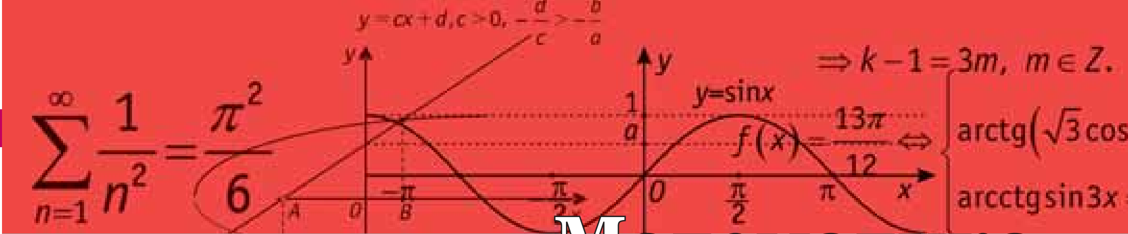

Сгибнев Алексей Иванович
Кандидат физико-математических наук, учитель математики школы-интерната «Интеллектуал», г. Москва.

Как приближённо вычислять корни и решать кубические уравнения?

В статье рассматриваются приближённые методы вычисления квадратных корней из данного числа и решения уравнений третьей степени. Эти методы были открыты древнегреческим учёным Героном Александрийским и известным английским учёным Исааком Ньютоном, выдержки из трудов которых мы включили в основной текст статьи.

Метод Герона

Квадратное уравнение $x^2 - a = 0$ при заданном $a > 0$ имеет два решения, одним из которых является действительное число $x = \sqrt{a}$. Как приближённо найти его значение в тех случаях, когда число a не является полным квадратом? Метод, который мы изложим, был известен ещё в Древней Греции и приписывается Герону Александрийскому. Герон жил в I веке н. э. и описал в своих книгах закон отражения света, формулу вычисления площади треугольника по трём сторонам, многочисленные механизмы. Интересно, что и в наше время метод Герона используется во многих компьютерных программах и для проведения расчётов на калькуляторах.

Обратимся к тексту самого Герона, который на примере приближённого вычисления $\sqrt{720}$ объясняет свой метод[1].

«Так как 720 не имеет рационального корня, то возьмём корень с очень малой погрешностью следующим образом. Так как ближайший к 720 квадрат есть 729, и он имеет корнем 27, то раздели 720 на 27. Получается $26\frac{2}{3}$. Приложи 27. Получа-

[1] Числа даны в современной записи; слова в квадратных скобках добавлены для связности текста [1, с. 338–339].

ется $53\frac{2}{3}$. Половину этого. Получается $26\frac{5}{6}$. Итак, ближайший корень из 720 будет $26\frac{5}{6}$. [Если помножить] на самое себя, получается $720\frac{1}{36}$, так что погрешность есть 36-я часть единицы. Если мы пожелали бы, чтобы погрешность стала меньшей частью [единицы], чем 36-я, то вместо 729 мы возьмём только найденное $720\frac{1}{36}$ и, проделав то же самое, найдём, что погрешность гораздо меньше, чем $\frac{1}{36}$».

В этом тексте Герона содержится три соображения:

1) выбор начального приближённого значения;

2) способ уточнения выбранного начального приближения;

3) возможность повторения этого способа уточнения (итерация).

Начнём со второго. Пусть нам надо вычислить $\sqrt{a}$ и выбранное нами приближение x_0 меньше истинного значения корня, т. е. $x_0 < \sqrt{a}$; тогда число $\frac{a}{x_0} > \sqrt{a}$ (и наоборот). Поэтому их полусумма

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right)$$

будет находиться ближе к искомому корню, чем x_0, то есть $x_1 - \sqrt{a} < \sqrt{a} - x_0$ (сделайте рисунок и проверьте это самостоятельно!).

Теперь рассмотрим соображение 3): если полученной точности вычислений недостаточно, то можно повторить описанный выше способ уточнения, начиная уже с найденного значения x_1, и найти другое приближённое значение

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right).$$

Такие уточнения можно повторять и дальше, пока мы не достигнем нужной точности.

Таким образом, для достижения результата с нужной точностью можно проводить вычисления по одной и той же формуле:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \ n = 1, 2, 3, \ldots \quad (1)$$

Методы вычислений такого типа называются *итерационными процессами*, а однократное вычисление – *итерацией*. (При этом говорят, что *итерационный процесс сходится к числу* b, если $x_n \to b$ при $n \to \infty$.)

