Епифанова Татьяна Николаевна
Учитель математики высшей категории старших классов ГОУ СОШ №1358 г. Москвы, отличник народного просвещения. Автор ряда методических статей в научно-теоретических и методических журналах. Победитель конкурса лучших учителей РФ в рамках ПНПО в 2009 году.

Эти красивые луночки Гиппократа

Чрезвычайно интересными геометрическими фигурами являются луночки Гиппократа. Такие серповидные фигуры, ограниченные дугами двух окружностей, названы в честь древнегреческого геометра Гиппократа Хиосского. В середине V века до нашей эры этот гениальный математик нашёл три вида луночек, особенность которых состоит в том, что эти фигуры можно квадрировать, т. е. строить равновеликие им многоугольники с помощью циркуля и линейки.

В этой статье мы рассмотрим построение таких луночек и решим задачи с красивыми геометрическими чертежами.

Математика владеет не только истиной, но и высшей красотой – красотой отточенной и строгой…
Бертран Рассел

…Идеи всплывают всегда, когда на них стоит печать математической красоты.
Анри Пуанкаре

Многие века математики пытались решить задачу о квадратуре круга, т. е. с помощью только циркуля и линейки построить квадрат, равновеликий кругу. В XIX веке было доказано, что это невозможно. Но есть другие криволинейные фигуры, допускающие построение равновеликих им многоугольников с помощью циркуля и линейки. Такими фигурами являются, например, луночки Гиппократа.

Построение первой из квадрируемых луночек очевидно из рис. 1. Легко доказать, что если взять равнобедренный прямоугольный треугольник и на его на сторонах как на диаметрах построить полукруги, то получатся две луночки Гиппократа, площадь каждой из которых равна половине площади этого треугольника. Это следует из обобщения теоремы Пифагора на полукруги, которое утверждает, что площадь полукруга, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей двух полукругов,

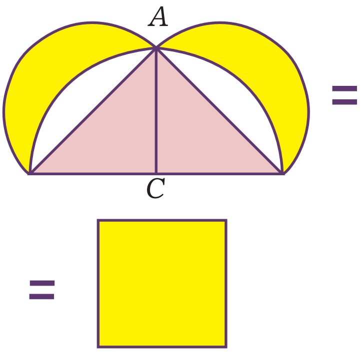

Рис. 1

построенных на катетах. Очевидно, что высота AC делит данный равнобедренный прямоугольный треугольник на два равнобедренных прямоугольных треугольника, из которых можно составить квадрат, площадь которого равна сумме площадей луночек Гиппократа. Таким образом, эти луночки квадрируемы. Из обобщения теоремы Пифагора на полукруги также следует, что если на сторонах прямоугольного треугольника как на диаметрах построить полукруги, то сумма площадей луночек, опирающихся на катеты, будет равна площади прямоугольного треугольника (рис. 2). Докажите это утверждение самостоятельно.

Для получения второй из квадрируемых луночек Гиппократ рассмотрел трапецию, три стороны которой равны, а квадрат большего основания в три раза превышает квадрат любой другой её стороны.

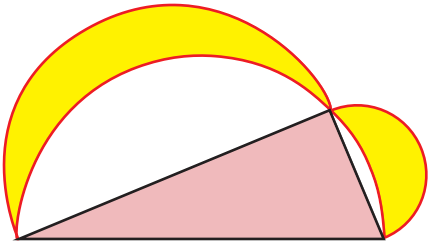

Рис. 2

Около этой трапеции Гиппократ описал окружность, а на большем основании построил круговой сегмент, подобный сегментам, отсекаемым другими сторонами (рис. 3). Легко доказать, что сумма площадей верхнего сегмента и двух боковых сегментов равна площади нижнего сегмента. Тогда очевидно, что площадь полученной луночки равна площади исходной трапеции.

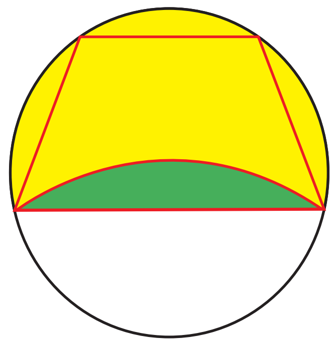

Рис. 3

Для получения третьей из квадрируемых луночек Гиппократ рассмотрел равнобокую трапецию, образованную диаметром круга и тремя соседними сторонами вписанного в этот круг правильного шестиугольника. Построив полукруги на каждой из трёх равных сторон трапеции и обозначив их длины через r, легко доказать, что *суммарная площадь трёх луночек и полукруга* диаметра r равна *площади трапеции* (рис. 4). Очевидно, что если бы можно было квадрировать только луночки, изображённые на рис. 4, то удалось бы квадрировать и полукруг. Но это сделать невозможно. Немецкому математику Ф. Линдеману в 1882 году удалось строго доказать, что задача о квадратуре круга неразрешима с помощью циркуля и линейки.

