Пиголкина Татьяна Сергеевна
Кандидат физико-математических наук, доцент МФТИ, заслуженный преподаватель МФТИ, специалист ЗФТШ при МФТИ, редактор журнала «Потенциал».

Конкурсные и олимпиадные задачи на экстремум

В последние годы на ЕГЭ задачи на экстремум предлагаются только на профильном уровне, и при этом не требуется предоставления полного решения, только ответ. По содержанию – это исследование конкретно заданной функции на экстремум с помощью производной или на нахождения наименьшего и наибольшего значений функции на некотором отрезке. Такие задачи легче приведённых ниже задач 1 – 4.

Конкурсные и олимпиадные задачи на экстремум могут быть по алгебре, планиметрии и стереометрии. Последние относятся к задачам повышенной сложности.

Часть задач, связанная конкретно с исследованием на экстремум, может быть решена, как правило, на основе одного из трёх способов:

1. Применение неравенства о среднем геометрическом и среднем арифметическом и его следствий (подробно см. статью в нашем журнале №8 за 2016 год, с. 17).

2. Использование экстремального свойства квадратичной функции

$$y(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0.$$

Из равенства

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

следует, что функция $y(x) = ax^2 + bx + c$ имеет при $a > 0$ наименьшее значение и при $a < 0$ наибольшее значение, равное $c - \frac{b^2}{4a}$, при $x = -\frac{b}{2a}$.

3. Сведение к исследованию функции на экстремум с помощью производной. Здесь важно знание точных определений максимума и минимума функции в точке, определение

критической точки функции и применение теоремы о достаточном условии экстремума:

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a, имеет производную в некоторой «проколотой» окрестности точки a (т. е. окрестность точки a без самой точки) и слева, и справа от точки a производная имеет разные знаки, то a – *точка экстремума*. Причём, если $f'(x) < 0$ слева, $f'(x) > 0$ справа, то a – точка минимума; если же слева $f'(x) > 0$, справа $f'(x) < 0$, то a – точка максимума.

Часто говорят о смене знака производной с «–» на «+», обозначают на оси точку a и знаки производной слева и справа, указывают убывание и возрастание функции по теореме о монотонности – это помогает легче установить минимум (соответственно, смена знака с «+» на «–» даёт максимум).

Ниже указано, из каких олимпиад взяты задачи по стереометрии. Задачи по алгебре и планиметрии – это аналоги задач из олимпиад различных университетов (МГУ, МФТИ, МЭИ, НГУ, СПГУ и др.).

Задача 1. Найти точки экстремума функции $y(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 1$.

Решение. Данная функция – многочлен, определена, непрерывна и дифференцируема на всей оси. Находим производную

$$y' = 3x^2 - 10x + 3$$

и определяем критические точки там, где производная равна нулю:

$$y' = 0 \Leftrightarrow (3x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1/3, \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Рассмотрим знаки производной, применив метод интервалов (рис. 1).

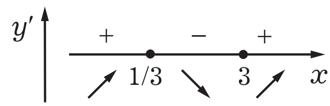

Рис. 1

На рис. 1 указано также монотонное возрастание и убывание функции на соответствующих интервалах.

По теореме о достаточных условиях экстремума функция $y(x)$ имеет в точке $x = \frac{1}{3}$ максимум (производная слева отрицательна, справа – положительна), $y\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{14}{27}$; а в точке $x = 3$ функция имеет минимум (производная меняет знак с «–» на «+»), $y(3) = -10$.

Ответ. $x = \frac{1}{3}$ – точка максимума, $x = 3$ – точка минимума.

Замечание 1. Найденные точки экстремума правильнее называть точками локального максимума и точками локального минимума, ведь само определение максимума и минимума даётся для некоторой окрестности точки (локальный – местный, свойственный данному месту).

Замечание 2. Такое исследование кубической функции $y(x)$ позволяет определить число нулей уравнения $y(x) = 0$. На рис. 2 – эскиз графика функции $y(x)$ из задачи 1 (масштаб на оси ординат уменьшен). Отметим точки экстремума и значения функции в них, учтём монотонность в соответствии со знаками производной, отметим $y(0) = -1$ и проведём через характерные точки плавную кривую.

