Лупашевская Василиса Юрьевна
Учитель математики
ГБОУ СОШ №2070 г. Москвы.

Интересные задачи для девятиклассников

В вариантах ГИА по математике и в диагностических работах для 9 класса наибольший интерес представляют последние задачи (№ 26) по геометрии. Отвечать на вопросы по этим задачам бывает иногда очень непросто. Да, курс планиметрии пройден, но основная тригонометрия перекочевала в 10 класс, и алгебраические методы не отработаны. Учителю, которому все эти подходы известны, приходится ограничивать себя и искать «элементарные» решения. Конечно, объясняя потом ученикам задачу, можно и нужно познакомить их с новыми приёмами, новыми формулами.

Задача 1. (19. 02. 2014) Найдите острые углы прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 12, а площадь равна 18.

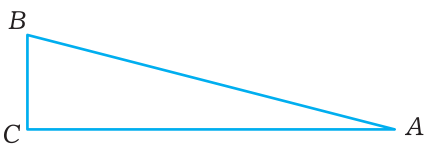

Рис. 1

Решение. Рассмотрим рис. 1. Так как $BC = 12\cdot\sin A$, а $CA = 12\cdot\cos A$, девятиклассники, зная площадь треугольника, находят, что

$$\sin A\cdot\cos A = 0{,}25,$$

но синус двойного угла им неизвестен! Понимая, однако, что искать надо двойной угол, можно догадаться использовать равнобедренный треугольник BAE, см. рис. 2 ($AB = AE = 12$, $\angle BAE = 2\angle BAC$, $S = 36$), или равнобедренный треугольник BMC, см. рис. 3 ($BM = MC = 6$, $\angle BMC = 2\angle BAC$, $S = 9$), а в этих треугольниках найдём, зная площадь и боковые стороны, что $\sin 2A = 0{,}5$. Отсюда острые углы прямоугольного треугольника ABC равны 15 и 75 градусов.

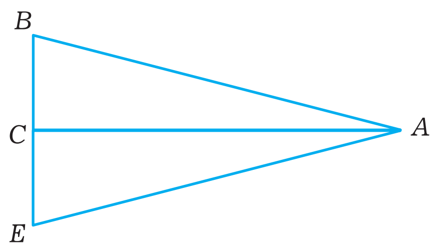

Рис. 2

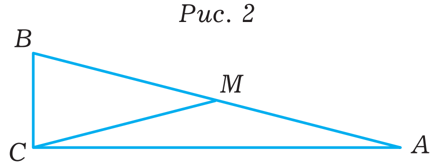

Рис. 3

Задача 2. (09. 04. 2014) В треугольнике ABC угол B равен $120°$, а длина стороны AB на $5\sqrt{3}$ меньше полупериметра треугольника. Найдите радиус окружности, касающейся стороны BC и продолжения сторон AB и AC.

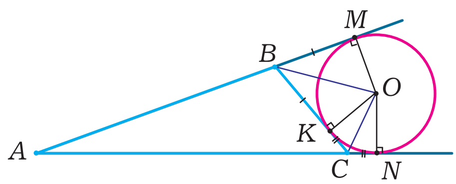

Рис. 4

Решение. В авторском решении этой задачи хорошо показано, что полупериметр треугольника ABC равен AM, см. рис. 4. А так как $AM = AB + BM$, то сразу получается, что $BM = 5\sqrt{3}$. Теперь можно было сразу найти радиус

$$OM = BM \cdot \operatorname{tg}\angle MBO = 5,$$

но тут авторы немного перемудрили и обошлись без тангенсов: сначала нашли гипотенузу OB треугольника BKO, а потом заметили, что катет OK, равный искомому радиусу, лежит напротив угла в 30 градусов.

Задача 3. (06. 05. 2014) В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана CD взаимно перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 168. Найдите стороны треугольника ABC.

