Дворянинов Сергей Владимирович
Доцент, кандидат физико-математических наук, редактор журнала «Математика для школьников».

Итерации треугольников

В статье рассматривается симметрия треугольника относительно его сторон.

Рассмотрим произвольный треугольник ABC. Отправляясь от него, последовательно будем по определённому правилу строить другие треугольники. Рассмотрим три прямые, на которых лежат стороны треугольника ABC. На первом шаге отразим каждую вершину треугольника ABC симметрично относительно противоположной прямой – получим новый треугольник $A_1B_1C_1$. На втором шаге с треугольником $A_1B_1C_1$ поступим точно так же, отразив его вершины A_1, B_1, C_1 симметрично относительно соответствующих прямых B_1C_1, A_1C_1, A_1B_1, – получим треугольник $A_2B_2C_2$. Будем продолжать этот процесс дальше.

Задача. Стремятся ли треугольники $A_nB_nC_n$ с ростом номера n к треугольникам какого-либо определённого вида?

Замечание. В пространстве можно рассматривать симметрию каждой из четырёх вершин треугольной пирамиды относительно плоскости, содержащей противоположную грань пирамиды.

Посмотрим на рис. 1, на котором изображены правильный треугольник, три его высоты и три средние линии. Легко заметить, что согласно данному в задаче правилу:

- правильный треугольник переходит в правильный;
- треугольник с углами 30, 30 и 120 градусов переходит в отрезок прямой, так как обе вершины его острых углов переходят в одну точку.

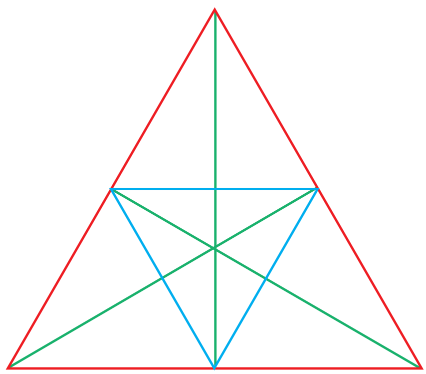

Рис. 1

Мы не знаем полного решения задачи и расскажем сейчас лишь о том, что получается в частном случае, когда *исходный треугольник ABC – равнобедренный.* Описанный переход от треугольника ABC к новому треугольнику ради краткости назовём *с-симметрией* (с – от слова сторона). Легко видеть, что с-симметрия, вообще говоря, переводит равнобедренный треугольник в равнобедренный. Вид равнобедренного треугольника с точностью до подобия определяется одним параметром – величиной угла при его основании или величиной тангенса этого угла. При каждой с-симметрии меняется только один этот параметр. Так что за этим параметром – тангенсом угла при основании – мы и будем следить. Вот что при этом получается.

Итерации равнобедренного треугольника

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с вершинами $A(1;0)$, $B(-1;0)$, $C(0;h)$ при $h>0$ (рис. 2). Точка C – вершина этого треугольника, AB – основание. Вначале тангенс угла при основании равен $\operatorname{tg}\angle A = h$.

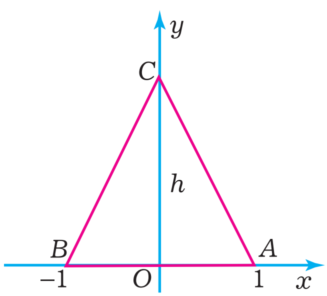

Рис. 2

Укажем координаты двух вершин нового треугольника при с-симметрии треугольника ABC (рис. 3).

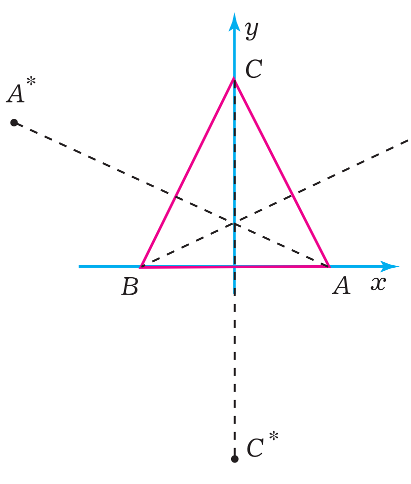

Рис. 3

Точки, симметричные вершинам треугольника относительно сторон, таковы:

$$C^*(0;-h),\ B^*\left(\frac{3h^2-1}{h^2+1};\frac{4h}{h^2+1}\right).$$

Замечания.

1. Координаты точки C^* очевидны.

2. Точка A^* симметрична точке B^* относительно оси ординат, поэтому её координаты не приводим.