Из рис. 2 легко понять, что уравнение $x^3 - 5x^2 + 3x - 1 = 0$ имеет единственный корень и он лежит в интервале (4; 5), так как $y(4) < 0$, $y(5) > 0$.

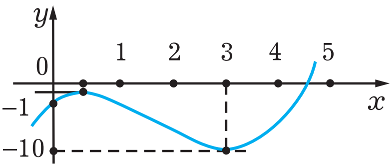

Рис. 2

Задача 2. Найти наибольшее значение функции

$$y = 2^{\cos 2x + 5\sin x + 1}.$$

Решение. Функция $y = 2^z$ – показательная с основанием $a = 2 > 1$, эта функция монотонно возрастающая. Её наибольшее значение принимается в той точке, в которой показатель имеет наибольшее значение.

Преобразуем показатель

$$\cos 2x + 5\sin x + 1 = \left(1 - 2\sin^2 x\right) + 5\sin x + 1,$$

$$z(x) = -2\sin^2 x + 5\sin x + 2.$$

Функция $z(x)$ – квадратичная относительно $\sin x$. Положим $\sin x = t$ и исследуем функцию $z(t) = -2t^2 + 5t + 2$ на отрезке $[-1; +1]$. Выделив полный квадрат, запишем

$$z(t) = -2\left(t - \frac{5}{4}\right)^2 + 2\cdot\frac{25}{8}.$$

Наибольшее значение функция $z(t)$ принимает в точке $t = \dfrac{5}{4}$, но эта точка не лежит на отрезке $[-1; +1]$. Точка максимума функции $z(t)$ лежит правее точки $z = 1$, следовательно, на отрезке $[-1; +1]$ $z(t)$ монотонно возрастает и принимает своё наибольшее значение в точке $t = 1$. Итак,

$$z_{\max} = z(1) = 5 \text{ и } y_{\max} = 2^5.$$

Ответ. 2^5.

Задача 3. Найти наименьшее значение функции

$$y(x) = x\left(\ln^2 x - 3\ln x + 3\right) \text{ при } x \ge 1.$$

Решение. При $x = 1$ функция $y(1) = 3$. Исследуем функцию на экстремум при $x > 1$. Функция непрерывна, дифференцируема. Найдём её производную:

$$y' = \left(\ln^2 x - 3\ln x + 3\right) +$$
$$+x\left(2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x} - 3\cdot\frac{1}{x}\right) = \ln^2 x - \ln x.$$

Пусть $\ln x = t$. По условию $x > 1$, значит, $\ln x > 0$ и $t = \ln x$ монотонно возрастает на интервале $(1; +\infty)$. Имеем

$$y' = t^2 - t = t(t-1).$$

Производная при $t > 0$ обращается в ноль только в точке $t = 1$. Слева от точки $t = 1$ производная меньше нуля, справа – больше нуля. По теореме о достаточном условии экстремума функция $y(t)$ имеет минимум в точке $t = 1$, т. е. когда $\ln x = 1$, $x = e$, $y(e) = e < 3$. Наименьшее значение функции равно e.

Ответ. e.

Задача 4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$$y(x) = 4x + 6|x - 2| - x^2$$

на отрезке $[-1; 4]$.

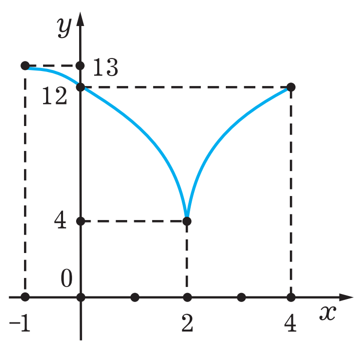

Рис. 3

Решение. По определению модуля

$$|x-2|=\begin{cases}2-x, \text{ если } x\le 2,\\ x-2, \text{ если } x\ge 2,\end{cases}$$

поэтому

$$y(x)=\begin{cases}-x^2-2x+12, \text{если } -1\le x\le 2,\\ -x^2+10x-12, \text{если } -2\le x\le 4.\end{cases}$$