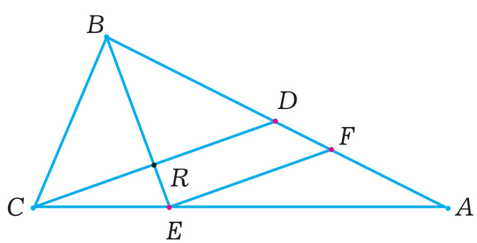

Рис. 5

Решение. Треугольник CBD – равнобедренный, так как в нём отрезок BR является и биссектрисой, и высотой, см. рис. 5. Введём обозначения. Пусть $CB = BD = x$, тогда $BA = 2x$. Если $CE = y$, то по свойству биссектрисы $AE = 2y$. В этот момент надо напомнить ученикам, как, зная стороны треугольника, находить его медианы (и саму формулу, и как она выводится):

$$2 \cdot CD^2 + 2 \cdot BD^2 = CB^2 + AC^2.$$

Получаем первое уравнение:

$$2 \cdot 168^2 + 2x^2 = x^2 + 9y^2.$$

А теперь настал очень удобный момент, чтобы показать девятиклассникам (пока без вывода) важную и полезную формулу для нахождения длины биссектрисы:

$$BE^2 = BC \cdot BA - CE \cdot EA.$$

Так как эта информация тут же будет применена, можно надеяться, что она запомнится:

$$168^2 = 2x^2 - 2y^2.$$

Сначала находим, что $5x^2 = 13y^2$, а потом и сами неизвестные:

$$x^2 = 13 \cdot 42^2,\ y^2 = 5 \cdot 42^2.$$

Получаем, что

$$CB = x = 42\sqrt{13},$$

$$BA = 2x = 84\sqrt{13},$$

$$AC = 3y = 126\sqrt{5}.$$

Но есть и другой путь, красивый и простой в исполнении.

Понятно, что $CR = RD = 84$. Если найдём BR и RE, то по теореме Пифагора сможем вычислить BC и CE. Проведём $EF \parallel CD$, см. рис. 6. Так как $AE = 2 \cdot CE$, получаем, что $FA = 2 \cdot DF$. Следовательно, $AD = BD = 3 \cdot DF$, но тогда и $BR = 3 \cdot RE$. Получаем, что $RE = 42$, $BR = 126$. Далее находим стороны треугольника ABC.

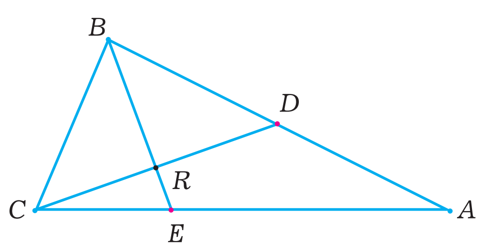

Рис. 6

Нужное нам соотношение $BR = 3 \cdot RE$ можно получить аналогичным образом, используя и другие дополнительные построения. Например, продолжив медиану CD до пересечения с $BK \parallel AC$, см. рис. 7.

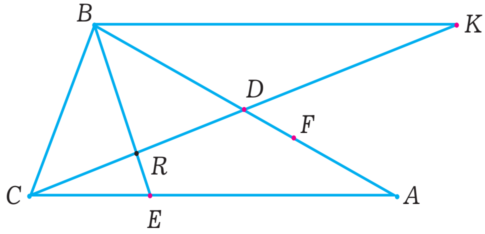

Рис. 7

Или продолжив биссектрису BE до пересечения с $CF \parallel BA$, см. рис. 8.

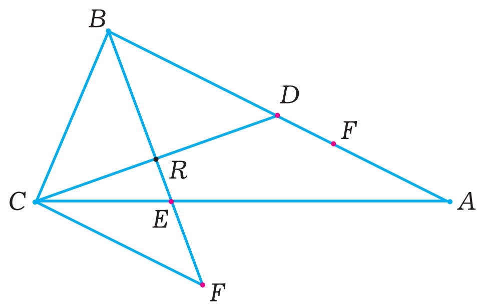

Рис. 8

Задача 4. В треугольнике ABC сторона $AC = 4$, $\cos A = -0{,}8$, $\cos C = \frac{8}{\sqrt{73}}$. Найдите площадь треугольника ABC (рис. 9).

