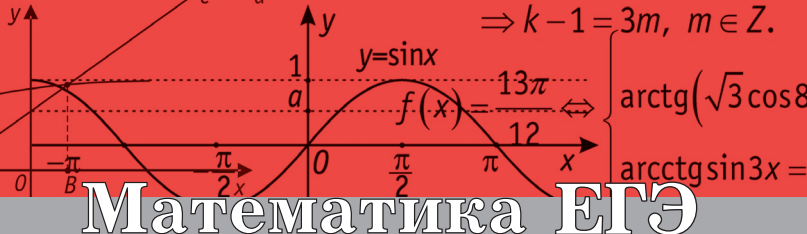


$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$



Математика ЕГЭ



Пукас Юрий Остапович
Учитель математики
МАОУ СОШ №2, г.Троицк.

Квадратный трёхчлен в задачах ЕГЭ

Квадратный трёхчлен с полным правом давно считается главной функцией всей школьной математики. Такое его особое положение отражалось и на вступительных экзаменах в вузы (когда-то были такие экзамены), где число задач, так или иначе связанных с квадратным трёхчленом, было очень велико, а сами эти задачи были чрезвычайно разнообразны и интересны. Важна роль таких задач и в эпоху Единого Государственного Экзамена.

При решении задач не стоит увлекаться общими теориями, а следует попытаться сначала выявить специфику данного конкретного примера.

Игорь Фёдорович Шарыгин

Мне хорошо запомнился день, когда я впервые услышал словосочетание «задачи с параметрами». 25 июня 1968 года я сдал документы в приёмную комиссию и из общежития интерната, что на Кременчугской улице, перебрался в первый корпус общежития физфака МГУ, что на Ломоносовском проспекте. Там я познакомился с учащимися подготовительных курсов МГУ («рабфак-ковцами»). И первое, о чём спросили меня новые друзья, умею ли я решать задачи с параметрами? А я даже не понял, о чём меня спрашивают. Дело в

том, что само слово «параметр» в формулировках задач тех лет практически не встречалось, хотя сами эти задачи мне хоть не очень часто, но попадались, и я их решал, ничем не выделяя среди множества других. У ребят с подготовительных курсов были замечательные пособия (сборники вариантов МГУ), о существовании которых мы, выпускники ФМШ №18, даже и не подозревали! Этих книг хватило мне на все десять дней, что оставались до письменного экзамена по математике. Так что первые две из разбираемых здесь задач

я наверняка решал в то незабываемое время.

1. (Физфак МГУ, 1961) При каких значениях a один из корней уравнения

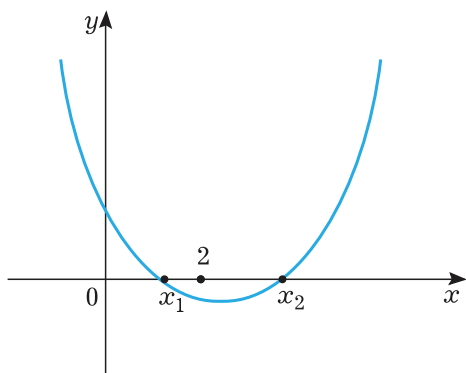
$$(a^2 + a + 1)x^2 + (2a - 1)x + a^2 = 0$$

больше 2, а другой меньше 2?

Решение легко получается на основании простого наглядного соображения. Так как коэффициент $(a^2 + a + 1) > 0$, ветви параболы

$$y(x) = (a^2 + a + 1)x^2 + (2a - 1)x + a^2$$

направлены вверх. По условию эта парабола должна пересекать ось x , причём отрезок $[x_1; x_2]$, где x_1 и x_2 — корни уравнения, должен содержать внутри себя точку 2. Следовательно, значение квадратичной функции в этой точке должно быть отрицательным.