На отрезке $[-1;2]$ $y(x)=13-(x+1)^2$, в точке $x=-1$ $y(x)=13$ (это вершина параболы), а на $[-1;\ 2]$ она монотонно убывает до $y(2)=4$. (Можно было взять производную $y'=-2x+2$, $y<0$ при $x\in(-1;2)$. На отрезке $[2;\ 4]$ $y(x)=13-(x-5)^2$, это парабола, вершина её в точке $x=5$, которая лежит правее точки $x=4$. Значит, $y(x)$ возрастает от $y(2)=4$ до $y(4)=12$. Эскиз графика дан на рис. 3. На отрезке $[-1;\ 4]$ наименьшее значение функции равно $y(2)=4$, наибольшее значение равно $y(-1)=13$.

Ответ. 4 и 13.

Задача 5. Найти минимум и максимум функции $x+2y$ при выполнении условия

$$3x-2xy+4y^2\le 5.$$

Решение. Обозначим $t=x+2y$, тогда $x=2y-t$ и условие примет вид

$$20y^2-14yt+3t^2-5\le 0.$$

Необходимо установить границы изменения t при всех допустимых значениях y.

Квадратичная функция $f(y)=ay^2+$ $+by+c$ с положительным коэффициентом a может принимать отрицательные значения только в интервале между её корнями. Значит, $f(y)\le 0$ лишь при дискриминанте $D\ge 0$. Это и есть условие на допустимые значения y. Имеем

$$D=(14t)^2-4\cdot 20\left(3t^2-5\right)=$$

$$=4\left(100-11t^2\right),\ \ D\ge 0 \text{ при } |t|\le\frac{10}{\sqrt{11}}.$$

Ответ. $-\dfrac{10}{\sqrt{11}}\le x+2y\le\dfrac{10}{\sqrt{11}}.$

Задача 6. Среди всех решений системы

$$\begin{cases}3y+2x\ge 2,\\ x^2+y^2-2x-4y\le 4\end{cases}$$

найти такое, при котором принимает наименьшее значение выражение

$$F(x,y)=x^2+y^2+4x+6y+13.$$

Решение. Прямая $3y+2x=2$ разделяет координатную плоскость на две полуплоскости; множество точек, удовлетворяющих неравенству $3y+2x\ge 2$, лежит выше этой прямой и на самой прямой.

Второе неравенство системы перепишем в виде $(x-1)^2+(y-2)^2\le 9$. Оно определяет множество точек круга радиуса 3 с центром в точке $A(1;\ 2)$. Всё множество M решений системы – пересечение указанных множеств (рис. 4).

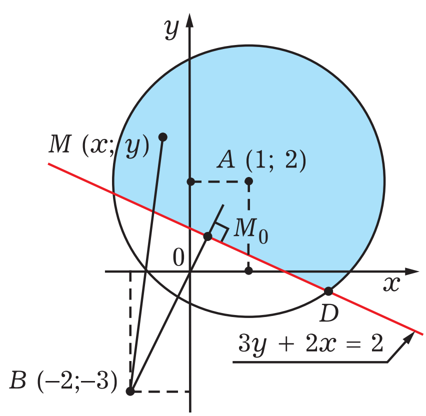

Рис. 4

Выражение

$$F(x,y)=x^2+y^2+4x+6y+13=$$
$$=(x+2)^2+(y+3)^2$$

равно квадрату расстояния от фиксированной точки $B(-2;-3)$ до точки $M(x;y)$, действительно,

$$MB=\sqrt{(-2-x)^2+(-3-y)^2}.$$

Для точек $M(x;y)$ из множества M решений системы наименьшее значение MB равно наименьшему расстоянию от точки B до точек множества M.

Оно равно длине перпендикуляра из точки B на прямую $3y+2x=2$, если основание перпендикуляра принадлежит отрезку CD.

Для прямой $3y+2x=2$ уравнение перпендикулярной ей прямой будет $2y-3x=b$ (две прямые $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ перпендикулярны, если $k_1\cdot k_2=-1$), значение b находится из условия, что перпендикулярная прямая проходит через точку $B(-2;-3)$. Подставляя $x=-2$, $y=-3$, получаем $b=0$. Точка пересечения прямых $3y+2x=2$ и $2y-3x=0$ легко находится: $x_0=\frac{4}{13}$, $y_0=\frac{6}{13}$. Точка $M_0(x_0;\ y_0)$ принадлежит кругу: $(x_0-1)^2+(y_0-2)^2<9$, значит, точка M_0 лежит на отрезке CD и $\min F(x,y)=M_0B$.

