Киугер Надежда Вячеславовна
Аспирантка Кабинета методики преподавания элементарной математики механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, педагог центра дополнительного образования детей «Дистантное обучение».

Малоизвестные способы умножения натуральных чисел

Большинство людей уверены, что единственным способом умножения натуральных чисел без использования калькулятора или компьютера является изученный в школе метод умножения «столбиком», что без знания таблицы умножения невозможно перемножить числа. Но, к счастью, они заблуждаются – существуют и другие способы нахождения произведения двух чисел.

Древним египтянам для перемножения двух натуральных чисел достаточно было уметь сравнивать, складывать, вычитать и умножать числа на 2. А делали они это так. На первой строчке в первой колонке они записывали число 1, а в другой колонке один из множителей. Следующая строчка получалась из предыдущей умножением чисел на 2. Так продолжалось до тех пор, пока в первой колонке не получалось число, превосходящее второй множитель. Далее второй множитель представлялся в виде суммы чисел, записанных в первом столбце, выделялись соответствующие строчки. Результат произведения получался сложением выделенных во втором столбце чисел. Рассмотрим пример нахождения произведения 17 и 21.

1	21 *
2	42
4	84
8	168
16	336 *
32	

$17=16+1$, отмечаем строчки, соответствующие 1 и 16. $17\times 21=21+$ $+336=357$. Секрет работы этого метода можно разгадать, зная о существовании двоичной системы счисления, а заключается он в том, что один из множителей представлялся в виде степеней двойки, а второй умножался на них. Для нашего примера объяснение выглядит так:

$$17\times 21=(16+1)\times 21=$$
$$=16\times 21+1\times 21=336+21=357.$$

Похожий способ умножения использовали русские крестьяне примерно два столетия назад. Найдём 13×18. Запишем 13 в первой колонке, а 18 – во второй. Далее каждое следующее число в первой колонке получаем из предыдущего делением на 2 и нахождением целой части результата. Во второй колонке каждое следующее число в два раза больше предыдущего. После того как в первом столбце получим 1, найдём в нём чётные числа и вычеркнем соответствующие им строки. Произведение 13 и 18 равно сумме оставшихся во втором столбце чисел:

13	18
~~6~~	~~36~~
3	72
1	144

$$18 + 72 + 144 = 234.$$

Как и метод древних египтян, «крестьянский способ умножения» базируется на двоичной системе счисления.

Представим число 13 в двоичной системе счисления. $13 = 1101_2 = 1\times 2^3 + +1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0$. Тогда $13\times 18 = =(1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0)\times 18 = 18\times \times 2^3 + 18\times 2^2 + 18\times 0\times 2^1 + 18\times 2^0$. Посмотрим, как это выражение взаимосвязано с алгоритмом умножения.

1-й столбец	Двоичная запись числа 13 (читается снизу вверх)	2-й столбец	2-й столбец в ином виде
13	1	18	18×2^0
6	0	36	18×2^1
3	1	72	18×2^2
1	1	144	18×2^3

Чётные числа в первом столбце алгоритма соответствуют нулевому разряду в двоичном представлении числа, а значит, не влияют на результат умножения, который, как видно из иной записи второго столбца алгоритма, равен сумме невычеркнутых в нём чисел.

Упражнение 1.

Докажите, что результат умножения «крестьянским способом» не зависит от порядка множителей.

Используя идею «крестьянского способа», можно рассмотреть метод «фибоначчиевого» умножения. Он основывается на представлении одного из множителей в фибоначчиевой системе счисления. Напомним, что фибоначчиева система – это смешанная система счисления на основе чисел Фибоначчи: $F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, \ldots, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ [1].

Например, число 17 в фибоначчиевой системе счисления представляется в виде: $17 = 100101_F = 13 + 3 + 1$, а число $19 = 101001_F = 13 + 5 + 1$.

Упражнение 2.

Найдите алгоритм нахождения представления числа в «фибоначчиевой» системе и докажите, что оно единственно.

