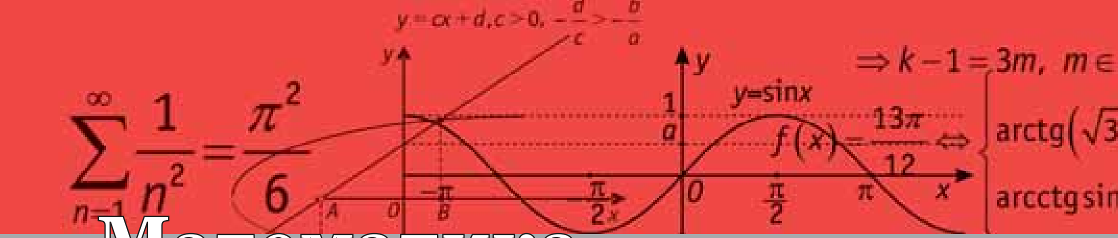
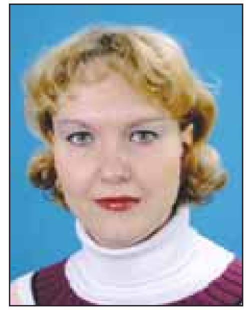
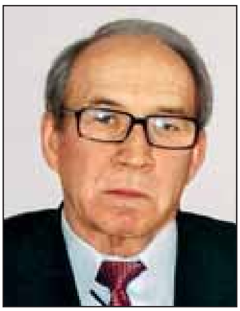




Ремчукова Инна Борисовна
Учитель математики. Заместитель директора по учебно-воспитательной работе лицея № 38 г. Белгорода.



Вавилов Валерий Васильевич
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова и школы имени А.Н. Колмогорова. Заслуженный преподаватель и лауреат Ломоносовской премии МГУ. Автор 21 книги, более 250 статей научного, методического и научно-популярного характера.

Куб и правильные многоугольники

Можно ли в деревянном кубе проделать отверстие, через которое можно протащить такой же куб?

Какие правильные многоугольники можно получить, пересекая куб плоскостью?

Какова максимальная площадь многоугольника, который может получиться в пересечении куба плоскостью?

В этой статье мы ответим на эти вопросы и рассмотрим другие интересные свойства куба и его сечений.

1. Отверстие в кубе. Для положительного ответа на первый вопрос рассмотрим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1 (рис. 1) и пространственный шестиугольник $AA_1B_1C_1CDA$ (не плоский!). Если через этот каркасный шестиугольник можно протащить свободно куб, не задевая его сторон, то это и будет означать, что мы сможем проделать нужное отверстие.

Чтобы убедиться в этом, построим параллельную проекцию куба на

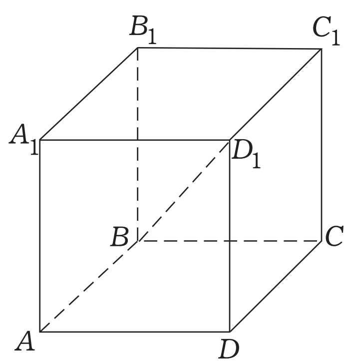


Рис. 1

некоторую плоскость, перпендикулярную прямой, содержащей его главную диагональ BD_1. В силу симметрии куба относительно его главной диагонали проекция шестиугольника $AA_1B_1C_1CDA$ представляет собой правильный шестиугольник $A'A_1'B_1'C_1'C'D'A'$, а в центр O этого правильного шестиугольника проектируется центр куба и оба конца диагонали BD_1 (рис. 2).

В треугольнике B_1BD_1 на рис. 1, как легко видеть, $\sin\angle B_1BD_1 = \sqrt{2/3}$, и поэтому синус угла между любым ребром куба и его главной диагональю равен $\sqrt{2/3}$. Так как рёбра исходного куба равны 1, то сторона правильного шестиугольника также равна $\sqrt{2/3}$. Легко вычислить и радиус вписанной в этот правильный шестиугольник окружности, который равен $\sqrt{2}/2$, то есть он равен половине диагонали квадрата со стороной 1. (Проведите необходимые здесь вычисления самостоятельно). Поэтому в правильном шестиугольнике помещается квадрат с центром в точке O и со стороной 1, не задевая сторон правильного шестиугольника (рис. 2).

