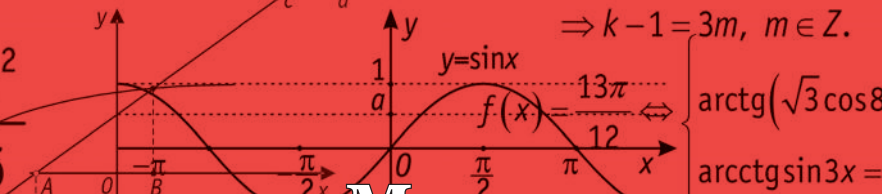


$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$



Математика



Пукас Юрий Остапович

Закончил в 1974 году физфак МГУ, работал в Королёве, принимал участие в программе «Союз – Аполлон», с 1978 по 2004 гг. работал в ФИАЭ им. Курчатова. С 1991 по 2016 гг. преподавал математику и физику в школах города Троицка. Автор книг и множества статей по подготовке к ЕГЭ и олимпиадной математике.

Ищем хорошие решения интересных задач

«Вопрос о том, какие математические вопросы заслуживают внимания, а какие нет, очень непросто. Один великий современный математик сформулировал свой ответ так: "Узнать, хороша ли задача, можно только одним способом: надо её решить"» – **В.И. Арнольд**.

Хорошая цитата. Но ведь получается, что наша оценка того, хороша ли задача, зависит и от способа её решения. И в этой статье, при рассмотрении нескольких интересных задач мы будем искать самые лучшие пути к правильному ответу, понимая, конечно, что это не всегда получается.

Первое уравнение давалось на одной из тренировочных работ по подготовке к ЕГЭ.

1. Решить уравнение

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos x + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \sin x.$$

Решение.

Первый способ: Подавляющее большинство тех, кому это задание было предложено, недолго думая, начинали преобразовывать левую часть по формуле синуса разности:

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x,$$

затем раскрывали

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x,$$

а потом бросали пример, не зная, что делать дальше. Конечно, и это решение можно довести до ответа. Например, вот так:

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos x + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \sin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x \cos \frac{\pi}{3} - \cos 2x \sin \frac{\pi}{3} =$$

$$= \cos x + \cos x \cos \frac{\pi}{3} \sin x + \sin^2 x \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cos x \cos \frac{\pi}{3} - (\cos^2 x) \sin \frac{\pi}{3} = \cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x \left(\sin x \cos \frac{\pi}{3} - \cos x \sin \frac{\pi}{3} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1. \end{cases}$$

Ответ: $x = \pi k + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z},$

$$x = 2\pi m + \frac{5\pi}{6}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Но ведь тот, кто может проделывать этот путь, таким путём не пойдёт. Наверняка, он быстро разглядит другое преобразование, сразу приводящее к ответу.

Второй способ:

Если мы внимательно посмотрим на исходное уравнение, то поймём, что в левой его части нам дан не синус разности, а синус суммы:

$$\begin{aligned} \sin\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + x\right) &= \\ &= \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\cos x + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\sin x, \end{aligned}$$

после чего уравнение принимает вид:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\cos x = \cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x \cdot \left(\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \\ x = 2\pi m + \frac{5\pi}{6}, m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $x = \pi k + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z},$

$$x = 2\pi m + \frac{5\pi}{6}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Следующее задание из варианта Централизованного тестирования. В течении 20 лет, начиная с 1989 года,

была в России такая замечательная форма досрочной сдачи вступительных экзаменов в ВУЗы. ВУЗ сам решал, засчитывать, или нет результаты централизованного тестирования в качестве оценок вступительных испытаний. Количество таких ВУЗов росло, например, в 2001 году 371 ВУЗ России (из них 34 московских) их засчитывал. Прекрасная была альтернатива ЕГЭ.

2. Известно, что $\sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{7}{9},$

$0 \leq \alpha + \frac{2\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2}.$ Найдите, чему равен $\cos \alpha.$

Решение.

Первый способ. Сначала я решил это задание, сведя его к иррациональному уравнению:

$$\sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{7}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \alpha = \frac{7}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\sin \alpha = \frac{7}{9} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \alpha.$$

Из того, что $0 \leq \alpha + \frac{2\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2},$ следует, что $-\frac{2\pi}{3} \leq \alpha \leq -\frac{\pi}{6},$ значит

$$\sin \alpha < 0, \text{ поэтому } \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}.$$

С учётом этого получаем уравнение $\frac{1}{2}\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{7}{9} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \alpha,$

равносильное системе

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}\right)^2 = \left(\frac{7}{9} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \alpha\right)^2, \\ \frac{7}{9} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \alpha \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{7\sqrt{3} - 4\sqrt{2}}{18}.$$

Осуществить всё это мне было просто. Но вскоре появились сомнения: тестирование рассчитано на обычных школьников, а это решение для них достаточно сложное. Должен быть другой путь! И он нашёлся.

Второй способ. Находим

$$\cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{1 - \frac{49}{81}} = \frac{4\sqrt{2}}{9},$$

а затем вместо решения иррационального уравнения просто вычисляем косинус разности

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos\left(\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{2\pi}{3}\right) = \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{9} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{7}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7\sqrt{3} - 4\sqrt{2}}{18}. \end{aligned}$$

Это ответ. Он получен без особых усилий.

3. Найдите сумму наименьшего и наибольшего корней уравнения $\sin^4 x + \cos^3 x = \frac{5}{8}$, лежащих на промежутке $(-2\pi; 2\pi)$. **МГИМО – 1997**

Решение. Приведённое уравнение внешне очень похоже на встречавшиеся мне ранее уравнения $\sin^4 x + \cos^3 x = 1$ и $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$.