Наконец, остановимся на первом соображении Герона, в котором он предлагает выбирать в качестве x_0 целое число, квадрат которого ближе всего расположен к числу a. Но начальное приближённое значение x_0 можно выбирать и из каких-то других соображений. Более того, если бы мы выбрали в качестве x_0 произвольное положительное число, то описанный итерационный процесс всё равно бы сходился к $\sqrt{a}$. (Конечно, это утверждение требует доказательства, на котором мы здесь не будем останавливаться.)

В таблице 1 приведены результаты вычислений для числа $\sqrt{3}$. Совпадающие знаки двух последовательных итераций в этой таблице выделены жирным шрифтом. Видно, что десятичные знаки быстро стабилизируются (перестают меняться) и *разумно предположить, что знаки, совпавшие на двух последовательных итерациях, не будут меняться и впредь*. Тем самым мы можем оценить погрешность приближения и остановиться на шаге с нужной нам точностью вычислений. Уже на 3-м шаге мы можем ручаться за тысячные, а на 5-м – за десятимиллионные!

Таблица 1

Итерация	Значение
0 (начальное приближение)	1
1	2
2	**1,7**5
3	**1,73**2142857
4	**1,7320508**10
5	**1,7320508**08

Упражнение 1. Найдите методом Герона приближённое значение для $\sqrt{2}$ с точностью до 10^{-7}, наблюдая за десятичными знаками приближений и выписывая результаты вычислений в таблицу. Сколько понадобится для этого итераций?

Замечание 1. Для приближённого вычисления *кубических* корней вида $\sqrt[3]{a}$ нетрудно придумать «аналог метода Герона»:

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n^{\;2}}\right),\quad n=1,\ 2,\ 3,\ldots \qquad (2)$$

Проверьте сходимость этого процесса.

Метод Ньютона

В 1669 году крупнейший английский учёный Исаак Ньютон (1643–1727) описал способ приближённого решения алгебраических уравнений, который до сих пор широко используется. Снова предоставим слово автору.

«Пусть требуется решить уравнение

$$x^3-2x-5=0, \qquad (3)$$

и 2 представляет то число, которое отличается от искомого корня меньше, чем на свою десятую часть. Тогда я полагаю $2+p=x$ и подставляю это выражение в уравнение, причём получится новое:

$$p^3+6p^2+10p-1=0, \qquad (4)$$

у которого следует определить корень p, чтобы прибавить его к первому результату. Отсюда (пренебрегая p^3+6p^2 по малости), имеем приблизительно

$$10p-1=0,$$

или $p=0{,}1$.

Поэтому я пишу в результате 0,1 и полагаю $0{,}1+q=p$; это выражение я подставляю, как и раньше, причём получается

$$q^3+6{,}3q^2+11{,}23q+0{,}061=0.$$

...Уравнение почти соответствует истине, или q почти равно $-0{,}0054$...

Полагая $-0{,}0054+r=q$, я это выражение подставляю, как раньше, и продолжаю эти операции сколько угодно раз». [2, с. 83–85.]

Давайте разберёмся в этом тексте. Итак, Ньютон заметил, что корень уравнения (3) близок к числу 2. Обозначив через p поправку, он составил уравнение (4) для p. Оно, вообще говоря, ничуть не проще исходного уравнения (3). Но тут Ньютон высказывает главную идею метода: *используя малость поправки, можно резко упростить уравнение для её приближённого вычисления.* А именно, он предлагает отбросить в уравнении (4) все члены старше линейного, так как они близки к 0. Такое действие называется *линеаризацией.* В результате получаем линейное уравнение, которое легко решается. Поправка p найдена, конечно, не совсем точно, и если мы хотим вычислить корень уравнения точнее, то можно найти число q – «поправку к поправке p», подставив её в исходное уравнение (4) для p и точно так же линеаризовав. Такие действия можно продолжать, и, как правило, эти поправки с каждым шагом будут уменьшаться (по абсолютной величине), и по достижении нужной нам точности вычислений мы этот процесс заканчиваем. Так, в примере Ньютона имеем следующее приближённое значение для искомого корня уравнения:

$$x = 2 + p + q \approx 2 + 0{,}1 - 0{,}0054 = 2{,}0946.$$

Применим метод Ньютона к вычислению приближённого значения положительного корня уравнения $x^2 - a = 0$, то есть для приближённого вычисления $\sqrt{a}$. Обозначим начальное приближение через x_0 и положим $x_1 = x_0 + p$, где число p достаточно мало. Тогда

