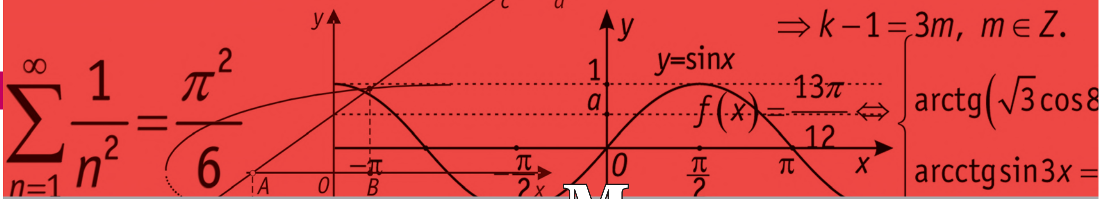


Гашков Сергей Борисович
*Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры дискретной математики
механико-математического факультета МГУ
им. М.В. Ломоносова*

Математика в обыденной жизни

Как известно, физика есть везде. На кухне, в ванной, в выдувании мыльных пузырей. На каждую из этих тем давно написаны прекрасные книги и не одна.

Но и математика тоже есть везде. Есть много интересных, а часто и трудных задач, возникающих в обыденной жизни. Надо только захотеть их увидеть. Далее приводятся (как правило без решений) некоторые задачи такого рода с короткими комментариями. Конечно, не нужно принимать эти приложения математики к быту слишком серьезно.

Арифметика в магазине

Всесоюзный староста (председатель Верховного Совета СССР) Михаил Иванович Калинин на встрече со школьниками и учителями говорил, что математика нужна всем – и продавцу в магазине, и рабочему на заводе.

Продавцу в то время (и позже) нужна была в основном арифметика – он вычислял стоимость покупки и отсчитывал сдачу. Но сейчас суммирует числа в чеке сам кассовый аппарат, а если это приходится делать кассиру, то он использует калькулятор. Школьники тоже пользуются калькуляторами и многие из них полагают, что арифметика им не нужна. Но они ошибаются. Арифметика может и не так уж нужна продавцу, но полезна покупателю.

Представьте себе, что вы уже собираетесь выйти из магазина и направляетесь к кассе.

Кассир, просуммировав на калькуляторе стоимости ваших покупок, сообщил вам сумму:
$2356 + 389 + 287 + 1657 + 932 = 5721$.

Как быстро проверить, не ошибся ли он (точнее, не пытается ли он вас обсчитать, как говорили в докомпьютерное время)?

Если у вас есть калькулятор, то нет проблем, кроме одной – неудобно явно выказывать недоверие (возможно) честному человеку. Но обычно его в кармане нет. Конечно, есть калькулятор в смартфоне и даже в простейшем кнопочном мобильном телефоне, но он не всегда удобен в использовании и вы потратите больше времени на возню с ним, чем при выполнении некоторых простых вычислений в уме. Разумеется, складывать многозначные числа не нужно – скорее всего, вы ошибетесь грубее кассира.

Он ведь складывает числа калькулятором и знает точный ответ, но может его вам сообщить, увеличив цифру в одном разряде.

Ошибку в младшем разряде найти легко.

Достаточно сделать проверку «чет-нечет». Замечаем, сколько из ваших чисел нечетных, и если их нечетное количество, то сумма нечетна, в противном случае она четна.

Заменяя в приведенном примере четные числа на нуль, а нечетные на единицу, получаем результат

$$0 + 1 + 1 + 1 + 0 = 1$$

(знающие алгебру сразу скажут, что выполнялось сложение по модулю два).

Но ошибку на 2 рубля или другое четное число так заметить нельзя.

