Балашова Людмила Владимировна
Учитель математики ГОУ СОШ №327 ЮВАО г. Москвы. В 2002 году награждена знаком «Почётный работник общего образования РФ».

Метод областей в задачах с параметром

Статья является логическим продолжением статьи «Три беседы о параметрах», напечатанной в «Потенциале» №7, 2009. Как и прежде, в живой форме диалога учителя и ученика объясняются методы решения задач с параметром, на этот раз графические.

Напомним читателям, что в прошлый раз мы с вами попытались развеять миф о том, что задачи с параметрами – это что-то ужасное, чего надо бояться как огня. На простых примерах мы с вами увидели, что такое параметр и каков его смысл в задачах, научились решать несложные уравнения и неравенства с параметром. Сегодня наш любознательный ученик готов к освоению графических методов, а именно – метода областей. Предоставим вначале слово учителю.

Учитель. Напомню, что во всех разобранных задачах параметр рассматривался как фиксированное, но независимое число. Между тем с формальной точки зрения параметр – это переменная, причём равноправная с другими, присутствующими в задаче. К примеру, при таком взгляде на параметр формы $f(x;\ a)$ задают функции не с одной (как мы изучаем в школе), а с двумя переменными (которые мы будем изучать в институте). Подобная интерпретация, естественно, формирует ещё один метод решения задач с параметром.

В зависимости от того, какая роль отводится параметру в задаче (неравноправная или равноправная с переменной), можно соответственно выделить два основных графических приёма: первый – построение графического образа на координатной плоскости $(x;\ y)$, второй – на $(x;\ a)$.

Говоря о графических методах, невозможно обойти одну проблему, «рождённую» практикой вступительных экзаменов. Это вопрос о строгости решения, о законности решения, основанного на графических соображениях.

Ученик. Но мы же не только строили, но и проводили некоторые вычисления! Картинка нам только помогала выбрать нужные данные, а не делать всё подряд.

Учитель. Верно. Графический метод – всего лишь одно из средств наглядности. Наглядность может быть обманчива, поэтому необходимо результат, «прочитанный» с рисунка, подкреплять аналитически. Это нужно для подтверждения правоты выбранного пути решения данной задачи. И ещё один совет: для решения задач с параметром графическим методом надо обратить внимание на построение таких графиков $y = f(x+a)$, $y = f(x)+a$, $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, $y = f(kx)$, $y = kf(x)$ путём преобразования графика функции $y = f(x)$.

Ученик. Я повторил построение всех этих графиков, принёс цветные карандаши и готов к решению новых заданий графическим методом.

Учитель. Хорошо. Давай попробуем выполнить такое задание.

1. При всех значениях параметра k решить неравенство:

$$\log_3(x-2k+1)+2 \le \log_3(x+k-5).$$

Ученик. Задачу будем решать графически. Попробую рассуждать. Итак, неравенство логарифмическое, под знаком логарифма должны стоять положительные выражения, значит, имеем систему двух условий:

$$\begin{cases} x-2k+1>0, \\ x+k-5>0. \end{cases}$$

Ой! А что же нам выражать: x или k?

Учитель. В какой плоскости мы будем решать задачу? Являются ли k и x равноправными переменными?

Ученик. x и k равноправные переменные. Решать буду в плоскости xOk. Поэтому выражать буду k через x.

Имеем систему двух условий:

$$\begin{cases} k<(x+1)/2, \\ k>-x+5. \end{cases}$$

А как теперь строить? У меня стоит знак неравенства…

Учитель. Молодец! Вот мы и подошли с тобой к «методу областей».

Ученик. Я понял! Если у нас есть неравенство, то будем использовать метод областей?

Учитель. Верно. Сначала нам надо построить границу заданной области, для этого заменим знак неравенства знаком равенства. Получим $k=(x+1)/2$ и $k=-x+5$. Так как в каждом из наших неравенств знак строгий, то границу удобно изображать пунктиром (она не будет входить в нужную нам область). Построенная прямая «разбивает» координатную плоскость на две полуплоскости. Нам надо выбрать одну из них в соответствии с условием задачи. Как это можно сделать?