Гиппократ получил три квадрируемые луночки.

И только лишь в 1840 году немецкий математик Клаузен нашёл ещё две

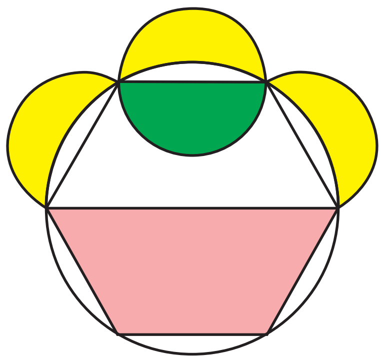

Рис. 4

квадрируемые луночки. А в 1930 – 1940 годах советские математики Н.Г. Чеботарёв и А.В. Дороднов, пользуясь методами теории Галуа, доказали, что существует пять видов квадрируемых луночек, но они не квадрируемы вместе с кругом.

Данная тема позволяет любителям математики составлять задачи с очень красивыми симметричными чертежами.

Ниже рассмотрены несколько из придуманных автором таких задач.

Задача 1. На сторонах прямоугольника, вписанного в окружность, построены как на диаметрах полукруги. Найти сумму площадей серповидных фигур, если произведение длин двух смежных сторон прямоугольника равно $32\ \text{см}^2$ (рис. 5).

Решение. Найдём сумму площадей луночек $AMBN$ и $BKCP$.

$$S_{AMBN}+S_{BKCP}=$$

$$=\frac{\pi\cdot AB^2}{8}+\frac{\pi\cdot BC^2}{8}+\frac{AB\cdot BC}{2}-\frac{\pi\cdot AC^2}{8}=$$

$$=\frac{\pi}{8}\left(AB^2+BC^2-AC^2\right)+\frac{AB\cdot BC}{2}=$$

$$=\frac{AB\cdot BC}{2}=16\left(\text{см}^2\right).$$

Тогда сумма площадей всех луночек Гиппократа в данной задаче будет равна $32\ \text{см}^2$.

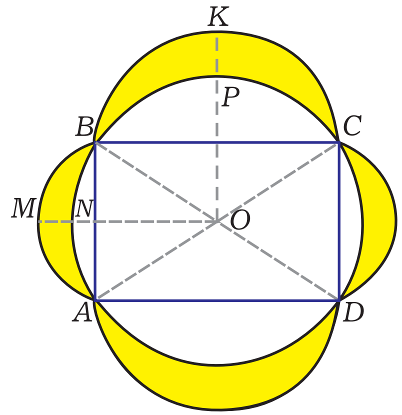

Рис. 5

Заметим, что эту задачу можно решить гораздо быстрее, если воспользоваться рассмотренным ранее следствием из обобщения теоремы Пифагора на полукруги. Тогда имеем:

$$S_{AMBH}+S_{BKCP}=$$

$$=S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 32=16\left(\text{см}^2\right),$$

а площадь всех 4 луночек равна $32\ \text{см}^2$.

Задача 2. Около трапеции описана окружность с центром, лежащим на основании трапеции. На сторонах трапеции как на диаметрах построены полуокружности. Найти сумму площадей трёх луночек Гиппократа, если диагональ трапеции равна 12 см и угол между диагоналями равен 60° (рис. 6).

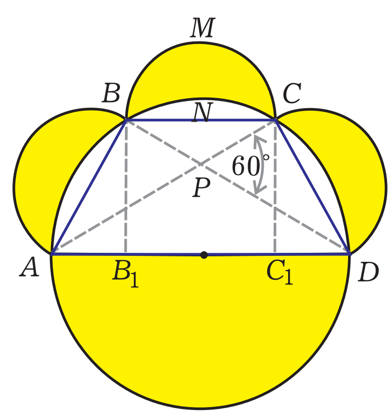

Рис. 6

Решение. Докажем, что трапеция, вписанная в окружность, является равнобедренной.