Поэтому я какое-то время пытался найти его корни, чтобы вычислить затем нужную сумму. Но вскоре пришло понимание того, что искать корни совсем не обязательно. Дело в том, что в левой части уравнения стоят чётные функции – поэтому, если у этого уравнения есть корень x , лежащий на промежутке $(-2\pi; 2\pi)$, то и число $-x$ будет его корнем, лежащим на том же проме-

жутке. Докажем, что корни на указанном промежутке есть. Это следует из того, что $f(0) = 1$ и $f(\pi) = -1$, поэтому непрерывная функция $f(x) = \sin^4 x + \cos^3 x$ на промежутке $[0; \pi)$ принимает хотя бы раз все значения из промежутка $(-1; 1]$, в том числе и $\frac{5}{8}$.

Получается, что искомая сумма равна нулю.

Ответ: 0.

Приобретённый здесь опыт в последствии не раз удавалось применять, например, при решении вот этой замечательной задачи (последней в вариантах **ОММО – 2009**):

4. Найдите сумму всех корней уравнения $2\cos 3x + 8|\sin x| - 7 = 0$, принадлежащих отрезку $\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Решение. Заметим, что в левой части уравнения стоят чётные функции – поэтому, если x_0 корень данного уравнения, то и $-x_0$ его корень. Можно убедиться, что, хотя бы один корень на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$ у данного уравнения есть, так как функция $f(x) = 2\cos 3x + 8|\sin x| - 7$ принимает его концах разные знаки. Действительно: $f\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = 4\sqrt{3} - 5 > 0$, $f(0) = -5$.

Следовательно, есть корни и на отрезке $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$, и сумма всех корней на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$ равна нулю.

Осталось доказать, что на промежутке $\left(\frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}\right]$ корней нет.

Действительно, на этом промежутке $|\sin x| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, а так как на нём

$$2\pi < 3x \leq 2\pi + \frac{\pi}{4}, \text{ то и } \cos 3x \geq \frac{\sqrt{2}}{2};$$

значит здесь,

$$f(x) \geq 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 7 = 5\sqrt{2} - 7 > 0.$$

Ответ: 0.

5. Решить уравнение

$$\arcsin x = 2 \arccos x. \text{ (МГИМО - 1997)}$$

Решение.

Это простое задание мы рассмотрим для того, чтобы напомнить стандартный путь решения подобных уравнений, а потом покажем и другие подходы.

Первый способ. Вычислив синус от правой и левой частей уравнения, получаем уравнение $x = 2x\sqrt{1-x^2}$.

Его корни 0 и $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, после проверки путём подстановки в исходное уравнение остаётся только $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Если бы мы вычислили от правой и левой частей уравнения косинус, то получили бы уравнение $\sqrt{1-x^2} = 2x^2 - 1$, с тем же набором корней, что и предыдущее.

Ответ: $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Второй способ. Обозначим

$$\arcsin x = \alpha, -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \text{ и}$$

$$\arccos x = \beta, 0 \leq \beta \leq \pi.$$

Тогда уравнение $\arcsin x = 2 \arccos x$ принимает вот такой вид: $\alpha = 2\beta$.

Так как по определению $\arccos x \geq 0$, то здесь и $\arcsin x \geq 0$. Следовательно, $x \geq 0$. Поэтому,

уточняем ограничения: $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ и

$0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$. Более того. Так как

$2\beta = \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, получаем, что $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{4}$.

Используя тождество

$$\sin(\arcsin x) = \cos(\arccos x) = x$$

мы получаем второе уравнение:

$$\sin \alpha = \cos \beta.$$

В результате приходим к системе:

$$\begin{cases} \alpha = 2\beta, \\ \sin \alpha = \cos \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2\beta, \\ \sin 2\beta = \cos \beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos \beta = 0, \\ \sin \beta = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = \frac{\pi}{2}, \\ \beta_2 = \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \pi, \\ \alpha_2 = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Третий способ. Так как в левой части уравнения – возрастающая функция $y = \arcsin x$,

а в правой его части – убывающая функция $y = 2 \arccos x$, корень может быть только один, и его можно подобрать.

Предполагая, что наш корень из табличных значений, проверяем $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, и он подходит:

$$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Ответ: $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. Решите уравнение

$$\arcsin x - \arccos\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

(ДВИ МГУ)

Решение.

Первый способ. Приведём уравнение к виду

$$\left(\arcsin x + \frac{\pi}{3} \right) = \arccos \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{\sqrt{3}} \right),$$

а затем вычислим косинус от правой и левой частей уравнения. Получаем

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1-x^2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x = \frac{1}{2} - \frac{x}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \dots$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \sqrt{1-x^2} = 3 + \sqrt{3} \cdot x \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что оба корня подходят. Как видите, этот стандартный путь без проблем и технических трудностей приводит к успеху.

Второй способ. Обозначим

$$\arcsin x = \alpha, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{и } \arccos \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{\sqrt{3}} \right) = \beta, \quad 0 \leq \beta \leq \pi.$$

При этих ограничениях получаем систему

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \alpha - \beta = -\frac{\pi}{3}, \\ \sin \alpha + \sqrt{3} \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \alpha + \frac{\pi}{3}, \\ \sin \alpha + \sqrt{3} \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \dots \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \alpha + \frac{\pi}{3}, \\ \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_2 = -\frac{\pi}{3} \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Решая это уравнение первым способом мы уже убедились, что оба корня подходят.

$$\text{Ответ: } x_1 = 0, x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Идём дальше. На первый взгляд уравнения **7** и **8** объединяет с уравнением **9** лишь наличие радикалов в их условиях.

7. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x+7} + \sqrt[3]{28-x} = 5.$$

$$\text{Обозначим } z = \sqrt[3]{x+7}, \quad t = \sqrt[3]{28-x}.$$

Так как корни кубические, никаких ограничений на новые переменные нет. Из определения переменных z и t следует, что $z^3 + t^3 = (x+7) + (28-x) = 35$. Это даёт нам возможность составить для z и t симметричную систему

$$\begin{cases} z + t = 5, \\ z^3 + t^3 = 35, \end{cases}$$

решив которую, находим

$$\begin{cases} z_1 = 3, \\ z_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 20, \\ x_2 = 1. \end{cases}$$

Ответ: 1; 20.