3. Координаты точки B^* можно найти так. Прямая AC имеет уравнение

$$y=-h(x-1).$$

Перпендикулярная ей прямая BB^* – уравнение $y=\frac{1}{h}(x+1)$. Точка пересечения этих прямых –

$$P\left(\frac{h^2-1}{h^2+1};\frac{2h}{h^2+1}\right).$$

Исходя из точек B и P, найдём абсциссу точки B^*:

$$x=-1+2\left(\frac{h^2-1}{h^2+1}+1\right)=\frac{3h^2-1}{h^2+1}$$

и затем ординату:

$$y=\frac{4h}{h^2+1}.$$

Далее, в зависимости от абсциссы $x=\frac{3h^2-1}{h^2+1}$ точки B^*, возможны три случая.

Первый случай. Эта абсцисса равна нулю (рис. 4).

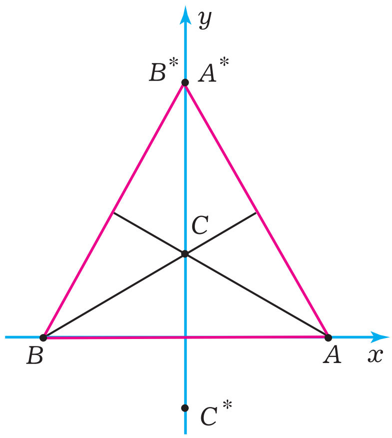

Рис. 4

Так получается, если исходный треугольник имеет углы $30°$, $30°$ и $120°$. В этом случае три новые точки, получаемые из вершин треугольника ABC, лежат на одной прямой – на оси ординат. Формально можно сказать, что они образуют вырожденный равнобедренный треугольник, у которого вершины основания A^* и B^* совпадают. Применить к нему с-симметрию невозможно. Такой треугольник ради краткости назовём *вертикальным*.

Второй случай. Если $x > 0$ (рис. 3), то x – это длина половины основания в новом треугольнике. Длина соответствующей основанию высоты равна

$$h_{\text{нов.}} = h + \frac{4h}{h^2+1} = \frac{h^3+5h}{h^2+1}.$$

Следовательно, тангенс угла при его основании равен

$$\operatorname{tg}\angle A^* = \frac{h_{\text{нов.}}}{x} = \frac{h^3+5h}{3h^2-1}.$$

Третий случай. Пусть $x < 0$. Тогда в новом треугольнике длина половины основания равна $\frac{-3h^2+1}{h^2+1}$, и, следовательно, тангенс угла при основании в новом треугольнике равен

$$\frac{h^3+5h}{h^2+1} : \frac{-3h^2+1}{h^2+1} = \frac{h^3+5h}{-3h^2+1}.$$

Вывод. Если h – «старый» тангенс, то «новый» равен

$$f(h) = \left|\frac{h^3+5h}{3h^2-1}\right|. \qquad (1)$$

Напомним, что $h > 0$. График функции (1), построенный с помощью производной, схематично показан на рис. 5.

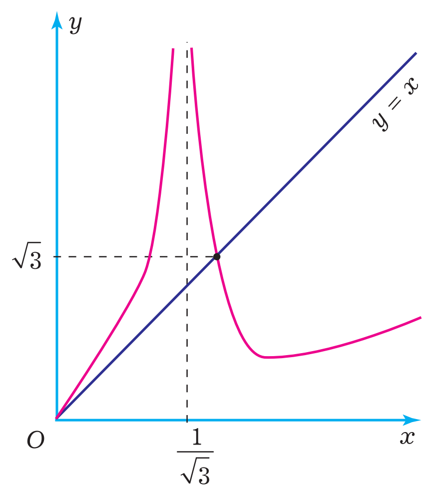

Рис. 5

Угловой коэффициент наклонной асимптоты равен $\frac{1}{3}$. Абсцисса точки минимума равна

$$x_{min} = \sqrt{3+\frac{4}{3}\sqrt{6}} \approx 2,5.$$

Свойства функции $f(h)$ и свойства с-симметрии

С1. Множество значений функции $f(h)$, определённой при $h \in [0;+\infty)$, – это бесконечный промежуток $[0;+\infty)$. Отсюда следует, что любой равнобедренный треугольник MNK может быть получен в результате с-симметрии из некоторого другого равнобедренного треугольника ABC. Таких прообразов может быть один, два или три.

С2. Уравнение $f(h) = h$ имеет два корня: $h = 0$ и $h = \sqrt{3}$. Эти два числа называются *неподвижными точками* отображения.

Равенство $f(0) = 0$ означает, что вырожденный равнобедренный треугольник ABC с вершинами $A(1;0)$, $B(-1;0)$, $C(0;0)$ при с-симметрии переходит сам в себя. Такой треугольник назовём ради краткости *горизонтальным*.

Равенство $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$ означает, что правильный треугольник ABC с вершинами $A(1;0)$, $B(-1;0)$, $C(0;\sqrt{3})$ при с-симметрии переходит в другой правильный треугольник.