$$x_1^2 - a = (x_0 + p)^2 - a =$$

$$= {x_0}^2 + 2x_0 p + p^2 - a \approx {x_0}^2 + 2x_0 p - a$$

(оставляем только линейную по p часть). Решив уравнение ${x_0}^2 + 2x_0 p - a = 0$ относительно p, получим

$$p = \frac{a - {x_0}^2}{2x_0},$$

и следовательно,

$$x_1 = x_0 + p = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right).$$

Примем за новое приближение найденное число x_1 и положим $x_2 = x_1 + q$. Действуя как и выше, для новой поправки

$$q = \frac{a - {x_1}^2}{2x_1}$$

найдём новое приближённое значение x_2 такое, что

$$x_2 = x_1 + q = x_1 + \frac{a - x_1^2}{2x_1} =$$

$$= \frac{2x_1^2 + a - x_1^2}{2x_1} = \frac{x_1^2 + a}{2x_1} = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right).$$

Другими словами, мы получаем описанный выше итерационный процесс Герона

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \; n = 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

Итак, метод Герона для приближённого извлечения квадратных корней является частным случаем метода, открытого Ньютоном много столетий спустя.

В приведённой формулировке метода Ньютона приходится на каждом шаге делать замену, выписывать новое уравнение, линеаризовывать его. Однако для любого данного уравнения можно проделать эти действия один раз в общем виде и пользоваться готовой итерационной формулой. Соотечественник Ньютона Дж. Рафсон в 1690 году произвёл модификацию этого метода Ньютона. Он находил последовательные приближения $x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots$ по одной и той же формуле и не пользовался промежуточными уравнениями с последующими их линеаризациями. Он показал (используя понятие производной), что все поправки Ньютона можно брать по единой формуле, получив итерационный процесс (рекуррентную формулу) в виде

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \; n = 0,\ 1,\ 2, \ldots \qquad (5)$$

В таком виде метод Ньютона изложен Л. Эйлером в «Основаниях дифференциального исчисления» в 1755 году, и именно в таком виде этим методом пользуются сейчас, называя его *методом касательных Ньютона*.

Такое название этот метод получил благодаря его наглядной геометрической интерпретации. Например, для уравнения из рукописи Ньютона строим график $y = x^3 - 2x - 5$. Проводим касательную к точке графика с абсциссой x_0 и находим точку пересечения

x_1 этой касательной с осью абсцисс. Из точки графика с абсциссой x_1 снова проводим касательную и т. д. (рис. 1). Проверьте, что такая «геометрическая процедура» приводит к формулам (5).

Упражнение 2. Примените метод касательных Ньютона к уравнению $x^3 - a = 0$. Сравните получившийся итерационный процесс с формулой (2). Сравните скорости сходимости этих двух процессов.

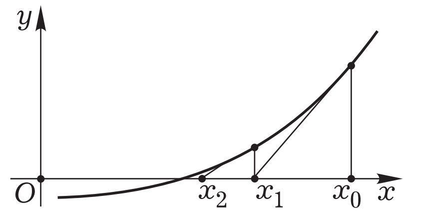

Рис. 1

Особенности метода Ньютона

При использовании метода Ньютона важным является вопрос о выборе начального значения x_0 в итерационном процессе (5). А именно, как нужно выбрать x_0, чтобы метод касательных Ньютона сходился (или расходился)?

Сам Ньютон в разобранном им примере доказательства сходимости не приводил, ограничиваясь таким замечанием: «Доказательство его (метода) явствует из самого способа действия, на основании чего его легко в случае необходимости вспомнить». Но, как мы увидим ниже, здесь не всё обстоит просто. Например, какие особенности имеет метод, если уравнение третьей степени имеет три разных корня? Полностью ответить на этот вопрос здесь не представляется возможным. Ограничимся рассмотрением уравнения

$$x^3 - x = 0 \qquad (6)$$

с корнями $x = 0; \pm 1$.

Упражнение 3. Напишите итерационный процесс для уравнения (6). Исследуйте его сходимость для начальных приближений x_0 от $-1{,}5$ до $+1{,}5$ (скажем, с шагом 0,1) и попробуйте заметить (например, графически) разные случаи сходимости метода Ньютона.

О результатах полного исследования сходимости метода Ньютона для уравнения (6), которое мы здесь не проводим, можно судить по рис. 2, где каждый корень этого уравнения помечен своим цветом. Тем же цветом помечено каждое из множеств тех точек, начав с любой точки x_0 которого последовательность итераций Ньютона сходится к соответствующему корню.