Ученик. Мне надо подумать. (Задумывается на некоторое время.) Кажется, я придумал! Можно выбрать точку из какой-нибудь полуплоскости и подставить её координаты в неравенство. Если после подстановки неравенство превратится в верное числовое неравенство, то часть координатной плоскости, из которой мы выбрали точку, нам и будет нужна.

Учитель. Правильно. Теперь мы заштрихуем полученную область.

Ученик. Аналогично поступим со вторым неравенством?

Учитель. Конечно. А чтобы найти множество точек, удовлетворяющих системе неравенств, необходимо выделить общую часть.

Ученик. Это та часть, где есть обе «штриховки»? Я думаю, надо найти аналитически точки пересечения графиков данных функций, решив уравнение $(x+5)/2=-x+5$.

Получается точка с координатами (3; 2).

Учитель. Хорошо, ты рассуждаешь абсолютно правильно. Продолжай.

Ученик. Решаем логарифмическое неравенство, забыв на время о параметре:

$$\log_3(x-2k+1)+2\le\log_3(x+k-5),$$

$$\log_3(x-2k+1)+\log_3 9\le\log_3(x+k-5).$$

Используя свойства логарифмов, получаю неравенство:

$$\log_3 9(x-2k+1)\le\log_3(x+k-5).$$

Учитывая, что логарифмическая функция с основанием три монотонно возрастает, получим неравенство, в котором не будет логарифмов:

$$9(x-2k+1)\le x+k-5.$$

Раскрою скобки, приведу подобные слагаемые и получу неравенство относительно k:

$$k\ge(8x+14)/19.$$

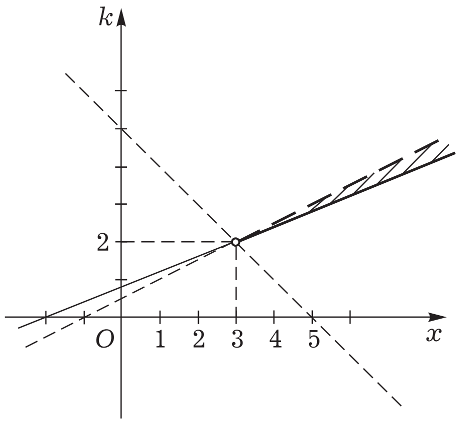
Буду строить границу $k=$ $=(8x+14)/19$ сплошной линией.

Ой! Как же это строить на бумаге без клеточек? Надо что-то придумать. Ага, посмотрим, проходит ли эта прямая через точку (3; 2). Подставив координаты в уравнение, видим, что получается верное числовое равенство. Ура! Проходит! Значит, надо найти ещё одну точку. Если $x=0$, то $k=14/19$. Это число больше 0,5, но меньше 1, поэтому поставим точку «выше» точки пересечения прямой $k=(x+1)/2$ с осью параметра. Проведём границу сплошной линией и выберем... Я думаю, надо выбрать часть плоскости, которая расположена выше построенной прямой.

Учитель. Всё ли мы учли?

Ученик. Надо не забыть про область допустимых значений. Поэтому получим плоский угол, одна сторона которого – сплошная, а другая сторона и вершина – пунктирная линия и «дырка» соответственно.

Теперь, как и в методе сечений, надо проводить прямые вида $k=\text{const}$ и смотреть, как эти прямые пересекают выделенную нами область. Однако у нас получатся не точки, а целые интервалы.



Учитель. Молодец! Теперь попробуй записать ответ.

Ученик. Я бы записал ответ следующим образом.

Ответ: при $k\le2$, решений нет; при $k>2$, $(2k-1;(19k-14)/8]$.

Я выразил значения переменной x из уравнений прямых.

Учитель. Хорошо. Ответ получен верный. Но давай ещё раз просмотрим решение. Возможно, его можно упростить.