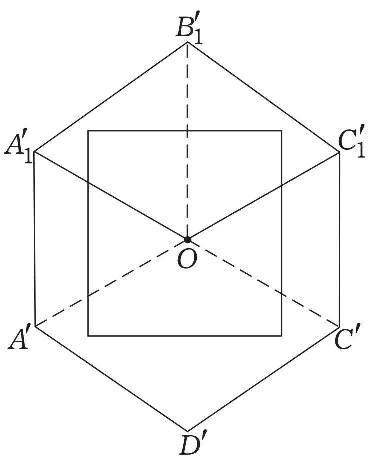


Рис. 2

Отсюда следует, что если поставить куб с ребром 1 так, что его нижняя грань совпадет с квадратом на рис. 2, а затем двигать куб перпендикулярно плоскости правильного шестиугольника (вдоль главной диагонали BD_1), то куб не заденет сторон шестиугольника (рис. 3). Значит, тем же способом его можно протащить и через пространственный шестиугольник $AA_1B_1C_1CDA$.

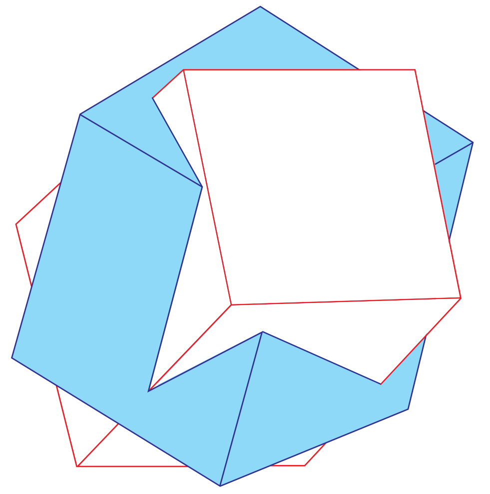


Рис. 3

Отметим, что в действительности мы показали, что сквозь деревянный куб можно протащить даже куб любого размера с длиной ребра меньше, чем $(\sqrt{3}-1)/\sqrt{2}$, т.е. даже куб несколько большего размера, чем тот, в котором проделывается отверстие.

2. Правильные многоугольники. Построить сечение куба плоскостью – это значит найти линии пресечения этой плоскости с каждой гранью куба. Так как граней у куба всего шесть, то в сечении не может получиться никакой n-угольник с $n > 6$.

Квадрат в сечении получается, например, когда плоскость сечения параллельна одной из его граней. А как по-другому можно провести плоскость, чтобы в сечении куба этой плоскостью получился квадрат? Приведите примеры.

Правильный пятиугольник в сечении куба плоскостью получить нельзя (хотя вообще пятиугольник, конечно, получить можно, рис. 4). Действительно, если бы такая плоскость нашлась, то она бы пересекла по крайней мере пару противоположных граней куба. А такие грани

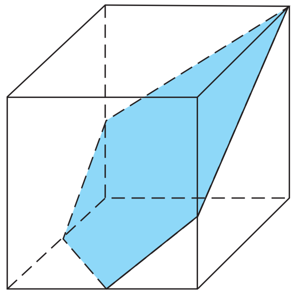


Рис. 4

параллельны, и поэтому линии пересечения секущей плоскости с этими гранями также должны быть параллельны. Но у правильного пятиугольника, как известно, нет пар параллельных между собой сторон.

Что касается правильного шестиугольника, то мы практически уже знаем, как его можно получить, пересекая куб плоскостью. Для этого достаточно рассмотреть середины шести рёбер куба, отмеченные точками (рис. 5).