8. Решить уравнение

$$\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{2x-6} = 2.$$

Будем действовать, как в предыдущей задаче. Нас не остановит то, что корни разных степеней. Обозначим $z = \sqrt{x+1} \geq 0$ и $t = \sqrt[3]{2x-6}$. Так как $2(x+1) - (2x-6) = 8$, получаем и решаем систему

$$\begin{aligned} & \begin{cases} z - t = 2, \\ 2z^2 - t^3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = z - 2, \\ 2z^2 - (z-2)^3 = 8 \end{cases} \Rightarrow \\ & \dots \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 3, \\ x_3 = 35. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: -1; 3; 35.

Конечно, обе только что рассмотренные задачи можно решить и «в лоб», как-нибудь последовательно избавляясь от радикалов, но вам показан самый удобный способ. Вы не поверите, но следующее уравнение решается так же, как и два предыдущих.

9. Решить уравнение

$$\sqrt{1+2\cos^2 x} + \sin x + \sin x \cdot \sqrt{3-2\sin^2 x} = 3. \quad (\text{МИРЭА} - 2017).$$

Решение.

Заметив, что $1+2\cos^2 x = 3-2\sin^2 x$, обозначим

$$\sqrt{3-2\sin^2 x} = \sqrt{1+2\cos^2 x} = z \geq 1,$$

а заодно и $\sin x = t$, где $|t| \leq 1$. Получившееся уравнение $z + t + zt = 3$ можно привести к виду $(z+1)(t+1) = 4$. Но что делать дальше? Разложение на множители не удаётся сразу использовать, а вот то, что $(1+2\cos^2 x) + 2\sin^2 x = 3$, помогает нам получить второе уравнение, связывающее z и t : $z^2 + 2t^2 = 3$.

Теперь решаем систему

$$\begin{cases} (z+1)(t+1) = 4, \\ z^2 + 2t^2 = 3. \end{cases}$$

Выражаем из первого уравнения

$$z = \frac{4}{t+1} - 4 \text{ и приводим второе уравнение к виду } t^4 + 2t^3 - 6t + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t^3 + 3t^2 + 3t - 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (t-1)((t+1)^3 - 4) = 0 \dots$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k;$

$$x = \arcsin(\sqrt[3]{4} - 1) + 2\pi n;$$

$$x = \pi - \arcsin(\sqrt[3]{4} - 1) + 2\pi m, k, n, m \in \mathbb{Z}.$$

Надо отметить, что варианты прошлых лет Многопрофильной олимпиады МИРЭА хранят огромное количество замечательных задач, и что регулярно некоторые из этих задач появляются в новых вариантах Объединённой Межвузовской Математической Олимпиады (ОММО), диплом призёра которой открывает двери многих университетов. Знакомство с этими задачами очень полезно и интересно. Кто знает, а не встретится ли задача 9 в вариантах ОММО – 2021?

Конечно, не только варианты МИРЭА достойны изучения. В первую очередь, это варианты МГУ и МФТИ прошлых лет, которые доступны в свободном доступе в номерах журнала «Квант». А у кого-то в семье могли сохраниться замечательные сборники, например, [1,2].

Мы уже рассмотрели две задачи (3 и 5) из варианта МГИМО-1997. Вот ещё одна. Решая её, можно вспомнить совет Полиграфа Шарикова: «Взять всё, да и поделить».

10. Найдите сумму всех корней уравнения

$$(x-1)(x-2)(x-4)(x-8) = 4x^2.$$

Решение. Так получилось, что подобные уравнения мне почему-то до этой задачи даже на глаза не попадались. Хотя они есть, например, в сборнике Галицкого [3], который в те годы в школах широко применялся, и я тоже его использовал на уроках.

А до этого не раз встречались вот такие уравнения:

$$(x-3)(x-4)(x-5)(x-6) = 1680 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((x-3)(x-6))((x-4)(x-5)) = 1680 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 9x + 18)(x^2 - 9x + 20) = 1680.$$

После чего очевидная замена приводила к ответу.

На Соросовской олимпиаде однажды была чуть более хитрая структура:

$$\begin{aligned} (12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1) &= 5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow ((12x-1)(3x-1))((6x-1)(4x-1)) &= 5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (36x^2-15x+1)(24x^2-10x+1) &= 5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (3(12x^2-5x)+1)(2(12x^2-5x)+1) &= 5. \end{aligned}$$

И далее всё становится ясно и понятно.



В задаче 10, хоть внешне всё очень похожее, а всё же другое. Но начинать надо так же.

После перемножения двух крайних скобок и двух средних получится вот что:

$$\begin{aligned} (x-1)(x-2)(x-4)(x-8) &= 4x^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x^2-9x+8)(x^2-6x+8) &= 4x^2. \end{aligned}$$

Поделим каждую скобку на x :

$$\frac{x^2-9x+8}{x} \cdot \frac{x^2-6x+8}{x} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x-9+\frac{8}{x}\right)\left(x-6+\frac{8}{x}\right) = 4.$$

Деление на x^2 было возможно, так как $x=0$ не является корнем данного уравнения. Введя новую переменную $t = \left(x-9+\frac{8}{x}\right)$, получим уравнение $t(t+3)=4 \Leftrightarrow t^2+3t-4=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1=1, \\ t_2=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1,2}=5 \pm \sqrt{17}, \\ \emptyset. \end{cases}$$

Так как $x_1+x_2=10$, **ответ:** 10.

Комментарий. После этой задачи я узнавал подобные структуры, как бы они не маскировались. Это очень пригодилось на Первом Творческом конкурсе учителей по математике (5.12.2004), среди 12 заданий которого было и вот это уравнение:

11. Решить уравнение

$$(2x+2)(5-2x)(4x^2+8x+11)=10(2x+3)^2.$$

Решение. Перемножив две первые скобки, получаем уравнение $-(4x^2-6x-10)(4x^2+8x+11)=10(2x+3)^2$.

Обозначим $2x+3=t$, тогда $2x=t-3$.