Найдём произведение 17 и 21 методом «фибоначчиевого» умножения.

1	21
2	42
3	63
5	105
8	168
13	273

В первом столбце записываем числа Фибоначчи, а во втором в первой сточке – множитель, во второй строчке – удвоенный множитель, а каждая следующая строчка получается как сумма двух предыдущих. Далее выбираем строчки, числа Фибоначчи в которых участвуют в представлении другого множителя в «фибоначчиевой» системе. В данном случае: $17 = 1 + 3 + 13$. Результат умножения – сумма выделенных во втором столбце чисел:

$$17\times 21 = 21 + 63 + 237 = 357.$$

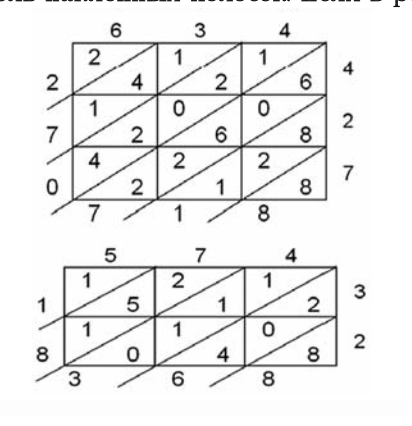
Упражнение 3.

Придумайте алгоритм умножения, который основывался бы на разложении одного из множителей в троичной системе счисления. (При этом следует использовать следующие операции: деление на 3 с остатком, умножение на 3 или на 2, сложение.)

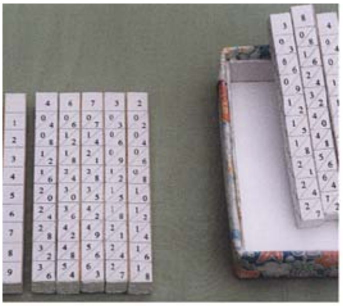
Теперь рассмотрим способ умножения, которым люди пользовались в средние века в Европе.

В конце XV века итальянский математик Лука де Пачоли опубликовал книгу «*Summa di arithmetica, geometrica, proportione et proportionalita*» («Сумма арифметики, геометрии, дробей, пропорций и пропорциональности»), в которой изложил различные приёмы умножения натуральных чисел, в том числе и «решётчатое» умножение – метод, называвшийся в Италии «gelosia» (жалюзи, решётчатые ставни). Это название приём получил за то, что полученный с помощью него рисунок напоминал модные в те времена в Италии оконные ставни-жалюзи.

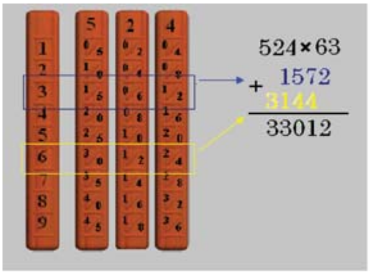
Для нахождения произведения двух чисел действуем следующим образом. Один множитель записываем над решёткой (цифра над столбцом), а другой справа от решетки (цифра напротив строчки). При умножении цифры одного множителя на цифру другого получаем однозначное или двузначное число. Десятки этого числа записываем над диагональю соответствующей клетки, единицы – под ней. Результат умножения получаем после сложения чисел, расположенных вдоль наклонных полосок. Если в результате сложения вдоль диагоналей получается число, большее 9, то под полоской записывается число единиц, а количество десятков прибавляется к сумме в следующей полоске.



Основываясь на методе умножения «решёткой», в начале XVII века шотландский математик лорд Дж. Непер изобрёл специальный инструмент для умножения чисел, который получил название «палочки Непера». Сверху на каждой палочке была изображена цифра от 1 до 9, ниже – девять клеток с числами, соответствующими результату умно-



жения данной цифры на другие цифры; как и в «решётчатом» методе, число единиц было записано под диагональю, а число десятков над ней. Также в наборе для умножения присутствовала «неподвижная» палочка,



на которую были нанесены цифры от 1 до 9. Для нахождения произведения двух чисел необходимо было выбрать палочки, соответствующие разрядам множимого, и выложить их в ряд так, чтобы цифры сверху на каждой палочке составляли множимое, далее найти отдельные произведения этого числа на цифры другого множителя, записать их со смещением на один разряд, а затем просуммировать цифры в столбцах.