Чуть сложнее выполняется «проверка по модулю пять». Заменяя последние цифры в складываемых числах на их остатки от деления на пять (фактически надо это делать только для цифр, начиная с пяти по правилу: пять заменяем на нуль, шесть – на единицу и т.д.) выполняем сложение, не делая переносов в старшие разряды, и вычисляя в сумме только младшую цифру, которую заменяем (если нужно) на остаток от деления на пять (как объяснялось строчкой выше):

$$1 + 4 + 2 + 2 + 2 = 11 = 1.$$

От порядка выполнения операций результат не зависит, но все же чуть быстрее после каждого сложения заменять его результат, если он больше четырех, на остаток от деления на пять. При таких вычислениях никогда не появятся двузначные числа.

Но ошибку на пять рублей (или любое число, кратное пяти) так заметить нельзя. Однако, если выполнить обе указанные проверки, то любая ошибка в младшем разряде обнаруживается (потому, что ошибка на пять рублей улавливается проверкой на четность).

Кассиры обычно делают ошибку во втором, а иногда и в старших разрядах, и тем самым сумму увеличивают на 10, 20, и т.д, или, например, на 100 или 200.

Такую ошибку можно заметить с помощью проверки по модулю девять. Действительно, любое число с нулями на конце в десятичной записи не может делится на девять, кроме случаев ошибки на 90, 900 и т.д. рублей.

Проверка по модулю девять (это просто признак делимости на девять) чуть более сложна. Рассмотрим ее на том же примере

$$2356 + 389 + 287 + 1657 + 932 = \mathit{5721}$$

Находим сумму всех цифр всех слагаемых слева и ее остаток деления на 9.

Докажите, что этот остаток должен быть равен остатку от деления на девять от всей суммы.

Быстрее всего это делать последовательным сложением по модулю 9, то есть после прибавления очередного числа полученный результат заменяем на остаток от деления на 9, а для этого достаточно вычесть из него 9, если он больше 9.

При таких вычислениях не возникают двузначные числа (точнее, они возникают и тут же исчезают).

Любопытно, что использование отрицательных цифр позволяет упростить вычисления и полностью избежать появления двузначных чисел. Заменим в данной сумме все цифры, большие 4, на отрицательные, но равные им по модулю 9 (то есть цифру 5 заменим на (-4), цифру 6 - на (-3), цифру 7 - на (-2), цифру 8 - на (-1)).

Потом последовательно выполняем сложения, заменяя сразу полученные суммы на равные им по модулю 9 отрицательные числа, если эти суммы были больше 4.

Это все надо выполнить в уме, пока вы идете к кассе.

Если вам назвали сумму 5721, то вы вычисляете ее сумму цифр по модулю девять $5 + 7 + 2 + 1 = 3 + 3 = 6$, и замечаете ошибку как минимум в одном разряде (причем не в младшем, как показали предыдущие проверки).

Обычно ошибка бывает только в одном разряде и только на единицу (то есть сумма увеличивается на 10 или 100 рублей). Такую ошибку быстрее уловить, если выполнять проверку по модулю три.

Докажите, что остаток от деления числа на три равен остатку от деления на три суммы его цифр.

Поэтому вместо сложения цифр по модулю девять можно их складывать по модулю три.

Здесь также ускорить вычисления помогает использование отрицательных цифр, а именно, замена 2 на (-1).

Если вам назвали сумму 5721, вы вычисляете в уме $(2 + 1) + (2 + 1) = 0$ (по модулю три) и обнаруживаете ошибку.

Планиметрия при сборке мебели

Вы вернулись из магазина и увидели, что вам привезли давно заказанный сборный шкаф в форме прямоугольного параллелепипеда, и его надо срочно собирать из прямоугольных древесно-стружечных плит.

Вы составили из четырех плит каркас шкафа (боковые стенки, дно и крышка), вставили крепежные детали, но оказалось, что пока они плотно не затянуты, каркас немного шатается, потому что прямоугольник – фигура нежесткая (нежесткость означает, что если он составлен из четырех стержней на шарнирах, то легко может менять форму, превращаясь в параллелограмм).

Для окончательного закрепления конструкции надо, чтобы углы в нужных местах были прямыми. Но точно измерять углы затруднительно, не угольник же использовать, да и он нужной точности не дает.