Получаем

$$(t^2-9t+8)(t^2-2t+8)=-10t^2.$$

Так как для этого уравнения $t \neq 0$, делим обе его части на t^2 :

$$\left(t-9+\frac{8}{t}\right)\left(t-2+\frac{8}{t}\right)=-10.$$

Действуя далее, как в задаче 10, без проблем получаем ответ.

Ответ: $\frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$.

Вот ещё три задачи, решая которые мы будем осуществлять подобное деление.

12. Решить уравнение

$$\sqrt{1+5x^2-2x^3} + \sqrt{2+3x^2+3x^3} = 9\sqrt{x^3}.$$

МИРЭА, 2006.

Решение. В своё время, догадываясь, что здесь как-то «замешана» монотонность, я долго не мог её разглядеть.

Но убедившись, что $x=0$ не является решением данного уравнения, разделим обе части уравнения на $\sqrt{x^3}$. Получим уравнение

$$\sqrt{\frac{1}{x^3} + \frac{5}{x} - 2} + \sqrt{\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x} + 3} = 9.$$

Пусть $t = \frac{1}{x}$.

Рассмотрим функцию

$$f(t) = \sqrt{t^3 + 5t - 2} + \sqrt{2t^3 + 3t + 3}.$$

Она монотонна! Каждое своё значение она принимает только при одном значении аргумента, поэтому уравнение $f(t)=9$ имеет не более одного корня, значение которого можно просто подобрать. Этот корень

$$t=2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}. \text{ Ответ: } \frac{1}{2}.$$

13. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$a^2(x^2+1)^3 + (x^3+1)^2 = 12ax^3$$

имеет единственное решение. ПВГ – 2019.

Решение. Заметив, что $x=0$ ни при каком значении параметра a не является корнем данного уравнения, разделим обе части уравнения на x^3 .

Получим уравнение

$$a^2\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + \left(x^3 + 2 + \frac{1}{x^3}\right) = 12a.$$

Используя то, что

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right),$$

преобразуем это уравнение к виду

$$(a^2 + 1)\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 12a.$$

Если x_0 – корень этого уравнения, то и $\frac{1}{x_0}$ – тоже его корень. Сле-

довательно, единственным корнем может быть $x=1$, либо $x=-1$. Теперь мы найдём те значения параметра, при которых эти числа будут корнями данного уравнения.

$$\begin{aligned} x=1 &\Rightarrow 8a^2 + 4 = 12a \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1, \\ a_2 = \frac{1}{2}. \end{cases} \\ x=-1 &\Rightarrow 8a^2 = -12a \Leftrightarrow \begin{cases} a_3 = 0, \\ a_4 = -\frac{3}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Подставляя теперь по очереди эти значения параметра в уравнение

$$(a^2 + 1)t^3 - 3t + 2 = 12a, \text{ где } t = \left(x + \frac{1}{x}\right),$$

убедимся в том, что при каждом из них уравнение имеет единственный корень $x=1$, либо $x=-1$. Нас не должно пугать то, что уравнение кубическое. Для первых двух значений параметра нам известен один его корень $t=2$, а для двух других – корень $t=-2$.

$$\begin{aligned} a_1 = 1. & \text{ Получаем } 2t^3 - 3t - 10 = 0 \Leftrightarrow \\ (t-2)(2t^2 + 4t + 5) &= 0 \Leftrightarrow t=2 \Leftrightarrow x=1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 = \frac{1}{2}. & \text{ Получаем } 5t^3 - 12t - 16 = 0 \Leftrightarrow \\ (t-2)(5t^2 + 10t + 8) &\Leftrightarrow t=2 \Leftrightarrow x=1. \end{aligned}$$

$$a_3 = 0. \quad \text{Получаем} \quad t^3 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \\ (t+2)(t^2 - 2t + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -2 \Rightarrow x = -1, \\ t_2 = 1 \Rightarrow \emptyset. \end{cases}$$

$$a_4 = -\frac{3}{2}. \quad \text{Получаем} \quad 13t^3 - 12t + 80 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t+2)(13t^2 - 26t + 40) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = -2 \Leftrightarrow x = -1.$$

$$\text{Ответ: } a = -\frac{3}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1.$$

14. Решить уравнение

$$4y^2(x^4 + 2x^2) + 8y^2 + x^4 + 2x^2 =$$

$$= 8|y|(x^2 + 1) - 2. \text{ОММО} - 2014.$$

Решение. Пока не очень похоже на «взять всё, да и поделить». Начи-
наем группировать слагаемые:

$$4y^2(x^4 + 2x^2 + 2) + (x^4 + 2x^2 + 2) =$$

$$= 8|y|(x^2 + 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (4y^2 + 1)(x^4 + 2x^2 + 2) = 8|y|(x^2 + 1).$$

Убедившись, что при $y=0$ ре-
шений нет, разделим обе части
уравнения на $2|y|(x^2 + 1)$. Вот, что
получается:

$$\left(\frac{4y^2 + 1}{2|y|} \right) \left(\frac{x^4 + 2x^2 + 2}{x^2 + 1} \right) = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2|y| + \frac{1}{2|y|} \right) \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2 + 1} \right) = 4.$$

Наверняка вы уже знакомы с
тем, что если $a > 0$, то $a + \frac{1}{a} \geq 2$, при-
чём равенство достигается, только
если $a = 1$. Следовательно, правая
часть равна 4, только если $2|y| = 1$ и
 $x^2 + 1 = 1$. **Ответ:** $\left(0; -\frac{1}{2}\right); \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

15. Пара чисел x_0, y_0 является
решением уравнения

$$(3 + 2y - y^2)\sqrt{x} = y - 3. \quad (\text{МГИМО}).$$

Найдите минимальное значение
выражения $(y_0 + 1)^2 + x_0$.