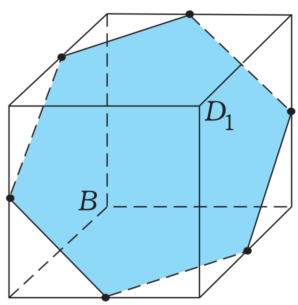


Рис. 5

Эти середины рёбер при параллельной проекции вдоль BD_1 переходят в середины сторон правильного шестиугольника, рассмотренного на рис. 2. При этом все шесть указанных середин точек рёбер куба лежат в одной плоскости, а сама эта плоскость перпендикулярна прямой BD_1. Действительно, в каждой грани куба отрезок, соединяющий середины её соседних сторон, параллелен диагонали грани (квадрата) и поэтому параллелен и равен соответствующему отрезку на противоположной грани куба. Поэтому все шесть середин рёбер расположены в одной плоскости и являются вершинами шестиугольника с равными сторонами. Плоскость, в которой расположен рассматриваемый равносторонний шестиугольник, перпендикулярна прямой BD_1, так как главная диагональ куба перпендикулярна нужным нам диагоналям граней куба, где расположены стороны шестиугольника, и, тем самым, перпендикулярна всем сторонам шестиугольника. Так как при параллельной проекции вдоль BD_1 на плоскость, перпендикулярную BD_1, шестиугольник с вершинами в указанных серединах рёбер куба проектируется в равный ему шестиугольник, то и он сам является правильным шестиугольником.

Правильный треугольник также можно получить, пересекая куб плоскостью. Для этого достаточно отметить три точки на рёбрах куба, выходящих из одной вершины куба и находящихся на равных расстояниях от этой общей вершины (т.е. «отрезать правильную пирамидку»).

Таким образом, при пересечении куба плоскостью из правильных многоугольников могут появиться только треугольник, квадрат или шестиугольник.

3. Площадь максимального сечения. Рассмотрим сечение куба с ребром a плоскостью, перпендикулярной его главной диагонали. Как зависит периметр и площадь многоугольника, получающегося в сечении, в зависимости от выбора секущей плоскости ?

Для того, чтобы выяснить это, расположим куб так, как показано на рис. 6 (три грани куба лежат в координатных плоскостях; O – одна из вершин куба и начало координат, OD – главная диагональ куба; L, M, N – точки пересечения секущей плоскости с осями координат и H – точка пересечения плоскости LMN с диагональю OD куба).

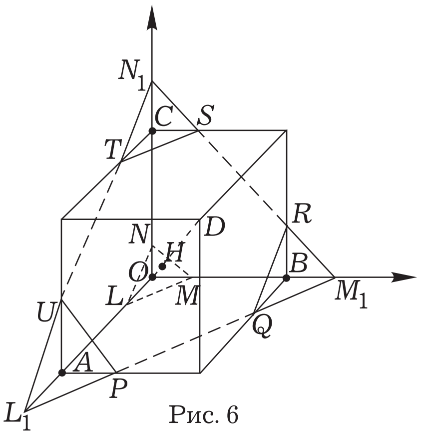


Рис. 6

Рассмотрим плоскость Π, пересекающую Ox, Oy, Oz соответственно в точках L, M, N таких, что $OL = OM = ON = x$, x – положительная переменная. Плоскость Π перпендикулярна OD (объясните – почему?), и сначала выясним при каких значениях x плоскость Π пересекает куб и охарактеризуем различные формы сечения.

Рассмотрим куб с рёбрами OL, OM, ON; он подобен данному кубу по отношению к точке O и диагональ OD содержит диагональ этого куба. Плоскость $\Pi = LMN$ пересечёт куб, если $0 \le OH \le OD$.

Рассматривая пирамиду $OLNM$ (рис. 7), из треугольника ONH нахо-

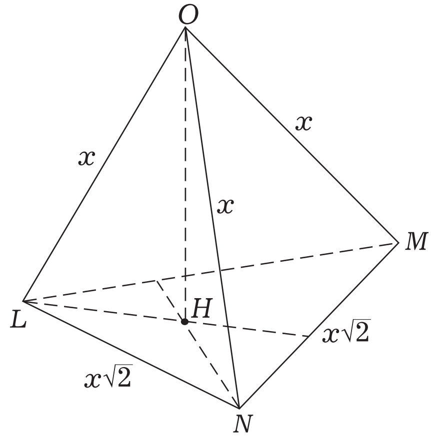


Рис. 7

дим $OH = x/\sqrt{3}$ (проведите вычисления самостоятельно). Отсюда заключаем, что плоскость Π пересекает куб, если

$$0 \le \frac{x}{\sqrt{3}} \le a\sqrt{3} \text{ или } 0 \le x \le 3a.$$

При этом, если $0 < x \le a$, то в сечении получается равносторонний треугольник LMN; если $a < x < 2a$ (это случай $L_1M_1N_1$ на рис. 6), то в сечении получается шестиугольник $PQRSTU$; наконец, если $2a \le x < 3a$, то сечение – снова равносторонний треугольник.