Ответ. $\left(\frac{4}{13};\frac{6}{13}\right)$.

Задача 7. Среди всех равнобедренных треугольников с одинаковой медианой длины m к боковой стороне найти треугольник с наибольшей площадью. Найти угол при вершине этого треугольника и его площадь.

Решение. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с основанием AC, медианой AM к боковой стороне, $AM=m$ (рис. 5). Пусть $\angle ABC=\alpha$ и $AB=BC=x$.

Применим теорему косинусов к треугольнику ABM:

$$m^2=x^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2-2x\cdot\frac{x}{2}\cos\alpha \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow m^2=\left(\frac{5}{4}-\cos\alpha\right)x^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2=\frac{4m^2}{5-4\cos\alpha}.$$

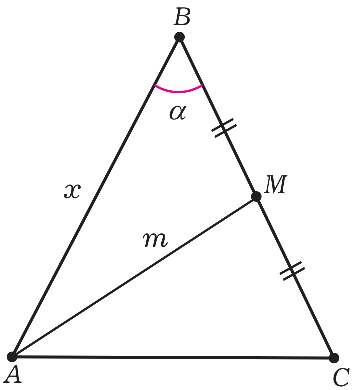

Рис. 5

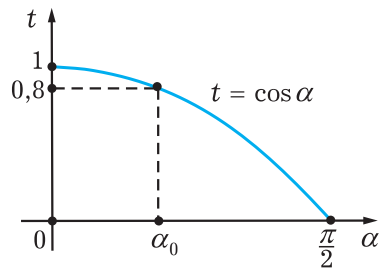

Рис. 6

По формуле площади треугольника $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ имеем $S=S_{ABC}=$ $=\frac{1}{2}x^2\sin\alpha$. Подставив выражение для x^2, получим $S = 2m^2 \dfrac{\sin\alpha}{5 - 4\cos\alpha}$, т. е. $S = S(\alpha)$.

Находим производную

$$S'(\alpha) = 2m^2 \frac{5\cos\alpha - 4}{(5 - 4\cos\alpha)^2},$$

$S' = 0$ при $\cos\alpha_0 = 0,8$, $\alpha_0 = \arccos 0,8$, угол α_0 – острый. На промежутке $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ $\cos\alpha$ убывает (рис. 6), поэтому при $\alpha < \alpha_0$ производная положительная ($\cos\alpha > 0,8$), а при $\alpha > \alpha_0$ производная отрицательная ($\cos\alpha < 0,8$). По теореме о достаточном условии экстремума точка α_0 – точка максимума. Находим $\sin\alpha_0 = 0,6$ и наибольшую возможную площадь треугольника $S(\alpha_0) = \dfrac{2}{3}m^2$.

Ответ. $\arccos 0,8$ и $\dfrac{2}{3}m^2$.

Задача 8. (МЭИ) В равнобедренной трапеции $ABCD$ большее основание $AD = 8$, острый угол при основании равен α. Диагональ трапеции перпендикулярна её боковой стороне. Найти значение α, при котором площадь трапеции будет наибольшей. Найти это значение площади.

Решение. В равнобедренной трапеции с основанием $BC = b$, $AD = a$ ($b < a$), из $BF \perp AD$ и $CE \perp AD$ следует $AF = ED = \dfrac{a - b}{2}$ и $AE = \dfrac{a + b}{2}$ (рис. 7).