Решение. Заметим, что левая
часть делится на $y - 3$.

$$\text{Поэтому } (y - 3) + (y^2 - 2y - 3)\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y - 3)((y + 1)\sqrt{x} + 1) = 0.$$

Первый случай: $y_1 = 3; x_1 \geq 0$. Для
этого случая $(y_1 + 1)^2 + x_1 = 16 + x_1 \geq 16$.

$$\text{Второй случай: } (y + 1)\sqrt{x} = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + 1 < 0, \\ x = \frac{1}{(y + 1)^2} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow (y + 1)^2 + x = (y + 1)^2 + \frac{1}{(y + 1)^2} \geq 2.$$

Здесь мы, как и в задаче 14, при-
менили знаменитое неравенство
Коши, которое выполняется для по-
ложительных чисел a и b :

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}.$$

Равенство достигается, если

$$(y + 1)^2 = \frac{1}{(y + 1)^2} = x = 1,$$

следовательно, $x_0 = 1; y_0 = -2$.

$$\text{Для этих корней } (y_0 + 1)^2 + x_0 = 2.$$

Ответ: 2.

Следующая текстовая задача из
вариантов мехмата МГУ 1981 года
обращает на себя внимание и запо-
минается благодаря своей необыч-
ной формулировкой. А при её реше-
нии естественные действия неожиданно
приводят к неравенству
 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

16. В два различных сосуда налиты растворы соли, причем в 1-й сосуд налито 5 кг, а во 2-й – 20 кг. При испарении воды процентное содержание соли в 1-м сосуде увеличилось в p раз, а во втором сосуде – в q раз. О числах p и q известно только, что $pq=9$. Какое наибольшее количество воды могло при этом испариться из обоих сосудов вместе?

Решение. Пусть из первого сосуда, содержащего a кг соли, испарилось x кг воды, а из второго, содержащего b кг соли, испарилось y кг воды. По условию $\frac{a}{5-x} = p \cdot \frac{a}{5}$ и

$$\frac{b}{20-y} = q \cdot \frac{b}{20}. \text{ Выражаем отсюда } x \text{ и } y, \text{ и находим их сумму: } x = 5 - \frac{5}{p},$$

$$y = 20 - \frac{20}{q}, \quad x + y = 25 - \left(\frac{5}{p} + \frac{20}{q} \right). \text{ Так}$$

как по известному неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим $\frac{5}{p} + \frac{20}{q} \geq$

$$2 \cdot \sqrt{\frac{5}{p} \cdot \frac{20}{q}} = \frac{20}{\sqrt{pq}} = \frac{20}{3}, \text{ получаем, что}$$

$$\left(\frac{5}{p} + \frac{20}{q} \right)_{\min} = \frac{20}{3}. \text{ Это минимальное}$$

$$\text{значение достигается, если } \frac{5}{p} = \frac{20}{q}.$$

$$\left\{ \frac{5}{p} = \frac{20}{q}, \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p = 1,5, \\ q = 6 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+y)_{\max} = 25 - \frac{20}{3} = \frac{55}{3}.$$

Ответ: $\frac{55}{3}$ кг.

Замечу, что в трёх других вариантах того года добраться до применения знаменитого неравенства заметно сложнее.

А вот в какой более «современной» формулировке задача **16** была предложена в 1997 году на экзаменах в МГИМО. Роль воды, которая испарялась в 1981 году, здесь играла торговая наценка, которая увеличивалась.

17. При оптовой продаже цена первого товара равна 5 млн. руб., а второго – 20 млн. руб. Определённый процент оптовой цены (для каждого товара свой) составляет стоимость товара, остальное – товарная наценка. При розничной продаже цены товаров увеличиваются за счёт увеличения наценки и процент, который составляет стоимость от цены, уменьшается для первого товара в x раз, а для второго товара в y раз по сравнению с оптовой продажей. Известно, что $xy=9$. На какое наименьшее число может увеличиться сумма цен (в млн. руб.) обоих товаров при розничной продаже по сравнению с оптовой?

Решение. Пусть стоимость (себестоимость) первого товара составляет a млн. рублей, стоимость (себестоимость) второго товара составляет b млн. рублей, и пусть их товарные наценки при розничной продаже выросли соответственно на t и z миллионов рублей. Понятно, что на эти же величины увеличились и цены этих товаров. Действуя, как в предыдущей задаче, получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{a}{5} = x \cdot \frac{a}{5+t}, \\ \frac{b}{20} = y \cdot \frac{b}{20+z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5+t = 5x, \\ 20+z = 20y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (5+t)(20+z) = 100xy = 900.$$

Так как $(5+t) + (20+z) \geq 2 \cdot \sqrt{(5+t)(20+z)} = 2 \cdot \sqrt{900} = 60$, получаем оценку $t+z \geq 35$. Минимальное значение этой суммы $(t+z)_{\min} = 35$ млн. рублей достигается, если $(5+t) = (20+z)$, то есть, когда $t=25$ и $z=10$.

Ответ: 35 млн. рублей.

Мы разобрали с вами несколько интересных и полезных на мой взгляд задач. В завершение разговора мне хочется рассказать ещё об одной задаче с неожиданным решением. Точнее – таких однотипных задач четыре. Они были предложены в 1988 году поступающим на геологический факультет МГУ. В варианте было 6 задач, эти шли под номером 5. Варианты МГУ за 1988 год опубликованы в журнале «Квант» (№2, 1989). По одному варианту от каждого факультета. Именно там я познакомился с задачей 18.

18. Путь из A в B проходит первые 80 км по шоссе, а оставшиеся 120 км – по грунтовой дороге. Первую часть пути автобус проезжает на 2 часа быстрее, чем вторую. Автобус совершил более четырёх рейсов по маршруту из A в B и обратно. На это, включая стоянки в конечных пунктах, ушло менее одной недели (то есть менее 168 часов). За время, которое он был при этом в движении, автобус мог бы проехать 2100 км, если бы двигался со скоростью, средней арифметической между скоростями движения по шоссе и грунтовой дороге. Найти скорости движения автобуса по шоссе и по грунтовой дороге.