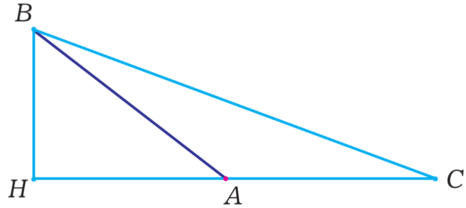

Рис. 9

Решение. Это выглядит как обычная задача на решение треугольников, но как найти $\sin B$? То, что $\sin B = \sin(A + C)$, девятиклассники уже должны знать, но вот только формула синуса суммы им ещё не известна. Использовать калькулятор и таблицу Брадиса на ГИА нельзя, да и приведённый целочисленный ответ указывает на существование какого-то другого пути. Подсказку можно найти в необычном значении $\cos C$. Как связаны числа 8 и 73? Разглядев, что $73 = 8^2 + 3^2$, догадаемся использовать тангенсы! Пусть $BH \perp AC$, см. рис. 9, тогда $\operatorname{tg}\angle BCH = 0{,}375$ и $\operatorname{tg}\angle BAH = 0{,}75$. Получается, что

$$\begin{cases} BH = 0{,}75HA, \\ BH = 0{,}375(HA + AC). \end{cases}$$

Отсюда находим, что $HA = 4$ и $BH = 3$. Тогда искомая площадь треугольника ABC равна 6.

Не знаю, как эта задача, вполне подходящая для математической регаты, оказалась в учебном пособии среди 40 простейших задач базового уровня на тему «Площадь»? Но об этом ученики меня не спросили!

В многочисленных вариантах ГИА этого года (31. 05. 2014) 26-е задачи очень сильно различались по сложности. Разберём некоторые из них.

Задача 5. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B, в отношении 5:4, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $BC = 6$ (рис. 10).

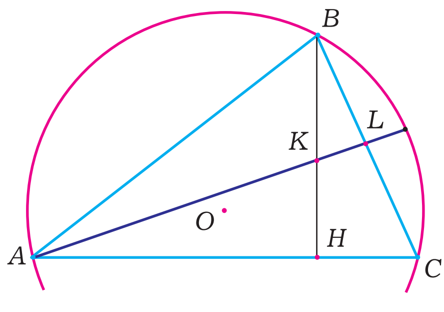

Рис. 10

Решение. Так как по свойству биссектрисы $AH/AB = HK/BK = 4/5$, то нам известен $\cos\angle BAC$, см. рис. 10. Зная косинус, вычисляем $\sin\angle BAC = 3/5$. А по теореме синусов

$$BC = 2\cdot R\cdot\sin\angle BAC.$$

Отсюда находим, что $R = 5$. Простая задача в три действия. В следующей задаче действий больше.

Задача 6. Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 9 и 11 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB, если $\cos\angle BAC = \dfrac{\sqrt{11}}{6}$.

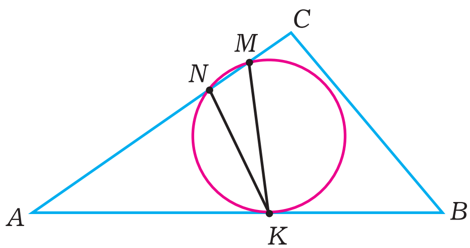

Рис. 11

Решение. Здесь можно осуществить следующий план (см. рис. 11). Так как $AK^2 = AN\cdot AM$, находим $AK = 3\sqrt{11}$. Теперь по теореме косинусов для треугольников MAK и NAK соответственно находим $MK = 9$ и $NK = 3\sqrt{11}$. В треугольнике NMK, вписанном в окружность, известны все стороны – находим $\cos\angle NMK = \dfrac{7}{18}$. Теперь вычисляем $\sin\angle NMK = \dfrac{5\sqrt{11}}{18}$, а зная синус, находим радиус описанной окружности треугольника KNM:

$$NK = 2\cdot R\cdot\sin\angle NMK,$$

он равен 5,4.

Задача 7. В треугольнике ABC известны длины сторон $AB = 8$ и $AC = 32$, точка O – центр окружности, описанной около треугольника ABC. Прямая BD, перпендикулярная прямой AO, пересекает сторону AC в точке D. Найдите CD.