С3. График (1) имеет вертикальную асимптоту $h = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Существует единственный равнобедренный треугольник T_1 (а именно треугольник с вершинами $A(1;0)$, $B(-1;0)$, $C\left(0;\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ с углами 30, 30 и 120 градусов), который под действием с-симметрии переходит в вертикальный треугольник (рис. 4).

Параметр h треугольника T_1 определяется уравнением $f(h) = +\infty$, которое имеет единственный корень. В свою очередь T_1 получается из единственного треугольника T_2, для которого $f(h) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, и так далее. Получается бесконечная последовательность треугольников, параметр h которых стремится к нулю (рис. 6). Ломаная на рис. 6 называется *диаграммой Ламерея*.

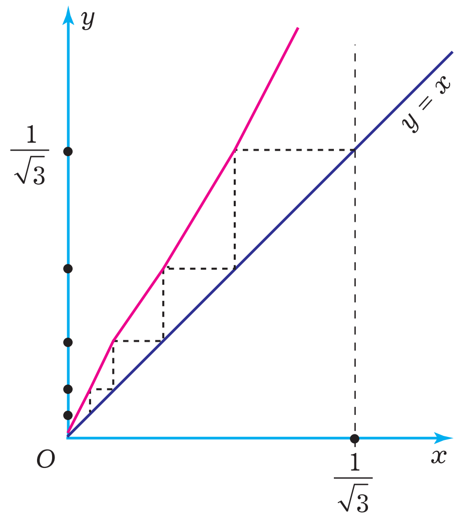

Рис. 6

Следовательно, имеется бесконечная последовательность

$$\{..., T_{n+1}, T_n, ..., T_3, T_2, T_1\}$$

равнобедренных треугольников, удовлетворяющих условиям:

$$f(T_{n+1}) = T_n,$$

$f(T_1)$ – вертикальный треугольник.

При этом при $n \to +\infty$ последовательность $\{T_n\}$ сходится к горизонтальному треугольнику. Соответствующая последовательность $\{h_n\}$ сходится к нулю.

Это, в свою очередь, означает, что горизонтальный треугольник является неустойчивой неподвижной точкой преобразования с-симметрии. Неподвижная точка $h = 0$ отображения f также является неустойчивой.

С4. Если значение h – число рациональное, то значение $f(h)$ – тоже рациональное. В этом случае и все итерации $f(f(...f(h)))$ – числа рациональные. Отсюда следует, что, рассматривая последовательные итерации равнобедренного треугольника с рациональным значением h, мы за конечное число шагов никогда не получим правильный треугольник.

С5. А может ли правильный треугольник получиться в результате с-симметрии какого-либо другого треугольника? Да, может. Причём исходных треугольников – три (с точностью до подобия), один из них – правильный. Это следует из того, что уравнение $f(h) = \sqrt{3}$ имеет три корня. Для двух неправильных треугольников есть не менее двух прообразов при с-симметрии и т. д. Каждый из этих треугольников несколькими последовательными с-симметриями переходит в правильный треугольник.

Программа А.В. Жукова

Незадолго до своей кончины Александр Владимирович Жуков написал программу, выполняющую итерации преобразования с-симметрии. Эту программу можно найти в электронном журнале «Математика в профильной школе. ФРАКТАЛ», 2014, № 1.

Вначале надо задать координаты вершин треугольника *ABC*. Далее нажимаем кнопку «один шаг». Справа появятся углы треугольника.

При повторных нажатиях кнопки «один шаг» программа выдаёт величины углов каждого нового треугольника.

Для любого начального треугольника (не обязательно равнобедренного) с рациональными координатами вершин (и, следовательно, с рациональными тангенсами углов) после 20 – 30 итераций получается правильный треугольник (рис. 7).

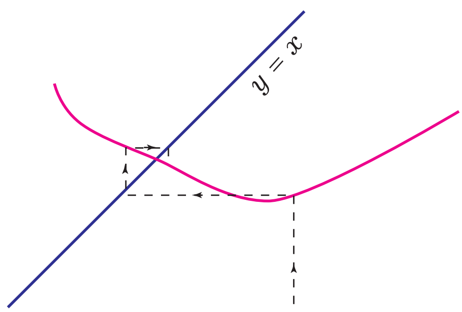

Рис. 7

На этом основании можно выдвинуть гипотезу, что итерации любого треугольника сходятся к правильному треугольнику. Но эта гипотеза не верна! Её опровергает указанная выше последовательность $\{..., T_{n+1}, T_n, ..., T_3, T_2, T_1\}$. Программа А.В. Жукова работает только с рациональными числами, поэтому при её использовании в принципе нельзя получить эту последовательность.