Решение. Обозначим скорости автобуса по шоссе и по грунтовой дороге через x км/час и y км/час соответственно, и k – количество рейсов, по условию $k > 4$. Получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{80}{x} + 2 = \frac{120}{y}, \\ 2k \left(\frac{80}{x} + \frac{120}{y} \right) = \frac{4200}{x+y}, \\ 2k \left(\frac{80}{x} + \frac{120}{y} \right) < 168, \\ k > 4. \end{cases}$$

Принципиально другую систему получить, на мой взгляд, просто невозможно. А как её решать? И в «Кванте», и в других последующих публикациях приводятся какие-то вымученные решения. Действуют примерно так. Из первого уравнения делают вывод, что $\frac{80}{x} + \frac{120}{y} > 2$. Ис-

пользуя эту оценку в третьем неравенстве системы, ограничивают k сверху: $k < 42$. Выразив y из первого уравнения системы, подставляют его во второе. Обозначив $x=10z$, получают для новой переменной квадратное уравнение $kz^2 - (105 - 18k)z + 80k - 420 = 0$. Из не отрицательности дискриминанта получают новые ограничения на количество рейсов:

$$k \leq 105 \left(\frac{5}{2} - \sqrt{6} \right) \approx 5,3 \text{ и } k \geq 105 \left(\frac{5}{2} + \sqrt{6} \right) \gg 42,$$

а так как $k > 4$, получаем, что $k=5$.

Зная количество рейсов, уже без проблем находят скорости.

Ответ: 40 км/ч, 30 км/ч.

Искать другое решение долго не было повода и необходимости.

Через несколько лет вышел сборник [2], в котором приводятся по четыре варианта всех факультетов МГУ за 1984 – 1989 годы. Первые варианты подробно разобраны, к остальным приводятся ответы.

И вот я как-то взялся решать №5 и третьего варианта геологического факультета за 1988 год. И она у меня не получилась! Я ещё раз разобрал решение задачи из первого варианта, теперь по этому сборнику. Оно в нём близко к тому, что есть в «Кванте». Не помогло, не получалось адаптировать известное решение ни к этой задаче, ни к задачам из второго и четвёртого варианта. Похоже, что проблемы с решением этих задач были и у уважаемых авторов сборника: к ним в книге не были приведены ответы! Ко всем остальным задачам за 6 лет всех факультетам ответы есть, а к этим нет. Вот эта задача из третьего варианта.

19. Группа туристов совершает комбинированный поход. 60 км они проехали на велосипедах, затем пересели в байдарки (одна одиночка и не более 30 двухместных; свободных мест при этом не осталось) и прошли 80 км по озеру. Все туристы движутся с одинаковой скоростью, причём 21 км на велосипеде турист проходит на 18 минут быстрее, чем 10 км на байдарке. Моторная лодка за час проходит такое же расстояние, какое турист преодолел бы, двигаясь 20 минут на велосипеде, а затем 30 минут на байдарке. Если время, затраченное на поход, умножить на число его участников, то получится время, за которое моторная лодка могла бы пройти 450 км. Найти скорость движения туриста на велосипеде и на байдарке.

Решение. Обозначим скорости туристов на велосипеде и на байдарке x км/час и y км/час соответственно, и k – число участников похода, по условию число участников нечётно и можно понять, что $3 \leq k \leq 61$. Скорость моторной лодки равна $\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{2}\right)$ км/час. Заметив, что

$\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{2}\right) = \frac{2x+3y}{6}$, получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{21}{x} + \frac{3}{10} = \frac{10}{y}, \\ k\left(\frac{60}{x} + \frac{80}{y}\right) = \frac{2700}{2x+3y}, \\ 3 \leq k \leq 61 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{21}{x} + \frac{3}{10} = \frac{10}{y}, \\ k\left(\frac{6}{x} + \frac{8}{y}\right) = \frac{270}{2x+3y}, \\ 3 \leq k \leq 61. \end{cases}$$

Обратим внимание на то, что здесь в системе нет неравенства, аналогичного тому, из которого в задаче **18** получалась оценка $k < 42$. Как мы вскоре выясним, и в той задаче это неравенство было лишним. Все четыре задачи решаются просто и однотипно. Не надо спешить выражать y из первого уравнения и подставлять во второе. Надо просто второе уравнение системы записать в виде $k\left(\frac{60}{x} + \frac{80}{y}\right)(2x+3y) = 2700$.

После чего применить неравенство Коши. Итак,

$$\begin{aligned} k\left(\frac{60}{x} + \frac{80}{y}\right)(2x+3y) &= 2700 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow k\left(360 + 180\frac{y}{x} + 160\frac{x}{y}\right) &= 2700 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow k\left(18 + 9\frac{y}{x} + 8\frac{x}{y}\right) &= 135. \end{aligned}$$

Так как $9\frac{y}{x} + 8\frac{x}{y} \geq 2\sqrt{9 \cdot 8} = 12\sqrt{2}$,

получаем, что $k \leq \frac{135}{18 + 12\sqrt{2}} \approx 3,86$.

Следовательно, туристов всего трое.

Наша система приобретает вид

$$\begin{cases} \frac{21}{x} + \frac{3}{10} = \frac{10}{y}, \\ \left(18 + 9\frac{y}{x} + 8\frac{x}{y}\right) = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{21}{x} + \frac{3}{10} = \frac{10}{y}, \\ 9\frac{y}{x} + 8\frac{x}{y} = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{21}{x} + \frac{3}{10} = \frac{10}{y}, \\ x = 30, \\ x = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{21}{x} + \frac{3}{10} = \frac{10}{y}, \\ y = 10. \end{cases}$$

Ответ: 30 км/ч, 10 км/ч.