Решая относительно параметра a неравенство $y(2) < 0$, получаем **ответ**:

$$\left(\frac{-4 - \sqrt{6}}{5}; \frac{-4 + \sqrt{6}}{5} \right).$$

2. (Физфак МГУ, 1966) Для каждого числа a решить уравнение

$$9^{-|x-2|} - 4 \cdot 3^{-|x-2|} - a = 0.$$

Обозначив для удобства $3^{-|x-2|}$ через t и учитывая, что $0 < 3^{-|x-2|} \leq 1$ при любом x , получим уравнение $t^2 - 4t - a = 0$, у которого надо найти

корни, лежащие в промежутке $0 < t \leq 1$.

Рассмотрим квадратичную функцию $f(t) = t^2 - 4t - a$. Абсцисса вершины графика этой функции $t_0 = 2$, так что если наше квадратное уравнение имеет корни, то больший корень больше 2 и он нас не интересует. А для того чтобы меньший корень принадлежал промежутку $0 < t \leq 1$, требуется выполнение двух условий: $f(0) > 0$, $f(1) \leq 0$. Это выполняется при $-3 \leq a < 0$, причём этот корень $t_1 = 2 - \sqrt{4 + a}$. Далее последовательно получаем:

$$\begin{aligned} 3^{-|x-2|} &= 2 - \sqrt{4 + a} \Rightarrow \\ \Rightarrow |x - 2| &= -\log_3(2 - \sqrt{4 + a}) \Rightarrow \\ \Rightarrow x_{1,2} &= 2 \pm \log_3(2 - \sqrt{4 + a}). \end{aligned}$$

При остальных значениях a исходное уравнение корней не имеет.

3. (ЕГЭ-2013) Найдите все значения a , для каждого из которых уравнение

$$\log_{1-x}(a - x + 2) = 2$$

имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $[-1; 1)$.

Начинаем решать как самое обычное логарифмическое уравнение:

$$\begin{cases} 1 - x > 0, \\ 1 - x \neq 1, \\ a - x + 2 = (1 - x)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1, \\ x \neq 0, \\ x^2 - x - 1 - a = 0. \end{cases}$$

Как и в предыдущем примере, рассмотрим квадратичную функцию $f(x) = x^2 - x - 1 - a$ и обратим внимание на то, что нам известна абсцисса вершины параболы $x_0 = \frac{1}{2}$. Чтобы корни были, должно выполняться условие $f(x_0) \leq 0 \Rightarrow a \geq -\frac{5}{4}$. Теперь выясним,

при каких значениях параметра a один из корней квадратного уравне-

ния равен 0. Подставив это значение в уравнение, находим, что $a = -1$.

А чему в этом случае равен второй корень? Оказывается, $x_2 = 1$, но это и неудивительно, ведь точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$ симметричны относительно вершины параболы $x_0 = \frac{1}{2}$. Итак, к

условию $a \geq -\frac{5}{4}$ добавилось условие $a \neq -1$.

Так как точка $x = -1$ удалена от абсциссы вершины параболы $x_0 = \frac{1}{2}$ на большее расстояние, чем точка $x = 1$, уравнение $f(x) = 0$ будет иметь на промежутке $[-1; 1]$ хотя бы один корень, если $f(-1) \geq 0 \Rightarrow a \leq 1$.

Ответ. $\left[-\frac{5}{4}; -1\right) \cup (-1; 1]$.

4. (Из тренировочных вариантов ЕГЭ-2016) Найдите все значения a , для каждого из которых уравнение

$$\sqrt{a - 4 \sin^4 x} = \cos^2 x$$

имеет решение.