Ученик. (Просматривает решение с начала.) Я понял! Если не сразу строить условия на выражения, стоящие под знаком логарифма, а начать решать неравенство, мы увидим, что второе неравенство системы будет выполняться автоматически (с использованием свойств неравенств). Поэтому можно не строить соответствующую ему область.

Учитель. Абсолютно верно. Поэтому не всегда надо сразу строить все условия. Иногда при решении задачи эти условия не пригодятся, так как автоматически выполняются (как у нас).

Ученик. Ой, как здорово! Я сам решил такую сложную задачу. Задание такого типа может «встретиться» на Едином государственном экзамене?

Учитель. Конечно. Это задача части С. Задачи такого уровня сложности встречались на вступительных экзаменах в Государственный университет управления (ГУУ). Данная задача стояла на последнем месте в билете, т. е. являлась самой сложной в нём.

Давай попробуем теперь решить систему неравенств с параметром. Готов?

Ученик. Да.

Учитель. Тогда вот тебе задание.

2. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases}(x-y)/(x+3y)\ge 0,\\ y(y-2)+x^2\le(a+1)(a-1)\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение? Сначала ответь на такой вопрос: как понять задание?

Ученик. Я думаю, что это задание можно переформулировать так: при каких значениях параметра a система имеет решения?

Учитель. Верно.

Ученик. Мы тоже будем строить?

Учитель. Конечно.

Ученик. Ой! Как же это построить? Попробую рассмотреть каждое неравенство отдельно.

Первое неравенство можно заменить системой двух условий:

$$\begin{cases}(x-y)(x+3y)\ge 0,\\ x+3y\ne 0.\end{cases}$$

Если бы было неравенство с одной переменной, я применил бы метод интервалов. А здесь что делать?

Учитель. Мы с тобой будем применять метод интервалов, только не на прямой, а на всей координатной плоскости.

Ученик (с восторгом). Ничего себе! Значит, метод интервалов можно применять к целой плоскости?

Учитель. Да.

Ученик. Сначала надо строить границы. У нас их две: $y=x$ (сплошная) и $y=-x/3$ (пунктир).

Они разбивают координатную плоскость на четыре части. Надо выяснить, какие две из них нужны нам.

Учитель. Это зависит от знаков неравенств.

Ученик. Знаки будем определять, подставляя точку из каждой части в неравенство. Удобнее всего выбирать точки, лежащие на осях координат (у этих точек одна из координат равна нулю, поэтому вычисления значительно упрощаются). Выберу точку с координатами (1; 0) и подставлю её координаты в первое неравенство. После подстановки получаем верное числовое неравенство, значит, данная точка входит в нужную нам область. А мы имеем право, как в обычном методе интервалов, чередовать знаки?

Учитель. Молодец! Конечно, имеем. Если у нас получаются такие простые области. Если чертёж будет более сложным, необходимо выбирать области подстановкой точек.

Ученик. У нас получились два плоских вертикальных угла. Теперь построим множество точек, удовлетворяющих второму неравенству. Сначала надо упростить данное выражение и выяснить вид границы соответствующего множества. Раскроем скобки и получим:

$$x^2+y^2-2y \le a^2-1.$$

Так... (задумался). Если переменные x и y имеют вторые степени, то соответствующее уравнение похоже на уравнение окружности. Перенесём число 1 в левую часть и выделим полные квадраты. Имеем неравенство: $x^2+(y-1)^2 \le a^2$. Границей является линия вида $x^2+(y-1)^2=a^2$ (сплошная). У меня возник вопрос: всегда ли это будет окружность?

Учитель. Хороший вопрос. Давай рассматривать различные значения параметра a и рассуждать.

Ученик. Попробуем. Я думаю, надо приравнять a к нулю. В этом случае будем иметь равенство $x^2+(y-1)^2=0$. Это будет точка A (0; 1).

Учитель. Молодец! Дальше.