Послесловие к задаче 18. Убираем ненужное неравенство и решаем систему, всё внимание на второе уравнение:

$$\begin{cases} \frac{80}{x} + 2 = \frac{120}{y}, \\ 2k\left(\frac{80}{x} + \frac{120}{y}\right) = \frac{4200}{x+y}, \Leftrightarrow \\ k > 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{40}{x} + 1 = \frac{60}{y}, \\ k\left(\frac{4}{x} + \frac{6}{y}\right) = \frac{105}{x+y}, \Leftrightarrow \\ k > 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{40}{x} + 1 = \frac{60}{y}, \\ k\left(\frac{4}{x} + \frac{6}{y}\right)(x+y) = 105, \Leftrightarrow \\ 4 < k \in N \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{40}{x} + 1 = \frac{60}{y}, \\ 105 = k\left(\frac{4}{x} + \frac{6}{y}\right)(x+y) \geq \\ \geq k \cdot 2\sqrt{\frac{4 \cdot 6}{xy}} \cdot 2\sqrt{xy} = k \cdot 8\sqrt{6}, \\ 4 < k \in N \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{40}{x} + 1 = \frac{60}{y}, \\ k\left(\frac{4}{x} + \frac{6}{y}\right)(x+y) = 105, \Leftrightarrow \\ k \in N, 4 < k \leq \frac{105}{8\sqrt{6}} \Rightarrow k = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{40}{x} + 1 = \frac{60}{y}, \\ \frac{4y}{x} + \frac{6x}{y} = 11, \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40, \\ y = 30, \\ k = 5. \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: 30 км/ч, 10 км/ч.

На этой задаче очень хорошо видно, насколько зависит её оценка от пути решения.

Литература

1. Ю.В. Нестеренко, С.Н. Олехник, М.К. Потапов. «Задачи вступительных экзаменов по математике». Москва, «Наука», 1986.
2. Ю.В. Нестеренко, С.Н. Олехник, М.К. Потапов. «Задачи вступительных экзаменов по математике». Москва, «Факториал», 1995.
3. М.Л. Галицкий, А.М. Гольдман, Л.И. Звавич. «Сборник задач по алгебре». Москва, «Просвещение», 2007.

Проверь себя

(Ответы и решения к задачам, опубликованным в журнале №8, стр. 26)

1. Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$.

$$\sin 3x + \cos 4x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = 1, \\ \cos 4x = 1. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ 4x = 2\pi n, k, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2}k, \\ 4\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 3(2\pi k), \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2}k, \\ 3k = 1 + 4n, k, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Диофантово уравнение $3k = 1 + 4n$ решаем так:

$$k = \frac{1+4n}{3} = \frac{1+3n+n}{3} = n + \frac{n+1}{3}.$$

Из $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$ следует, что $\frac{n+1}{3}$ —

целое число. Пусть $\frac{n+1}{3} = m, m \in \mathbb{Z}$,

тогда $n = 3m - 1$ и $k = n + \frac{n+1}{3} = 3m - 1 + m, k = 4m - 1$.

Находим $x = \frac{\pi}{2}(4m - 1)$.

2. Ответ: $-4; -6; -5 - \sqrt{19}; -5 + \sqrt{19}$.

Обратим внимание, что $(x+1)(x+9) = x^2 + 10x + 9$ и $(x+3)(x+7) = (x^2 + 10x + 21)$. Обозначим $x^2 + 10x + 9 = y$. Тогда заданное уравнение запишется в виде

$$(x+1)\overbrace{(x+3)(x+7)}^{y+12}(x+9) = 45 \Leftrightarrow$$

$$y(y+12) = 45 \Leftrightarrow y^2 + 12y - 45 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3, \\ y = -15, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 10x + 6 = 0, \\ x^2 + 10x + 24 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

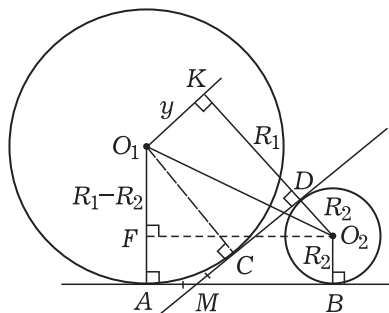
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \pm \sqrt{19}, \\ x = -4, \\ x = -6. \end{cases}$$

3. Ответ: 142 857.

Пусть $\overline{abcde} = 1 \cdot 10^5 + a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10 + e$ — искомое число. Число $\overline{abcde}$ обозначим x , тогда искомое число равно $10^5 + x$. После перестановки 1 с первого на последнее место, получаем число $10x + 1$. По условию $3(10^5 + x) = 10x + 1$, откуда $7x = 3 \cdot 10^5 - 1$. Делим «уголком» 299999 на 7, получаем 42 857. Искомое число 142 857.

4. Ответ: 9.

Пусть $O_1A = R_1, O_2D = R_2$, ($R_1 = 5$ и $R_2 = 2$), AB — внешняя касательная, CD — внутренняя касательная, $CD = y$. По условию $AB = \frac{3}{2}CD = \frac{3}{2}y$.



AB – общая касательная, $O_1A \perp AB$, $O_2B \perp AB$. Если $O_2F \perp O_1A$, то четырехугольник AFO_2B – прямоугольник, $FO_2=AB=\frac{3}{2}y$, $O_1F=R_1-R_2$. Из прямоугольного треугольника O_1FO_2 получаем

$$(O_1O_2)^2 = (R_1 - R_2)^2 + FO_2^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (O_1O_2)^2 = 9 + \frac{9}{4}y^2.$$

Далее, $O_1C \perp CD$, $O_2D \perp CD$.

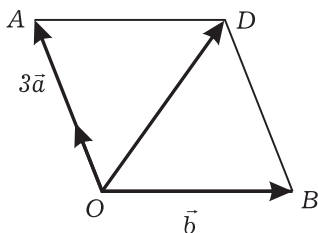
Продлим прямую O_2D и опустим на неё перпендикуляр O_1K . Получим прямоугольник O_1CDK , в котором $O_2K = CD = y$ и $KD = O_1C = R_1$. Из прямоугольного треугольника O_1KO_2 имеем

$$(O_2O_2)^2 = (O_1K)^2 + O_2K^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (O_1O_2)^2 = y^2 + (R_1 + R_2)^2 = y^2 + 49.$$

Исключая из двух уравнений y^2 получим $O_1O_2 = 9$.