Так как $\cos^2 x \geq 0$, обе части уравнения можно возвести в квадрат:

$$a - 4 \sin^4 x = \cos^4 x.$$

Чтобы удобнее было ввести новую переменную $\cos 2x = t$, умножим всё на 4:

$$4a - 4 \cdot 4 \sin^4 x = 4 \cos^4 x.$$

Так как $2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$ и

$$2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x,$$

получаем уравнение

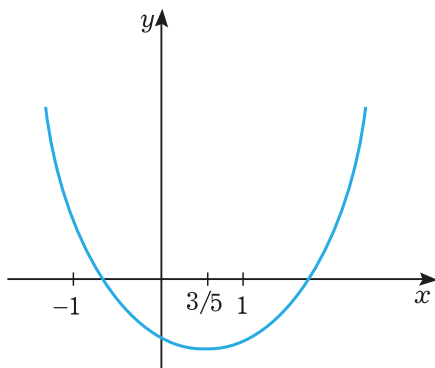
$$4a - 4 \cdot (1 - t)^2 = (1 + t)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5t^2 - 6t + 5 - 4a = 0.$$

Опять рассматриваем квадратичную

функцию $f(t) = 5t^2 - 6t + 5 - 4a$, её вершина $t_0 = \frac{3}{5}$. Так как точка $t = -1$ удалена от абсциссы вершины параболы $t_0 = \frac{3}{5}$ на большее расстояние, чем точка $t = 1$, для ответа на вопрос задачи решаем систему неравенств

$$\begin{cases} f(t_0) \leq 0, \\ f(-1) \geq 0. \end{cases}$$



Ответ. $\left[\frac{4}{5}; 4\right]$.

5. (Из тренировочных вариантов ЕГЭ-2016) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\log_{3x-4}(a + 9x + 5) = -1$$

имеет единственное решение на промежутке $\left(\frac{4}{3}; 2\right]$.

Начинаем, как в задаче 3, но вскоре окажется, что ситуация здесь иная: абсцисса вершины параболы нам не известна, точнее сказать, она зависит от параметра a .

$$\begin{cases} 3x - 4 > 0, \\ 3x - 4 \neq 1, \\ a + 9x + 5 = \frac{1}{3x - 4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > \frac{4}{3}, \\ x \neq \frac{5}{3}, \\ 27x^2 - (21 - 3a)x - 4a - 21 = 0. \end{cases}$$

Попробуем выяснить, при каких значениях параметра a один из корней полученного квадратного уравнения равен $x_1 = \frac{5}{3}$. Подставив это значение в уравнение, находим, что $a = -19$. А чему в этом случае равен второй корень? Так как $x_1 + x_2 = \frac{21 - 3a}{27}$, находим, что $x_2 = \frac{11}{9} < \frac{4}{3}$. Тем самым мы выяснили, что при $a = -19$ исходное логарифмическое уравнение не имеет решений на промежутке $\left(\frac{4}{3}; 2\right]$.

Если же подставить в квадратное уравнение $x = \frac{4}{3}$ с целью выяснить, при каких ещё значениях параметра нас могут поджидать «неприятности», мы неожиданно обнаружим, что ни при каких! Параметры взаимно уничтожаются, и мы получаем, что $-1 = 0$, а это не совсем правильно. Но в какой-то счастливый момент приходит понимание того, что мы получили в результате такой подстановки:

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = -1 < 0,$$

где $f(x) = 27x^2 - (21 - 3a)x - 4a - 21$.

А это означает, что уравнение $f(x) = 0$ имеет два корня, причём один из них меньше, чем $\frac{4}{3}$, а другой – больше. И чтобы найти все значения a , при которых исходное логарифмическое уравнение имеет

единственное решение на промежутке $\left(\frac{4}{3}; 2\right]$, нам надо решить неравенство $f(2) \geq 0$ и исключить из найденных значений $a = -19$.

Ответ. $[-22, 5; -19) \cup (-19; +\infty)$.

6. (ЕГЭ-2013) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $(4 \cos x - 3 - a) \cdot \cos x - 2,5 \cos 2x + 1,5 = 0$ имеет хотя бы один корень.