А решение очень просто – надо измерить рулеткой диагонали получившегося параллелограмма и пошевелив его, добиться их равенства. Согласно школьной теореме тогда он и станет прямоугольником. Точность измерения отрезков рулеткой гораздо выше, чем точность измерения углов.

Автору историю о сборке шкафа рассказал приятель, который позвал на помощь соседа, занимающегося как раз доставкой и сборкой мебели. Он и помог ему собрать шкаф указанным способом.

Интересно, что сосед понятия не имел об этой теореме, но применять ее умел.

Если верить книгам по истории математики, проблему конструирования прямых углов древние египтяне решали с помощью веревки, связанной в кольцо, на которой на равных расстояниях друг от друга были завязаны 12 узлов.

Натянув ее, чтобы приняла форму треугольника с вершинами в трех узлах и на его сторонах было по 3,4 и 5 узлов соответственно, египетские мастера получали в этом треугольнике прямой угол согласно равенству 9+16 = 25 и теореме Пифагора (которую они знали еще до Пифагора, хотя и не умели ее доказывать, а скорее всего, просто не понимали, зачем это нужно). Впрочем, в некоторых книгах утверждается, что нет никаких доказательств, что египтяне использовали этот прием, и это не более чем возникший в одной из книг миф.

Математика на кухне

После сборки шкафа вы направились на кухню напечь блинов к масленице.

Там перед вами возникла такая задача.

На электрической блиннице можно одновременно печь m блинов (у блина жарится одна сторона, но потом их можно переворачивать). За какое наименьшее число включений блинницы можно испечь n блинов?

Потом вы собрались приготовить пельмени. Раскатали кусок теста и выдавливаете из него заготовки для пельменей с помощью стакана. Какое наибольшее число заготовок можно получить из данного куска?

Уточним формулировку.

Какое максимальное число заготовок для пельменей можно получить из круглого куска диаметром 24 см. с помощью стакана с диаметром основания 8 см.?

Ответ: 7

Сформулируем несколько близких к ней задач на геометрическом языке.

Как в круге радиуса 1 поместить наибольшее число точек, чтобы все расстояния между ними были не меньше 1?

Можно ли в круге радиуса 1 разместить 7 точек так, чтобы все расстояния между ними были больше 1?

И наконец возникла еще проблема. Пришло больше гостей, чем вы предполагали, и срочно нужно *разделить 17 одинаковых прямоугольных пирожных «Птичье молоко» поровну между 20 гостями. Для этого, конечно, надо сделать по возможности меньшее число разрезов.*

Рассмотрите оба варианта задачи: когда можно разрезать одновременно несколько кусков одним взмахом ножа и когда это делать невозможно. Глазомер у вас абсолютно точный!

В первом варианте разрезаем все пирожные одним разрезом в отношении 17:3. При этом 17 гостей сразу получают по куску, а на троих остается 17 кусков по 3/20 части пирожного каждый. Дадим каждому по 5 кусков, остается 2 куска, которые можно разделить одним разрезом на 2 части каждый в отношении 1:2, тогда получим два куска по 1/10 части пирожного и два куска по 1/20 части, большие куски отдаем двоим, а третьему – оставшиеся 2 куска. Всего использовалось 2 разреза. Если пирожные можно резать только по одному, то число разрезов равно 17 + 2.

Стереометрия в школьном ранце

В понедельник младший брат собирается в школу и спрашивает: сколько равных карандашей можно поместить в пенал?

Если пенал имеет в сечении форму правильного треугольника (другими словами, он является правильной треугольной призмой), то кажется очевидным, что карандаши, а они имеют цилиндрическую форму, лучше всего помещать в пенал так, чтобы оси цилиндров были параллельны боковым ребрам призмы (но строго доказать это, скорее всего, непросто).

Тогда получаем задачу о размещении в треугольнике наибольшего числа равных кругов. Если сечение пенала квадратное или круглое, то возникает такая же задача для квадрата или круга. В случае, когда диаметр пенала в три раза больше диаметра карандаша, эта задача ничем не отличается от уже рассмотренной задачи о заготовке пельменей.