Так как $\angle A + \angle C = 180^\circ$ и $\angle D + \angle C = 180^\circ$, то $\angle A = \angle D$.

Проведём отрезки BB_1 и CC_1 перпендикулярно основанию трапеции AD. Треугольники ABB_1 и DCC_1 равны по катету и острому углу, и поэтому равны стороны AB и DC. Значит, трапеция, вписанная в окружность, является равнобедренной.

Из равенства треугольников ABD и DCA следует равенство диагоналей трапеции AC и DB.

Из прямоугольного треугольника CDP определим, что $\angle CDP = 30^\circ$ и поэтому $DP = 2CP$. Зная, что $BD = 12$ см, получим длины отрезков $BP = 4$ см, $DP = 8$ см и $CD = 4\sqrt{3}$ см.

Из треугольника BCP по теореме косинусов найдём длину отрезка BC: $BC = \sqrt{16+16+2\cdot4\cdot4\cdot0{,}5} = 4\sqrt{3}$ (см). Аналогично, из треугольника ADP вычислим длину отрезка $AD = 8\sqrt{3}$ см. Отсюда радиус окружности, описанной около трапеции, будет равен $4\sqrt{3}$ см.

Тогда очевидно, что сумма площадей полукругов с диаметрами на сторонах трапеции AB, BC и CD принимает значение $3\cdot\dfrac{\pi\left(4\sqrt{3}\right)^2}{8} = 18\pi\left(\text{см}^2\right)$, а площадь полукруга с диаметром AD равна $\dfrac{\pi\cdot\left(4\sqrt{3}\right)^2}{2} = 24\pi$ см^2.

Зная диагонали и угол между ними, найдём площадь трапеции:

$$S_{ABCD} = \frac{AC\cdot DB}{2}\sin 60^\circ = 36\sqrt{3}\ \text{см}^2.$$

Используя рисунок и найденные значения площадей, вычислим сумму площадей трёх равных луночек Гиппократа:

$$36\sqrt{3} + 18\pi - 24\pi = 36\sqrt{3} - 6\pi =$$
$$= 6\left(6\sqrt{3} - \pi\right) \approx 43{,}5\ \left(\text{см}^2\right).$$

Задача 3. На стороне правильного шестиугольника, вписанного в окружность, как на диаметре построили полукруг. Полученную серповидную фигуру $ABCD$ пристроили поочерёдно изнутри и снаружи к остальным сторонам шестиугольника (рис. 7).

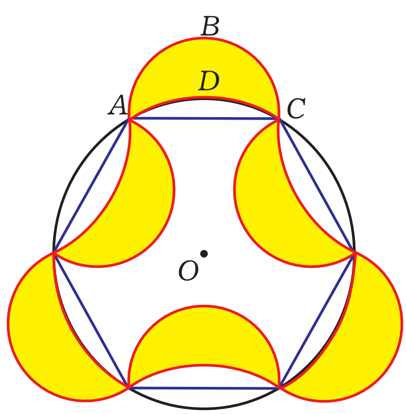

Рис. 7

Определить площадь фигуры, напоминающей форму корабельного винта, и сумму площадей гиппократовых луночек при длине стороны шестиугольника, равной 2 метрам.

Решение. Пусть длина стороны правильного шестиугольника равна x м. Найдём площадь серповидной фигуры $ABCD$, предварительно определив площадь треугольника AOC, площадь полукруга с диаметром AC и площадь кругового сектора $OADC$.

Так как сторона правильного шестиугольника равна радиусу описанной окружности, то

$$S_{\Delta AOC}=\frac{\sqrt{3}x^2}{4}.$$

Найдём площадь кругового сектора $OADC$:

$$S_{\text{сект } OADC}=\frac{\pi\cdot R^2}{360^\circ}\cdot 60^\circ=\frac{\pi\cdot x^2}{6}.$$

Площадь полукруга с диаметром AC равна $\frac{\pi\cdot x^2}{8}$.