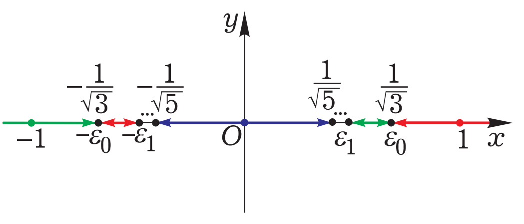

Рис. 2

Итак, у каждого корня есть своя *зона притяжения*. Если наше начальное приближение x_0 попадёт в правильную зону, то процесс сойдётся к нужному нам корню. Например, если $x_0 > \frac{1}{\sqrt{3}}$, то $x_n \to 1$, а если $x_0 < -\frac{1}{\sqrt{3}}$, то $x_n \to -1$. Кроме того, на оси Ox имеются точки, начиная с которых метод касательных Ньютона не сходится (их нужно отметить новым, четвёртым, цветом; пусть это будет чёрный цвет). Такими точками, например, являются точки $\pm 1/\sqrt{3}$, в которых функция $p(x) = x^3 - x$ достигает своих (локальных) экстремальных значений. Чёрными являются также точки $\pm 1/\sqrt{5}$, начиная с которых метод Ньютона сразу зацикливается: если, например, $x_0 = 1/\sqrt{5}$, то $x_1 = -1/\sqrt{5}$ и $x_2 = 1/\sqrt{5} = x_0$ (если $x_0 = -1/\sqrt{5}$, то $x_1 = 1/\sqrt{5}$, и $x_2 = -1/\sqrt{5} = x_0$). Проводя геометрические эксперименты с проведением касательных к графику функции $y = x^3 - x$ можно заметить, что точек чёрного цвета (отличных от $\pm 1/\sqrt{3}$ и $\pm 1/\sqrt{5}$) бесконечно много, и они делят интервалы $(-1/\sqrt{3};\ -1/\sqrt{5})$ и $(1/\sqrt{5};\ 1/\sqrt{3})$ на оси Ox на бесконечное число более мелких интервалов $(\varepsilon_{n+1};\ \varepsilon_n)$, $(-\varepsilon_n;\ -\varepsilon_{n+1})$, начиная с которых (выбрав в одном из них какое-либо значение x_0) процесс Ньютона сходится к тому или иному корню уравнения (6). А именно (рис. 2):

а) все точки $x = \pm\varepsilon_n\ (n \in N)$ являются чёрными точками (точками расходимости метода Ньютона); более того, если $x_0 = \varepsilon_n$ (при каком-то фиксированном n), то итерационный процесс зацикливается;

б) $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ и при каждом фиксированном $n \in N$ все точки каждого из двух интервалов $(\varepsilon_{n+1};\ \varepsilon_n)$ и $(-\varepsilon_n;\ -\varepsilon_{n+1})$ окрашены в один цвет, но цвета интервалов между собой различны;

в) имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt{5}};$$

г) если $x_0 \in (-1/\sqrt{5};\ +1/\sqrt{5})$, то метод Ньютона сходится к корню $x = 0$ уравнения (6).

Упражнение 4. Найдите зоны притяжения для вычисления $\sqrt{a}$ методом Герона–Ньютона.

Замечание 2. Итерационный метод Ньютона можно применять и для алгебраических уравнений более высоких степеней (и даже для приближённого вычисления его комплексных корней!).

«Уравнения высших степеней решаются совершенно так же», – замечает Ньютон и тут же подчеркивает свою основную идею линеаризации: «Дело будет к концу облегчено, как это было сделано здесь, если ты будешь постепенно отбрасывать первые его члены».

Однако уже на примере простейшего уравнения (6) мы «видели те красоты», которые нас ожидают, если пытаться найти зоны притяжения всех корней уравнения и множество расходимости метода Ньютона.

Для самостоятельных рассмотрений мы предлагаем изучить зоны притяжения и множество расходимости итерационного метода Ньютона для уравнений четвёртой степени вида $x^4 \pm x^2 + px + q = 0$ (к таким двум уравнениям сводится практически любое из уравнений четвёртой степени). Этот **исследовательский проект** может стать основой для подготовки доклада на научной конференции школьников.

Автор благодарен Э.Э. Шнолю за помощь в работе.

Литература

1. *Выгодский М.Я.* Арифметика и алгебра в древнем мире. – М.: «Наука», 1967.

2. *Ньютон И.* Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов. 1669, опубл. в 1711 г./ Хрестоматия по истории математики. Арифметика и алгебра, и др. Под ред. А.П. Юшкевича. – М.: «Просвещение», 1976.