По условию треугольник ACD прямоугольный с гипотенузой AD, CE – высота к гипотенузе, $\angle\ CDE = \alpha$, поэтому $\angle\ ACE = \alpha$. Из прямоугольных треугольников ACD и CED имеем:

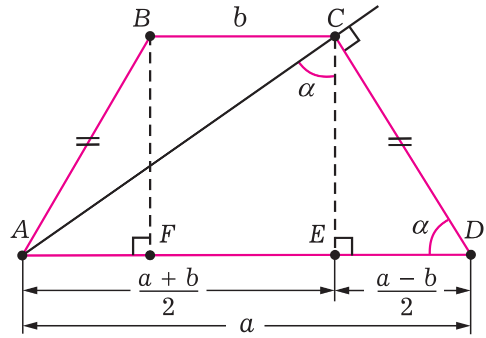

Рис. 7

$$CD = a \cdot \cos\alpha,\ CE = CD \cdot \sin\alpha = a\cos\alpha\sin\alpha,$$

$$AC = a \cdot \sin\alpha,\ AE = AC \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin^2\alpha.$$

Итак, $AE = \dfrac{a + b}{2} = a \cdot \sin^2\alpha$, высота трапеции $CE = h = a\cos\alpha\sin\alpha$, площадь трапеции $S = \dfrac{a + b}{2}h = a^2\sin^3\alpha \cdot \cos\alpha$ – функция аргумента α.

Находим производную:

$$S'(\alpha) = a^2\left(3\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha - \sin^4\alpha\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S'(\alpha) = a^2\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha\left(3 - \operatorname{tg}^2\alpha\right),$$

угол α – острый, $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$.

На интервале $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ производная обращается в нуль при $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$, т. е. при $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$. На интервале $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ $\operatorname{tg}\alpha$ монотонно возрастает, поэтому при $\alpha < \dfrac{\pi}{3}$ производная положительна, а при $\alpha > \dfrac{\pi}{3}$ – отрицательна. По теореме о достаточном условии экстремума функция $S(\alpha)$ принимает максимальное значение при

$$\alpha = \frac{\pi}{3}\ (\alpha = 60°).$$

При этом

$$S_{\max} = S\left(\frac{\pi}{3}\right) = 64 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = 12\sqrt{3}.$$

Ответ. $\frac{\pi}{3}$; $12\sqrt{3}$.

Задача 9. (МФТИ) Все рёбра правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину a, ABC – основание призмы. Точка M лежит на диагонали BC_1, точка N – на диагонали CA_1 боковых граней. Отрезок MN параллелен плоскости ABB_1A_1. Найти наименьшую возможную длину отрезка MN.

Решение. Возьмём некоторую точку M на диагонали BC_1 и проведём через неё плоскость $DEFG$, параллельную плоскости ABB_1A_1 (рис. 8). Эта плоскость пересечёт отрезок CA_1 в точке N такой, что отрезок MN параллелен плоскости ABB_1A_1, так как он лежит в плоскости $DEFG$, ей параллельной. Положение точки M однозначно определяет отрезок MN.

Из параллельности плоскостей следует $DE \parallel BB_1$, $GF \parallel AA$ и $DG \parallel BA$.

Пусть $BM = x \cdot BC_1$. Поскольку BB_1C_1C – квадрат со стороной a, $\Delta BDM \sim \Delta BC_1C$, то $\frac{BD}{BC} = \frac{DM}{CC_1} = \frac{BM}{BC_1}$, откуда $BD = DM = x \cdot a$.

Треугольник BCA – равносторонний, $DG \parallel BA$, треугольник DCG также равносторонний, $DC = DG = CG = a - x \cdot a$.

Грань AA_1C_1C также квадрат, поэтому $CN = CG = a(1-x)$.

Рассмотрим четырёхугольник $DMNG$ (рис. 9). Это прямоугольная трапеция ($DM \parallel GN$, $DM \perp DG$), в которой $DM = x \cdot a$, $DG = GN = (1-x)a$.

Если $MP \perp GN$, то $DMPG$ – прямоугольник, $MP = (1-x)a$, $PG = xa$, тогда $PN = (1-2x)a$.