Вычислим площадь серповидной фигуры $ABCD$:

$$S_{\text{лун } ABCD}=\frac{\sqrt{3}x^2}{4}+\frac{\pi\cdot x^2}{8}-\frac{\pi\cdot x^2}{6}=$$
$$=\frac{\sqrt{3}x^2}{4}-\frac{\pi\cdot x^2}{24}.$$

Вычитая из площади кругового сектора $OADC$ площадь треугольника AOC, найдём площадь кругового сегмента ADC:

$$S_{\text{сегм } ADC}=\frac{\pi\cdot x^2}{6}-\frac{\sqrt{3}x^2}{4}.$$

Определим площадь модели корабельного винта, вычитая из площади круга сумму площадей трёх гиппократовых луночек и шести круговых сегментов:

$$S_{\text{винта}}=S_{\text{круга}}-3S_{\text{лун } ABCD}-$$
$$-6S_{\text{сегм } ADC}=$$
$$=\pi x^2-3\left(\frac{\sqrt{3}x^2}{4}-\frac{\pi\cdot x^2}{24}\right)-$$
$$-6\left(\frac{\pi\cdot x^2}{6}-\frac{\sqrt{3}x^2}{4}\right)=\frac{\pi\cdot x^2}{8}+\frac{3\sqrt{3}x^2}{4},$$
$$S_{\text{винта}}=\frac{x^2}{4}\left(3\sqrt{3}+\frac{\pi}{2}\right),$$
$$S_{\text{шести луночек}}=6\left(\frac{\sqrt{3}x^2}{4}-\frac{\pi\cdot x^2}{24}\right)=$$
$$=\frac{x^2}{2}\left(3\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right).$$

Если сторона шестиугольника равна двум метрам, то

$$S_{\text{винта}}=3\sqrt{3}+\frac{\pi}{2}\approx 7\left(\text{м}^2\right),$$
$$S_{\text{шести луночек}}=6\sqrt{3}-\pi\approx 7\left(\text{м}^2\right).$$

Из полученных результатов следует, что площадь модели корабельного винта и сумма площадей луночек, окружающих этот винт, будут примерно равны.

Задача 4. На стороне правильного шестиугольника, вписанного в окружность, как на диаметре построили полукруг. Найти площадь круга, вписанного в шестиугольник, если площадь луночки Гиппократа $ABCD$ равна $\left(12\sqrt{3}-2\pi\right)$ м^2 (рис. 8).

Решение. Пусть длина стороны правильного шестиугольника равна x м. Тогда найдём площадь серповидной фигуры $ABCD$:

$$S_{\text{лун } ABCD}=$$
$$=\frac{\sqrt{3}x^2}{4}+\frac{\pi x^2}{8}-\frac{\pi x^2}{6}=$$
$$=\frac{\sqrt{3}x^2}{4}-\frac{\pi x^2}{24}.$$

Зная, что $S_{\text{лун } ABCD}=\left(12\sqrt{3}-2\pi\right)$ м^2, составим и решим уравнение:

$$\frac{\sqrt{3}x^2}{4}-\frac{\pi x^2}{24}=12\sqrt{3}-2\pi\Leftrightarrow$$

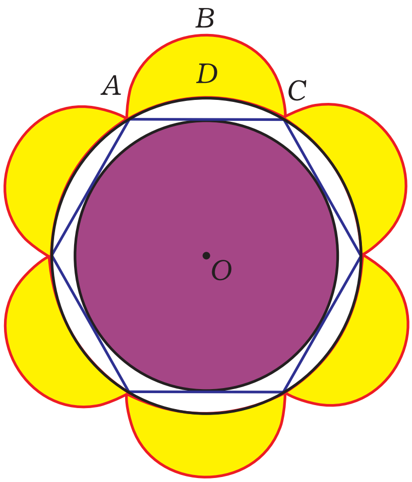

Рис. 8

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{2\left(6\sqrt{3}-\pi\right)}{\frac{1}{24}\left(6\sqrt{3}-\pi\right)} \Leftrightarrow x^2 = 48 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4\sqrt{3}, \\ x = -4\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

По смыслу задачи годится только первый корень.

Найдём радиус и площадь круга, вписанного в шестиугольник:

$$r = \frac{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = 6 \text{ (м)}; \ S_{\text{круга}} = 36\pi \text{ м}^2.$$

Решая задачи на луночки Гиппократа, нельзя не вспомнить классические задачи Архимеда об арбелоне и задачи, связанные с символом «Инь-Янь».

Арбелон – это закрашенная жёлтым цветом фигура на рис. 9, образованная дугами трёх окружностей, и напоминающая по форме древнегреческий сапожный нож. Арбелон может рассматриваться как некоторая обобщённая луночка Гиппократа.

Самостоятельно решите две известные задачи Архимеда, связанные с арбелоном.