Палочки Непера позволяли не только умножать числа, но и делить. Они стали важным этапом в развитии счётных устройств.

С появлением современной вычислительной техники возникла потребность в новых, более экономичных алгоритмах умножения. Таких, которые бы позволяли вычислять произведения больших чисел, используя меньшее количество элементарных умножений (т. е. умножений цифры на цифру, например, 3×4), нежели уже известные. И в начале 60-х годов Анатолий Карацуба, тогда ещё студент механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, предложил метод умножения n-значных чисел, который требует меньшее число элементарных умножений, чем умножение «столбиком». Алгоритм основывается на формуле:

$$(a+bx)(c+dx)=ac+$$

$$+((a+b)(c+d)-ac-bd)x+bdx^2.$$

Рассмотрим алгоритм Карацубы на примере, найдём 2532×4145.

$$2532\times 4145=(32+25\times 100)(45+41\times 100)=$$

$$=32\times 45+((32+25)(45+41)-32\times 45-$$

$$-25\times 41)\times 100+25\times 41\times 1000.$$

Заметим, что некоторые произведения повторяются в этой формуле и не нуждаются в повторном вычислении.

Этим же методом вычислим произведения получившихся двухзначных чисел, к примеру:

1) $32\times 45=(2+3\times 10)(5+4\times 10)=$ $=2\times 5+((3+2)(4+5)-2\times 5-3\times 4)\times 10+3\times$ $\times 4\times 100=2\times 5(5\times 9-2\times 5-3\times 4)\times 100+3\times$ $\times 4\times 100=1440$. При вычислении этого произведения потребовалось сделать 3 различных элементарных умножения (умножение на 10, 100 не учитываем, так как эти операции лишь добавляют нули к числу).

2) $57\times 96=(7+5\times 10)(6+9\times 10)=7\times$ $\times 6+((5+7)(9+6)-7\times 6-5\times 9)\times 10+5\times 9\times$ $\times 100=7\times 6+(12\times 15-7\times 6-5\times 9)\times 10+5\times$ $\times 9\times 100=5472$. Сделано уже 5 элементарных умножений, так как:

$$12\times 15=2\times 5+(3\times 6-2\times 5-1\times 1)\times$$

$$\times 10+1\times 1\times 100=10+70+100=180.$$

Упражнение 4. Докажите, что при нахождении произведения двух двухзначных чисел методом Карацубы требуется сделать не более 5 элементарных умножений.

3) $25\times 41=1025$. При вычислении этого произведения потребуется сделать 3 различных элементарных умножения.

Таким образом, для нахождения 2532×4145 алгоритмом Карацубы необходимо выполнить $3+5+3=11$ элементарных умножений. Читатель легко может убедиться, что для вычисления этого примера столбиком требуется произвести 16 элементарных умножений. Этот пример показывает, что алгоритм Карацубы является более экономичным методом умножения, чем «столбик». Поскольку алгоритм удобен для вычисления произведения больших чисел, то он и его модификации используются в различных вычислительных компьютерных программах [2].

Литература

1. *Воробьёв Н.Н.* Числа Фибоначчи. – М.: «Наука», 1978.

2. *Кнут Д.Э.* Искусство программмирования, т. 2. Получисленные алгоритмы, 3-е изд.: Пер. с англ.: Уч. пос. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2001. – 832 с.

3. *Юшкевич А.П.* История математики с древнейших времен до начала Нового времени, т. 1. – М.: Наука, 1970.

4. http://www.macs.hw.ac.uk/~greg/calculators/napier/about.html.