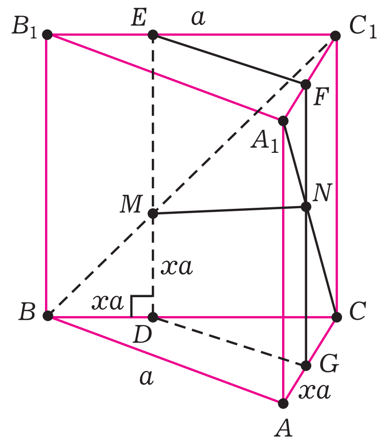

Рис. 8

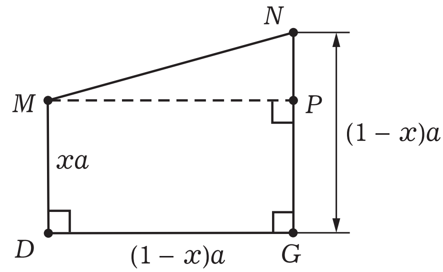

Рис. 9

Из прямоугольного треугольника MPN находим длину отрезка MN:

$$MN = \sqrt{(1-x)^2 + (1-2x)^2}\,a = \sqrt{5x^2 - 6x + 2}\,a.$$

MN принимает наименьшее значение, когда подкоренное выражение принимает наименьшее значение. Так как

$$5x^2 - 6x + 2 = 5\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{1}{5},$$

$\min\left(5x^2 - 6x + 2\right) = \frac{1}{5}$ при $x = \frac{3}{5}$. Значит, наименьшая возможная длина отрезка MN равна $\frac{a}{\sqrt{5}}$.

Ответ. $\frac{a}{\sqrt{5}}$.

Задача 10. («Покори Воробьёвы горы») В правильной треугольной пирамиде высота, проведённая из вершины основания к противоположной грани, равна 4. Найти наименьшее возможное значение полной поверхности такой пирамиды.

Решение. Основание пирамиды – правильный треугольник ABC (рис. 10).

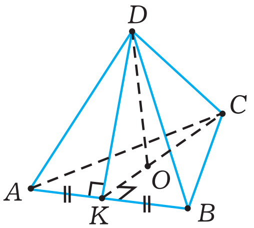

Рис. 10

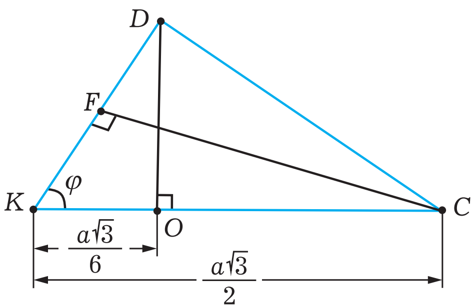

Рис. 11

Основание высоты DO совпадает с центром треугольника ABC. Если точка K – середина ребра AB, то $CK \perp AB$ и $DK \perp AB$, точка O лежит на высоте CK треугольника ABC и $CO = \frac{2}{3}CK$.

Точка C равноудалена от концов отрезка AB, поэтому основание высоты из точки C на грань ABD лежит на серединном перпендикуляре отрезка AB, т. е. на прямой KD (наклонные равны $\Rightarrow$ равны проекции), обозначим эту высоту CF (рис. 11).

Рассмотрим треугольник CDK. Пусть сторона основания ABC равна a, $\angle DKC = \varphi$. Имеем:

$CK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $KO = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, DO – высота пирамиды, $CF = 4$ – другая высота. Апофему DK обозначим h. Из $\Delta\, CFK$ следует $CK = CK\sin\varphi$, то есть $4 = \frac{a\sqrt{3}}{2}\sin\varphi$, откуда $a = \frac{8}{\sqrt{3}\sin\varphi}$; а из $\Delta\, DOK$ следует $\frac{a\sqrt{3}}{6} = h\cos\varphi$, откуда $h = \frac{1}{3}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{\cos\varphi} = \frac{4}{3}\frac{1}{\sin\varphi\cos\varphi}$.

Полная поверхность пирамиды равна сумме площади основания $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ и трёх площадей боковых граней, равных $\frac{1}{2}ah$, то есть $S_п = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{2}ah$. Подставив выражения для a и h, получим

$$S_п = \frac{16}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sin^2\varphi} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sin\varphi\cos\varphi} =$$

$$= \frac{16}{\sqrt{3}}\frac{(\cos\varphi + 1)}{\sin^2\varphi\cos\varphi} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_п = \frac{16}{\sqrt{3}}\frac{1+\cos\varphi}{\left(1-\cos^2\varphi\right)\cdot\cos\varphi} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_п = \frac{16}{\sqrt{3}}\frac{1}{(1-\cos\varphi)\cdot\cos\varphi}.$$