5. Ответ: $\vec{d}(C, C, 2C)$, где $C > 0$, $C = konst$.

Сумма двух неколлинеарных векторов $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$, отложенных от точки O , можно найти по «правилу параллелограмма». Если их длины равны $|\vec{OA}| = |\vec{OB}|$, то параллелограмм есть ромб и его диагональ OD делит угол AOB пополам.



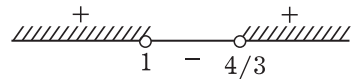
Имеем: $\vec{a}(-4, 0, 3)$, $\vec{b}(14, 2, -5)$, $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=\sqrt{15}$. Если $\vec{OA}=3\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$, то $|\vec{OA}|=|\vec{OB}|$ и вектор $\vec{OD}=3\vec{a}+\vec{b}$ делит угол BOA (т. е. угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пополам) $\vec{OD}=3\vec{a}+\vec{b}=(2, 2, 4)$.

Любой вектор $\vec{d}=C(1, 1, 2)$ направлен по биссектрисе угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (при $C > 0$).

6. Ответ: $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

$$\frac{4^x}{4^x - 3^x} < 4 \Leftrightarrow \frac{(4/3)^x}{(4/3)^x - 1} < 4 \Leftrightarrow$$

$$\left(\text{при } t = \left(\frac{4}{3} \right)^x \right) \frac{t}{t-1} < 4 \Leftrightarrow \frac{3t-4}{t-1} > 0$$



$$\begin{cases} t < 1, \\ t > 4/3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4/3)^x < 1, \\ (4/3)^x > 4/3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x > 1. \end{cases}$$

7. Ответ: $4 \leq v \leq 5$.

Пусть собственная скорость лодки v км/час. Тогда время движения лодки $t = \frac{10}{v+1} + \frac{6}{v-1}$ (время в часах).

По условию имеем (учтем, что 3 часа 10 мин = $3\frac{1}{6}$ часа): $\frac{19}{6} \leq \frac{10}{v+1} + \frac{6}{v-1} \leq 4$ (Очевидно, что $v > 1$). Эта система неравенств при $v > 1$, равносильна

$$\text{системе } \frac{19}{6} \leq \frac{16v-4}{v^2-1} \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 19(v^2-1) \leq 6(16v-4), \\ 16v-4 \leq 4(v^2-1), \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 19v^2 - 96v + 5 \leq 0, \\ v^2 - 4v \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{19} \leq v \leq 5, \\ v > 1, \\ v(v-4) \geq 0, \\ v > 1. \end{cases}$$

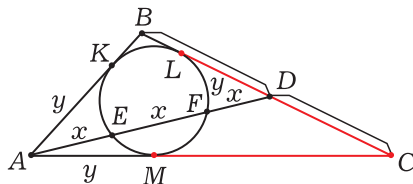
$$\Leftrightarrow 4 \leq v \leq 5.$$

8. Ответ: $AB=5$, $BC=10$, $AC=13$.

Пусть $AD=3x$ ($AE=EF=FD$), $AK=y$. По теореме о касательной и секущей $AK^2 = AE \cdot AF \Leftrightarrow y^2 = 2x^2$;

$$AM^2 = AE \cdot AF \Leftrightarrow AM = y;$$

$$DL^2 = DF \cdot DE = 2x^2 \Rightarrow DL = y.$$



Далее, пусть $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$.

Имеем: $AB=y+KB$, $KB=BL$, $BD=BL+y \Rightarrow AB=c=BD$. Точка D – середина стороны $BC \Rightarrow BC=a=2BD=2c$. По свойству касательных $CL=CM$, так как $CL=CD+DL=c+y$ и $AM=y$, то $AC=b=AM+CM=y+(c+y)=c+2y$.

Отрезок AM – медиана к стороне $BC=a$, $AD=m_a$. Медиана через три стороны треугольника выражается по формуле $(m_a)^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$, поэтому имеем равенство $9x^2 = \frac{(c+2y)^2 + c^2}{2} - \frac{(2c)^2}{4}$ при $x^2 = \frac{y^2}{2}$,

откуда следует $9y^2 = 4cy + 4y^2$, $5y^2 = 4cy$, $y = \frac{4}{5}c$. Итак $AB=c$,

$BC=2c$, $AC=c+2y=c+\frac{8}{5}c=\frac{13}{5}c$. По

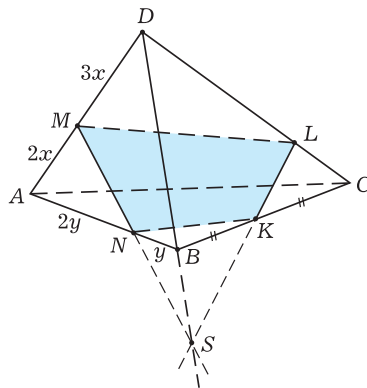
условию $AB+BC+AC=28$,

$c+2c+\frac{13}{5}c=28 \Leftrightarrow c=5$, тогда $AB=5$,

$BC=10$, $AC=13$.

9. Ответ: в отношении 3:1, считая от вершины D .

Пусть S – точка пересечения прямых DB и MN (эти прямые лежат в плоскости ADB), в плоскости грани BDC проведём прямую через точку S и K до пересечения с прямой DC в точке L . Плоскость MSL пересекает пирамиду и образует сечение $MNKL$.



Рассматриваем треугольник ADB и секущую MS , по теореме Менелая имеем $\frac{DM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} \cdot \frac{BS}{SD} = 1$, откуда

$$\text{да } \frac{BS}{SD} = \frac{1}{3}.$$

Далее, по теореме Менелая для треугольника DCB и секущей LS получаем $\frac{DL}{LC} \cdot \frac{CK}{KB} \cdot \frac{BS}{SD} = 1$, откуда, с

учётом $\frac{BS}{SD} = \frac{1}{3}$, находим $\frac{DL}{LC} = 3$.

Статью подготовила Т.С. Пиголкина