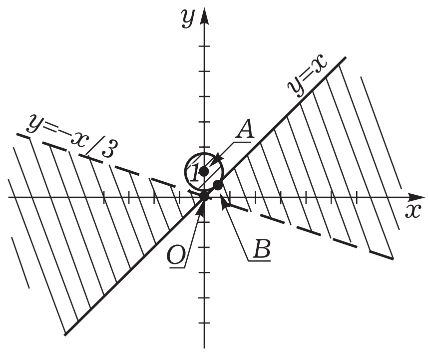
Ученик. Если a не равно нулю, то оно может быть положительным или отрицательным числом. Значит, если я хочу говорить об окружности радиуса a, мне нельзя брать отрицательные числа. Как же этого избежать? Давайте поставим модуль a, и в этом случае радиус всегда будет положительным. Правильно?

Учитель. Да.

Ученик. Итак, граница данной области – окружность с центром (0; 1) и радиусом $|a|$. В соответствии со знаком неравенства, мы должны выбрать внутреннюю часть плоскости, ограниченную построенной окружностью. Это круг! Теперь возникает вопрос о влиянии параметра на этот круг.

Учитель. Каково твоё мнение?

Ученик. Мне кажется, что в зависимости от параметра a этот круг будет либо больше, либо меньше. Он «пульсирует», так как значение параметра a входит в радиус круга.



Учитель. Верно. А теперь давай вспомним, какую задачу мы решаем.

Ученик. Систему. Вернее, мы пытаемся ответить на вопрос о наличии решений у данной системы (т. е. о совместности системы). Конечно, круг может иметь такой маленький радиус, что общих точек с выделенной областью не будет. Найдём момент «встречи» окружности и..., кажется, первой прямой, с которой «встретится» окружность, будет прямая $y=x$. Надо найти момент касания окружности и прямой. Так как радиус перпендикулярен касательной к окружности, опустим из точки A перпендикуляр на прямую $y=x$. Основание этого перпендикуляра обозначим буквой B. Тогда треугольник AOB будет прямоугольный и равнобедренный, т. к. прямая $y=x$ – биссектриса первого координатного угла. Гипотенуза равна единице, тогда катеты равны $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Значит, в момент касания радиус окружности равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$, и появятся решения системы (одно решение). А при радиусе большем $\frac{\sqrt{2}}{2}$ система будет уже иметь не одно, а целое множество решений. Так как радиус равен $|a|$, значит, при $|a| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ данная система будет иметь решения.

Итак, **ответ:** если

$$a \in (-\infty; \frac{\sqrt{2}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty),$$

то система имеет решения.

Учитель. Молодец! Рассуждал правильно и решил поставленную задачу.

Ученик. Здорово! Хочу дома потренироваться в решении таких задач.

Учитель. Хорошо. Могу предложить тебе несколько интересных задач такого типа.

3. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x(x-4)+y^2 \leq (a-2)(a+2), \\ (x+y)(x+2y) \leq 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

4. Найти все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} 2|x|+|y| \leq 6, \\ y^2+x^2-2x \geq 1-a \end{cases}$$

имеет решения.

5. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^2+y^2-2y \leq a, \\ \sin x = \sin y \end{cases}$$

совместна?

Однако хочу обратить твоё внимание на задачу 5. Для построения графика второго уравнения необходимо использовать тригонометрические формулы. График имеет очень интересный и необычный вид. Если не будет получаться построение этого графика, можно упростить задание, заменив второе уравнение на уравнение вида $y=x$. При этом график изменится, а ответ нет. Если не получится решение, то в следующий раз начнём беседу именно с этого примера.

Ученик. Я постараюсь построить график сам.

Учитель. Я думаю, что на сегодня новой информации уже более чем достаточно. Остальное в следующий раз. Я думаю, надо познакомиться и с аналитическими методами решения задач с параметрами.

Ученик. Спасибо за беседу. Буду с нетерпением ждать следующего раза.