\frac{a^2+2a-3}{a^2+2a-8}=\frac{(a^2+2a-8)+5}{a^2+2a-8}=$$

$$=1+\frac{5}{a^2+2a-8}=1+\frac{5}{(a+1)^2-9}.$$

Исходное неравенство будет верно для всех x при тех значениях a, при которых $f(a)\leq 1$:

$$1+\frac{5}{(a+1)^2-9}\leq 1\Rightarrow\frac{5}{(a+1)^2-9}\leq 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(a+1)^2-9<0\Rightarrow(a+1)^2<9\Rightarrow$$

$$\Rightarrow|a+1|<3\Rightarrow -3<a+1<3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4<a<2\Rightarrow a\in(-4;2).$$

Ответ. $a\in(-4;2)$.

Пример 7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$\frac{a-(2^x+2\sqrt{6}\cdot 2^{-x}-5)}{(3\cdot\sin\sqrt{x-1}-4)-a}\leq 0$$

не имеет решений.

Решение. В данном примере оценим сначала выражения в скобках:

$$f(x)=2^x+2\sqrt{6}\cdot 2^{-x}-5 \quad \text{и}$$

$$g(x)=3\cdot\sin\sqrt{x-1}-4\quad \text{при}\quad x\geq 1:$$

$$-3\leq 3\cdot\sin\sqrt{x-1}\leq 3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -7\leq 3\cdot\sin\sqrt{x-1}-4\leq -1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -7\leq g(x)\leq -1.$$

Для оценки $f(x)$ используем неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\frac{p+q}{2}\geq\sqrt{pq},$$

или $p+q\geq 2\sqrt{pq}$.

Полагая

$$p=2^x,\;\; q=2\sqrt{6}\cdot 2^{-x},$$

$$p+q\geq 2\sqrt{2^x\cdot 2\sqrt{6}\cdot 2^{-x}}=$$

$$=2\sqrt{2\sqrt{6}}=2\sqrt[4]{24}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)\geq 2\sqrt[4]{24}-5.$$

Так как $\sqrt[4]{24}>\sqrt[4]{16}=2$, получаем

$$f(x)\geq 2\sqrt[4]{24}-5\geq -1\;\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_{\text{наим}}=2\sqrt[4]{24}-5\geq -1=g_{\text{наиб}}.$$

Возвращаемся к исходному неравенству

$$\frac{a-f(x)}{g(x)-a}\leq 0,$$

или

$$\frac{a-f(x)}{a-g(x)}\geq 0.$$

По условию это неравенство должно быть ложно для всех x, что возможно тогда и только тогда, когда

$$g_{\text{наиб}} \le a < f_{\text{наим}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 \le a < 2\sqrt[4]{24} - 5.$$

Ответ. $-1 \le a < 2\sqrt[4]{24} - 5$.

Пример 8. Решите неравенство

$$x^{1005} + \frac{2010}{\sqrt{x}} \le 2011.$$

Решение. При решении данного неравенства удобно использовать классическое неравенство Коши, известное школьникам как неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n},$$

$$\forall a_i \ge 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

причём равенство достигается только в том случае, когда

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n.$$

Преобразуем левую часть данного неравенства, рассматривая второе слагаемое как сумму 2010 дробей $\frac{1}{\sqrt{x}}$, а всю левую часть как сумму из 2011 слагаемых, которую (используя неравенство Коши) заменим на среднее геометрическое:

$$x^{1005} + \frac{2010}{\sqrt{x}} =$$

$$= x^{1005} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{x}} \ge$$

$$\ge 2011 \cdot \sqrt[2011]{x^{1005} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} =$$

$$= 2011.$$

Получаем, что левая часть исходного неравенства больше либо равна 2011. Поэтому нам нужно решить равенство

$$x^{1005} + \frac{2010}{\sqrt{x}} = 2011.$$

Поскольку равенство среднего геометрического и среднего арифметического возможно только при равенстве входящих элементов, получаем:

$$x^{1005} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow x = 1.$$

Решение единственное, так как во всех других случаях, кроме $x = 1$, левая часть исходного неравенства будет больше 2011.

Ответ. $x = 1$.

Приведённые примеры показывают, что метод оценок не требует специфической подготовки и каких-то особенных навыков, но зато требует умения обобщать и анализировать. Знание этого метода может быть полезно не только школьникам, но и студентам вузов различных специальностей.