Если сторона правильного треугольника равна единице плюс квадратный корень из трех, какое наибольшее число кругов единичного диаметра в нем помещается?

Если сторона правильного треугольника равна двойке плюс корень из трех, какое наибольшее число кругов единичного диаметра в нем помещается?

Как в правильном треугольнике со стороной 2 поместить наибольшее число точек, чтобы все расстояния между ними были не меньше 1?

Можно ли в правильном треугольнике со стороной 2 разместить 5 точек так, чтобы все расстояния между ними были больше 1?

Если сторона квадрата равна 2, какое наибольшее число кругов диаметра 1 в нем помещается?

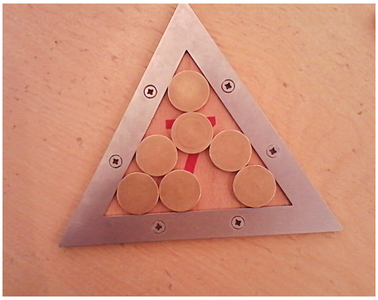
Можно ли в квадрате со стороной 1 разместить 4 точки так, чтобы расстояния между ними были больше 1?

Можно ли в квадрате со стороной единица плюс квадратный корень из двух разместить 5 кругов с диаметрами больше 1? Можно ли в этом квадрате разместить 5 кругов единичного диаметра?

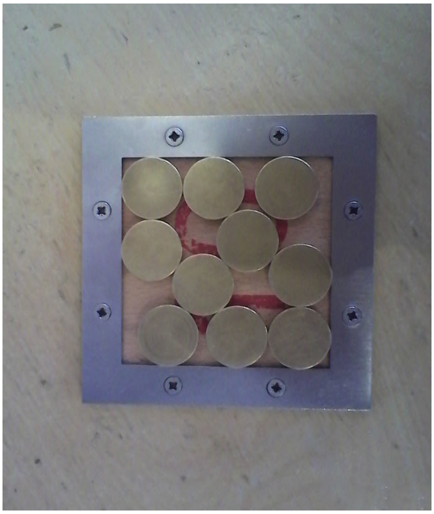
В случае, когда размеры кругов малы по сравнению с размерами фигуры, в которой они размещаются, то задача становится очень трудной и ее приходится решать экспериментально.

В Лейпциге автор посетил (по приглашению своего бывшего однокурсника Франка Рема) Inspirata – кабинет (или музей) занимательной математики, куда водят на экскурсии школьников. Там он сделал две следующие фотографии, имеющие прямое отношение к обсуждаемым вопросам.

Однако можно для данного круга, квадрата или треугольника найти предел, к которому стремится отношение его площади к площади максимально возможного количества



Карандаши в пенале с треугольным сечением



Карандаши в пенале с квадратным сечением

кругов диаметра d, помещающихся в нем, при стремлении d к нулю.

К этому пределу можно приблизиться, расположив круги так, чтобы каждый касался шести соседних. Тогда центры кругов образуют решетку, в которой расстояния между соседними точками будут одинаковы и направления от каждой точки решетки на соседние точки будут образовывать углы по 60 градусов. Такая упаковка кругов на плоскости является самой плотной. Хотя она известна с незапамятных времен, так же как и связанные с ней замощения плоскости равными правильными треугольниками и равными правильными шестиугольниками, ее максимальная плотность была доказана только в начале 20 века известным норвежским математиком Акселем Туэ.

Эту упаковку кругов можно было бы применять, например, для оптимизации рассадки клубней картофеля («геометрия на даче») так, чтобы расстояния между клубнями были не меньше некоторого заданного (иначе клубни будут мешать друг другу расти), а число посаженных клубней на участке было бы наибольшим. Но на практике это не слишком удобно даже при ручной посадке, поэтому обычно используется квадратно-гнездовой способ.