Задача 6. Докажите, что площадь арбелона равна площади круга, построенного на перпендикуляре KC как на диаметре (рис. 9).

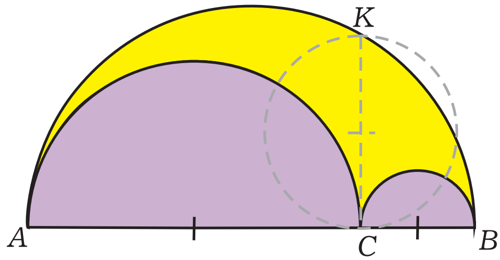

Рис. 9

Задача 7. Докажите, что круги, вписанные в арбелон по обе стороны от перпендикуляра KC, равновелики (рис. 10).

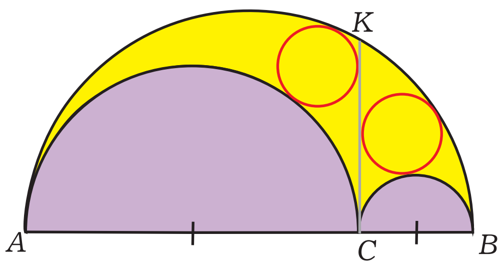

Рис. 10

Символ «Инь-Янь» – двуцветный круг, состоящий из двух частей, ограниченных дугами окружностей. В каждой из двух частей изображены маленькие кружочки противоположного цвета (рис. 11). Решите несложную задачу по чертежу, сходному с символом «Инь-Янь».

Рис. 11

Задача 8. Диаметр окружности длиной 20 м разделили на четыре равных отрезка и на них построили полуокружности (рис. 12). Найдите площадь каждой из закрашенных частей. (Ответ: 25π м^2.)

Рис. 12

Предлагаем ещё три задачи для самостоятельного решения по рассматриваемой теме.

Задача 9. В квадрат, длина стороны которого равна двум метрам, вписана окружность. Четыре окружности с центрами в вершинах этого квадрата поочерёдно касаются друг друга. Найти разность между суммой площадей луночек Гиппократа и площадью криволинейного четырёхугольника (рис. 13).

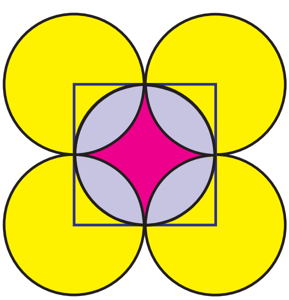

Рис. 13

(Ответ: 3π м^2.)

Задача 10. Круговые сегменты, ограничивающие стороны правильного треугольника, вписанного в окружность, симметрично отобразили относительно сторон этого треугольника. На каждой стороне треугольника длиной 1 м как на диаметрах построили три полукруга во внешнюю сторону. В результате получилась трёхлепестковая фигура и три луночки Гиппократа (рис. 14). Определите разность между суммой площадей луночек Гиппократа и площадью трёхлепестковой фигуры.

(Ответ: $\dfrac{18\sqrt{3}-7\pi}{24} \approx 0{,}383\left(\text{м}^2\right)$.)

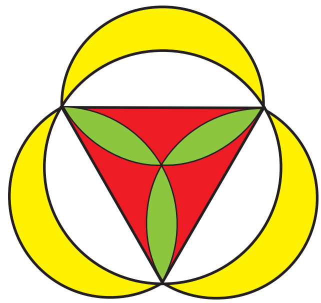

Рис. 14

Задача 11. На сторонах правильного двенадцатиугольника, вписанного в окружность, как на диаметрах построили полуокружности (рис. 15). Найти площадь наибольшего круга, вписанного в серповидную фигуру, и площадь кругового кольца, в котором лежат все гиппократовы луночки, если площадь круга, вписанного в двенадцатиугольник, равна $6\left(2+\sqrt{3}\right)\pi$ м^2 (рис. 15).

(Ответ: $6\left(2{,}5-\sqrt{6}\right)\pi$ м^2, 12π м^2.)

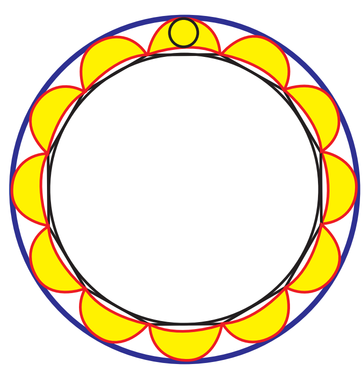

Рис. 15