Положим $\cos\varphi = t$, угол φ – острый, $0 < \cos\varphi < 1 \Rightarrow t \in (0;1)$. Функция $f(t) = (1-t)t = -t^2 + t$ – квадратичная, ветви параболы направлены вниз, $t_{верш} = \frac{1}{2}$, максимальное значение $f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

Итак, максимальное значение произведения $\cos\varphi(1-\cos\varphi)$ равно $1/4$, тогда минимальное значение

$S_п = \frac{16}{\sqrt{3}} \cdot 4 = \frac{64}{\sqrt{3}}$. Это значение площадь полной поверхности принимает при $\cos\varphi = \frac{1}{2}, \varphi = 60°$.

Ответ. $\frac{64}{\sqrt{3}}$.

Задача 11. (Олимпиада школьников «Ломоносов») Найти наибольшее значение объёма треугольной пирамиды, у которой противоположные рёбра попарно равны, а сумма длин всех рёбер равна $36 \cdot \sqrt{2}$.

Решение. Проведём через каждое ребро пирамиды $ABCD$ плоскости, параллельные противолежащим рёбрам, в пересечении плоскостей образуется параллелепипед (рис. 12).

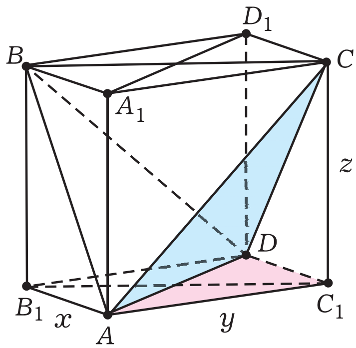

Рис. 12

По условию противоположные рёбра пирамиды равны, например, $AD = BC$, а по построению $B_1C_1 = BC$. Диагонали параллелограмма AB_1DC_1 (нижние основание) равны, значит, AB_1DC_1 – прямоугольник. Аналогично устанавливается, что все грани построенного параллелепипеда – прямоугольники. Из $AB_1 \perp AC_1$ и $AB_1 \perp AA_1$ следует, что AA_1 – высота параллелепипеда к основанию AB_1DC_1. Положим $AA_1 = H$, $S_{AB_1DC_1} = S$, тогда объём параллелепипеда $V_1 = SH$. С другой стороны, объём параллелепипеда равен сумме объёма V пирамиды $ABCD$ и объёмов четырёх треугольных пирамид (содержащих вершины A_1, B_1, C_1 и D_1), в каждой из которых площадь основания составляет половину площади S параллелограмма AB_1DC_1, а высота совпадает с высотой параллелепипеда (например,

$$V_{ADCC_1} = \frac{1}{3} S_{ADC_1} \cdot CC_1 = \frac{1}{6} SH \text{).}$$

Итак, $V_1 = V + 4\left(\frac{1}{6}V_1\right)$, откуда

$$V = \frac{1}{3}V_1 = \frac{1}{3}xyz.$$

По неравенству Коши

$$x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 \le \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}\right)^3,$$

равенство лишь в случае $x^2 = y^2 = z^2$, откуда следует, что

$$\max V = \frac{1}{3}(xyz) = \frac{1}{3}\max\left(\sqrt{x^2 \cdot y^2 \cdot z^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

при $x^2 = y^2 = z^2$, т. е. $\max V = \frac{1}{3}x^3$.

Вернёмся к нашей пирамиде. Пусть $AC = BC = a$, $AB = CD = b$, $AC = BD = c$ и по условию $a + b + c = 18\sqrt{2}$. Из прямоугольных треугольников ADC_1, ABB_1, и ACC_1 получим $a^2 = x^2 + y^2$, $b^2 = x^2 + z^2$, $c^2 = y^2 + z^2$, откуда при $x^2 = y^2 = z^2$ следует $a^2 = b^2 = c^2 = 2x^2$. Значит, $a = b = c = x\sqrt{2}$; из $a + b + c = 18\sqrt{2}$ находим $x = 6$ и определяем максимальное значение объёма пирамиды $ABCD$: $\max V = \frac{1}{3}x^3 = 72$.

Ответ. 72.