Обозначив $\cos x = t$, $|t| \leq 1$, получаем квадратное уравнение $t^2 + (3 + a) \cdot t - 4 = 0$. Ветви параболы $f(t) = t^2 + (3 + a) \cdot t - 4$ направлены вверх, и можно заметить, что $f(0) = -4 < 0$, следовательно, наше квадратное уравнение имеет два решения, но для того, чтобы хотя бы одно из них удовлетворяло условию $|t| \leq 1$, надо, чтобы выполнялось хотя бы одно из двух условий:

$$\begin{cases} f(-1) \geq 0, \\ f(1) \geq 0. \end{cases}$$

Ответ. $(-\infty; -6] \cup [0; +\infty)$.

7. (ЕГЭ-2013) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{7a}{a-5} \cdot 2^{|x|} = 4^{|x|} + \frac{12a+17}{a-5}$$

имеет ровно два различных корня.

Обозначив $2^{|x|} = t$, $t \geq 1$, получаем квадратное уравнение

$$t^2 - \frac{7a}{a-5} \cdot t + \frac{12a+17}{a-5} = 0.$$

Отметим важный момент. Если это квадратное уравнение имеет корень $t_1 > 1$, то находя x из уравнения $2^{|x|} = t_1$, мы получаем сразу два решения исходного уравнения: $x_{1,2} = \pm \log_2(t_1)$. Если же один из корней квадратного уравнения равен 1, то $2^{|x|} = 1 \Rightarrow x = 0$, а это означает, что ис-

ходное уравнение имеет нечётное количество различных корней (один или три).

Получается, что исходное уравнение может иметь ровно два различных корня только в двух случаях: если квадратное уравнение $f(t) = 0$ имеет единственный корень, больший 1, или если уравнение $f(t) = 0$ имеет два корня, один из которых больше 1, а второй меньше 1.

Уравнение

$$t^2 - \frac{7a}{a-5} \cdot t + \frac{12a+17}{a-5} = 0$$

имеет единственный корень, если его дискриминант равен нулю:

$$\left(\frac{7a}{a-5}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{12a+17}{a-5}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + 172a + 340}{(a-5)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = -2; a_2 = -170.$$

Если $a_1 = -2$, то получаем уравнение $t^2 - 2t + 1 = 0$, имеющее единственный корень $t = 1$. Как уже отмечалось, в этом случае исходное уравнение имеет только один корень $x = 0$.

Если же $a_2 = -170$, то получаем уравнение $t^2 - \frac{34}{5}t + \frac{289}{25} = 0$, имеющее единственный корень $t = \frac{17}{5} = 3,4 > 1$. В этом случае исходное уравнение имеет два различных корня.

Теперь найдём условия, при которых уравнение $f(t) = 0$ имеет два корня, один из которых больше 1, а второй меньше 1. Рассмотрим функцию $f(t) = t^2 - \frac{7a}{a-5} \cdot t + \frac{12a+17}{a-5}$. Её графиком является парабола, ветви которой направлены вверх. Чтобы уравнение $f(t) = 0$ имело два корня, один из которых больше 1, а второй меньше 1,

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $f(1) < 0$. Получаем

$$1 - \frac{7a}{a-5} + \frac{12a+17}{a-5} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{6a+12}{a-5} < 0 \Rightarrow -2 < a < 5.$$

Ответ. $-170; (-2; 5)$.

8. (ЕГЭ–2012) Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$\left| \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3$$

выполняется при всех x .

Так как $x^2 + x + 1 > 0$ для всех значений x , мы получаем:

$$|x^2 + ax + 1| < 3x^2 + 3x + 3.$$

Это равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 + ax + 1 < 3x^2 + 3x + 3, \\ x^2 + ax + 1 > -3x^2 - 3x - 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + (3-a)x + 2 > 0, \\ 4x^2 + (3+a)x + 4 > 0. \end{cases}$$

Для того чтобы любое значение x удовлетворяло этой системе неравенств, надо чтобы каждое из обоих неравенств системы выполнялось для любого значения x . Следовательно, дискриминанты левых частей этих неравенств должны быть отрицательными:

$$\begin{cases} (3-a)^2 - 16 < 0, \\ (3+a)^2 - 64 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < a < 7, \\ -11 < a < 5. \end{cases}$$

Ответ. $(-1; 5)$.