Решение. Прочитав условие, можно предположить, что ответ не зависит от величины $\angle BAC$ и, следовательно, от радиуса описанной окружности. Совсем просто найти CD в случае, когда треугольник ABC – прямоугольный. На нашем чертеже (см. рис. 12) этому случаю соответствует треугольник ABE, в нём $AE = 32$. Точке D соответствует точка H, искомому отрезку CD – отрезок EH. Так как $AB^2 = AE\cdot AH$, то $AH = 2$, $EH = 30$. Ответ мы знаем, осталось решить задачу.

Пусть $AC < AE$. Возможны два случая расположения точек B и C относительно диаметра AE: на рис. 12 этим случаям соответствуют треугольники ABC и ABC_1. Дальнейшие рассуждения не зависят от того, какой случай мы рассматриваем.

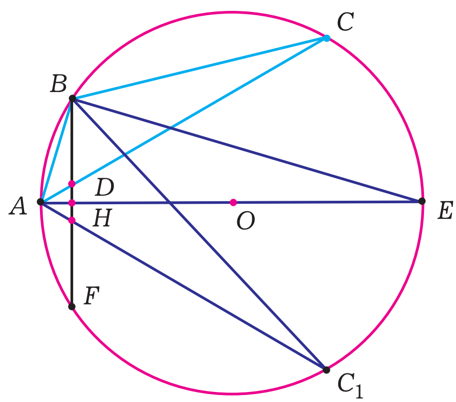

Рис. 12

Пусть точки B и C расположены по одну сторону от диаметра AE, см. рис. 13.

Из треугольников DHA и ECA:

$$\cos\angle CAE = AH/AD = AC/AE,$$

поэтому $AD = \dfrac{AH\cdot AE}{AC}$.

Но в прямоугольном треугольнике ABE $AB^2 = AE\cdot AH$, поэтому $AD = (AB^2)/AC = 2$, а $CD = 30$.

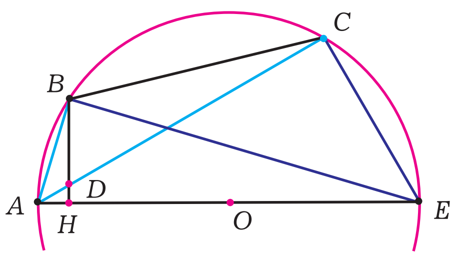

Рис. 13

Можно действовать иначе, если разглядеть подобие треугольников ABD и ACB. Действительно, угол A у них общий, $\angle BCA = \angle BEA$ (опираются на дугу AB), но $\angle BEA = \angle ABH$, поэтому $\angle BCA = \angle ABH$. Из отношения сходственных сторон $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$ находим AD и CD.

А вот ещё пять задач из вариантов ГИА-2014 для самостоятельного решения:

8. На стороне BC остроугольного треугольника ABC ($AB \neq AC$) как на диаметре построена окружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD = 85$, $MD = 68$, H – точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

9. Окружности радиусов 27 и 54 касаются внешним образом. Точки A и B лежат на первой окружности, точки C и D – на второй. При этом AC и BD – общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми AB и CD.

10. Одна из биссектрис треугольника делится точкой пересечения биссектрис в отношении 8:5, считая от вершины. Найдите периметр треугольника, если длина стороны треугольника, к которой эта биссектриса проведена, равна 20.

11. На стороне AB треугольника ABC взята точка D так, что окружность, проходящая через точки A, C и D, касается прямой BC. Найдите AD, если $AC = 38$, $BC = 34$ и $CD = 19$.

12. Биссектриса CM треугольника ABC делит сторону AB на отрезки $AM = 7$ и $MB = 9$. Касательная к описанной окружности треугольника ABC, проходящая через точку C, пересекает прямую AB в точке D. Найдите CD.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

– Моя ассистентка должна сделать 60 проволочных спиралей для опытов, а одну спираль она изготавливает за полчаса. Значит, на это ей понадобится 30 часов. Много. Пусть ей помогает лаборантка, которая сумеет делать спирали с той же скоростью. Тогда спирали будут изготовлены за...

– 30 часов и более.

– ?!

– Я учёл, что женщинам на выполнение совместной работы из-за их разговоров (при этом обо всём на свете) потребуется по крайней мере в 2 раза больше времени.