У читателя может возникнуть вопрос, почему стереометрия, а не планиметрия? А потому, что в следующий раз брат спросит, как засунуть в его ранец наибольшее число апельсинов, а это еще более трудная задача, хотя и известная со средневековых времен. Только тогда актуальным был вопрос, как загрузить в ящик наибольшее число пушечных ядер.

Такая же проблема для упаковки дробинок на практике решается путем многократного встряхивания ящика. Согласно известному принципу механики дробинки стараются принять положение, при котором центр тяжести ящика с дробью будет располагаться ниже всего.

Самая плотная упаковка равных шаров в пространстве была впервые описана в одной из книг знаменитого математика и астронома Иоганна Кеплера. Но доказательство ее максимальной плотности было найдено сравнительно недавно и занимает сотни страниц.

Вопрос о том, сколько равных шаров можно приложить к шару того же диаметра, чтобы они с ним соприкасались («поцелуйное число»), интересовавший Ньютона и Грегори (они даже спорили о величине этого числа), тоже оказался трудным, и был удовлетворительно решен только в 20-м веке.

Разумеется, математики стали интересоваться подобными вопросами и в многомерных пространствах. Например, «поцелуйное число» для четырехмерного пространства недавно было точно определено бывшим выпускником СУНЦ и мехмата МГУ Олегом Мусиным.

Занимательные истории из жизни физиков

Нильс Хенрик Давид Бор

Данная история произошла на квалификационном экзамене по физике в Копенгагене. Вопрос был следующий: «Объясните, как рассчитать высоту небоскрёба с помощью барометра?» Один из студентов ответил так: «Привяжите кусок прочной верёвки к основанию барометра, затем опустите барометр на верёвке с крыши небоскрёба так, чтобы он достал до земли. Длина верёвки и длина барометра в сумме дадут высоту небоскрёба». Высокооригинальный ответ настолько поразил преподавателя (в плохом смысле этого слова), что студент получил «неуд». Студент подал жалобу, утверждая, что его ответ был абсолютно точен, и университет попросил независимого судью решить дело. Судья установил, что решение было верным и достаточно точным, но студенту необходимо прийти и за шесть минут предоставить устный ответ, который показывал бы знание хотя бы основных принципов физики. В течение первых пяти минут студент сидел молча, собираясь с мыслями. Судья напомнил ему, что время подходит к концу, на что студент ответил, что у него есть несколько абсолютно точных вариантов решения, и он не знает, какой из них выбрать. Наконец студент сказал следующее: «Для начала, вы можете поднять барометр на крышу, перекинуть его через парапет и засечь время, за которое он достигнет земли. Высота здания в таком случае может быть рассчитана по формуле $H = gt^2/2$. К сожалению, барометр в таком случае мы потеряем. В случае, если стоит солнечная погода, вы можете измерить длину барометра, а затем вычислить отношение полученного числа к высоте его тени. Затем вы измеряете длину тени небоскреба, и нахождение решения будет возможно путём несложных арифметических вычислений. Но если вы хотите себя показать настоящим учёным, вы можете привязать барометр к верёвке и качать его, как маятник, с нижней точкой у земли и верхней – на уровне крыши небоскрёба. Высота находится путём вычисления разницы между силой гравитации $T = 2$ Пи (l/g). Если пожарная лестница находится на внешней стене небоскрёба, будет легче пройти её и вычислить длину небоскрёба в барометрах, затем, соответственно, умножив на длину прибора. Конечно, если вы – скучный сторонник консервативных методов, вы можете использовать барометр для измерения давления воздуха на крыше небоскрёба и на земле, перевести разницу в метры и получить искомое число. Но пока мы упражняем нашу силу ума в применении исключительно научных методов, несомненно, лучшим способом было бы постучать к швейцару и сказать ему: «Если вы хотите получить отличный новенький барометр, всего лишь скажите мне высоту этого небоскрёба». Этим студентом был Нильс Бор, единственный датский учёный, получивший Нобелевскую премию по физике!