9. (Из тренировочных вариантов ЕГЭ–2016) Найдите все значения параметра a , для каждого из которых область значений функции $y = \frac{\cos 3x + a}{\cos 6x + 5}$ содержит число 1.

Заметим, что и здесь функция $y(x)$ непрерывна, так как знаменатель $\cos 6x + 5 > 0$. Найдём условия, при ко-

торых уравнение $\frac{\cos 3x + a}{\cos 6x + 5} = 1$ имеет решения.

Обозначив $\cos 3x = t$, $|t| \leq 1$, получим уравнение $2t^2 - t - a + 4 = 0$. Рассмотрим параболу

$$f(t) = 2t^2 - t - a + 4.$$

Её вершина имеет абсциссу $t_0 = \frac{1}{4}$. Далее рассуждаем, как в задаче 4. Так как точка $t = -1$ удалена от абсциссы вершины параболы на большее расстояние, чем точка $t = 1$, уравнение $f(t) = 0$ будет иметь на отрезке $[-1; 1]$ хотя бы один корень при выполнении следующих двух условий:

$$\begin{cases} f(t_0) \leq 0, \\ f(-1) \geq 0. \end{cases}$$

Из первого неравенства находим, что $a \geq \frac{31}{8}$, а из второго следует, что $a \leq 7$. В итоге получаем

$$\text{Ответ. } a \in \left[\frac{31}{8}; 7 \right].$$

10. (Из тренировочных вариантов ЕГЭ-2016) Найти все значения параметра a , при каждом из которых множество значений функции

$$y = \frac{3x + 3 - 2ax}{x^2 + 2(2a + 1)x + 4a^2 + 4a + 2}$$

содержит отрезок $[0; 1]$.

Запишем функцию в виде:

$$y = \frac{3 - (2a - 3)x}{(x + 2a + 1)^2 + 1}.$$

В силу непрерывности данной функции отрезок $[0; 1]$ содержится в множестве её значений тогда и только тогда, когда уравнения

$$\frac{3 - (2a - 3)x}{(x + 2a + 1)^2 + 1} = 0,$$

и

$$\frac{3 - (2a - 3)x}{(x + 2a + 1)^2 + 1} = 1$$

имеют решения.

Уравнение $3 = (2a - 3)x$, равносильное первому уравнению, имеет решение при любом $a \neq 1, 5$. Уравнение $x^2 + (6a - 1)x + 4a^2 + 4a - 1 = 0$, равносильное второму уравнению, имеет решение тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен:

$$D = (6a - 1)^2 - 4(4a^2 + 4a - 1) \geq 0,$$

$$\text{откуда } a \leq \frac{7 - 2\sqrt{6}}{10} \text{ и } a \geq \frac{7 + 2\sqrt{6}}{10}.$$

Следовательно, с учётом $a \neq 1, 5$ получаем окончательный **ответ**:

$$a \in \left(-\infty; \frac{7 - 2\sqrt{6}}{10} \right] \cup \left[\frac{7 + 2\sqrt{6}}{10}; 1, 5 \right) \cup (1, 5; +\infty).$$

11. (Из тренировочных вариантов ЕГЭ - 2016) Найти все значения параметра a , при каждом из которых множество значений функции

$$y = \frac{\sqrt{a} - 2 \cos x + 1}{\sin^2 x + a + 2\sqrt{a} + 1}$$

содержит отрезок $[2; 3]$.