Обозначим через $p(x)$ периметр сечения куба плоскостью Π. Если $0 < x \le a$, то $p(x) = 3x\sqrt{2}$ (см. рис. 7). Если $a < x < 2a$, то сечение – шестиугольник $PQRSTU$. Треугольник QM_1R – равносторонний, значит, $QR = RM_1$. Следовательно,

$$QR + RS = SM_1 = CB = a\sqrt{2}$$

(см. рис. 6), и поэтому в этом случае $p(x) = 3a\sqrt{2}$. Наконец, если $2a \le x \le$ $< 3a$, то из свойства симметрии заключаем, что $p(x) = 3(3a - x)\sqrt{2}$. График функции $p = p(x)$ изображён на рис. 8,

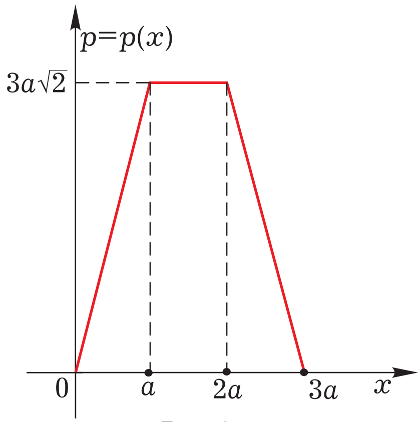


Рис. 8

который представляет собой ломаную линию с участком, параллельным оси Ox.

Обозначим через $S(x)$ площадь сечения куба плоскостью Π. Если $0<x\le a$ (см. рис. 7), то $S(x)=\dfrac{x^2\sqrt{3}}{2}$.

Если $a<x<2a$, то $S(x)$ можно получить, вычитая из площади равностороннего треугольника $L_1M_1N_1$ площади трёх равных равносторонних треугольников QRM_1, TSN_1, UPL_1. Из равнобедренного прямоугольного треугольника QBM_1 (рис. 6) находим, что $QM_1=(x-a)\sqrt{2}$, и поэтому

$$S(x)=\frac{x^2\sqrt{3}}{2}-3\cdot\frac{2(x-a)^2\sqrt{3}}{4}=$$

$$=\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}-\sqrt{3}\Big(x-\frac{3a}{2}\Big)^2.$$

Если теперь $2a\le x<3a$, то опять используя симметрию задачи, получаем, что $S(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(3a-x)^2$.

График функции $S=S(x)$ изображён на рис. 9 – он состоит из дуг трёх парабол.

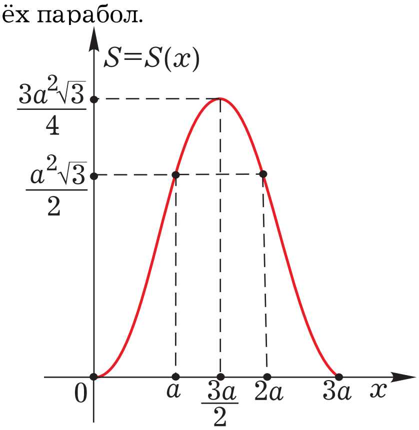


Рис. 9

Упражнения

1. Как можно проверить, что $S(x)$ не имеет излома при $x=a$ и $x=2a$?

2. Как в пространстве нужно расположить спичечный коробок, чтобы площадь тени (параллельной проекции) была максимальной?

3. На плоскости задана часть параллельной проекции каркасного куба (т.е., он сконструирован только из отрезков-рёбер). Получилась она так: сначала нарисовали проекцию всего такого куба, а затем «стерли» одну вершину и три ребра, которые содержат эту вершину. При помощи циркуля и линейки восстановите стёртые вершину и рёбра.

4. Куб пересекается плоскостью, проходящей через одну из главных его диагоналей. Как должна быть проведена эта плоскость, чтобы площадь сечения получилась наименьшей?

Ответ. Плоскость должна проходить через диагональ и середину любого скрещивающегося с ней ребра.

5. Из данного деревянного куба вытесана шестиугольная призма наибольшего объёма. Оцените, какой процент материала использован?

Ответ. Примерно 70%.

6. На какие углы можно поворачивать вокруг прямой деревянный кубик так, чтобы он совместился сам с собой? Укажите оси вращения.

Ответ. 90°, 180°, 270°, 60°, 120°, 240°, 300°, 360°.