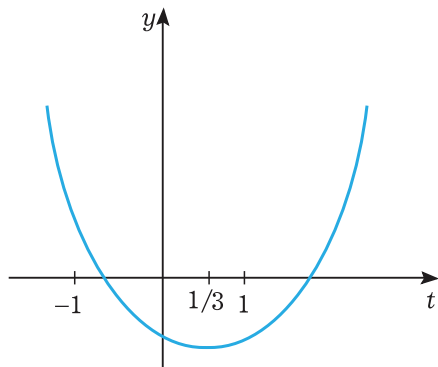
Обозначив $\sqrt{a} + 1 = b \geq 1$ и $\cos x = t$, $|t| \leq 1$, получим функцию

$$y(t) = \frac{b - 2t}{1 - t^2 + b^2}.$$

Знаменатель дроби положителен, и мы приходим к задаче, аналогичной задаче **10**, с той лишь разницей, что непрерывную функцию $y(t)$ мы рассматриваем не для $x \in \mathbb{R}$, а только при $|t| \leq 1$. Отрезок $[2; 3]$ содержится в множестве значений функции тогда и только тогда, когда уравнения $y(t) = 3$ и $y(t) = 2$ имеют решения, принадлежащие области определения $|t| \leq 1$.

В первом случае мы получаем уравнение $3t^2 - 2t - 3b^2 + b - 3 = 0$, а во втором – уравнение

$$2t^2 - 2t - 2b^2 + b - 2 = 0.$$



Рассмотрим квадратичную функцию

$$f(t) = 3t^2 - 2t - 3b^2 + b - 3 = 3\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 - 3b^2 + b - \frac{10}{3}.$$

Абсцисса вершины параболы $t_0 = \frac{1}{3}$, причем $f(t_0) < 0$, так как $-3b^2 + b - \frac{10}{3} < 0$ при всех значениях b .

Так как точка $t = -1$ удалена от абсциссы вершины параболы на большее расстояние, чем точка $t = 1$, уравнение $f(t) = 0$ будет иметь на отрезке $[-1; 1]$ хотя бы один корень, если $f(-1) \geq 0$.

Это условие выполняется при $-\frac{2}{3} \leq b \leq 1$. Но ведь $b \geq 1$! Следовательно, здесь $b = 1$, и нам осталось только убедиться, что при этом значении b и второе уравнение имеет подходящие корни. Итак, $b = 1$, следовательно, $a = 0$.

12. (Из тренировочных вариантов ЕГЭ - 2016) Найти все значения параметра a , при каждом из кото-

рых множество решений неравенства

$$\frac{a - (a^2 - 2a - 3)\sin x + 4}{1,5 + 0,5 \cos 2x + a^2} < 1$$

содержит отрезок $\left[-2\pi; -\frac{7\pi}{6}\right]$.

При любых значениях x и a исходное неравенство равносильно неравенству

$$a - (a^2 - 2a - 3)\sin x + 4 < 2 - \sin^2 x + a^2.$$

Введя переменную $t = \sin x$, получаем квадратное неравенство относительно t :

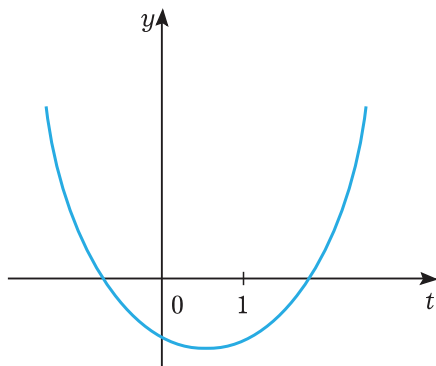
$$t^2 - (a^2 - 2a - 3)t - a^2 + a + 2 < 0.$$

Так как на отрезке $\left[-2\pi; -\frac{7\pi}{6}\right]$

$\sin x$ принимает все значения от 0 до 1, то при искомым значениях параметра a график функции

$$f(t) = t^2 - (a^2 - 2a - 3)t - a^2 + a + 2$$

должен иметь следующий вид:



Это выполнится, если $\begin{cases} f(0) < 0, \\ f(1) < 0. \end{cases}$

Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} 2a^2 - 3a - 6 > 0, \\ a^2 - a - 2 > 0. \end{cases}$$

Ответ.

$$a \in \left(-\infty; \frac{3 - \sqrt{57}}{4}\right) \cup \left(\frac{3 + \sqrt{57}}{4}; +\infty\right).$$