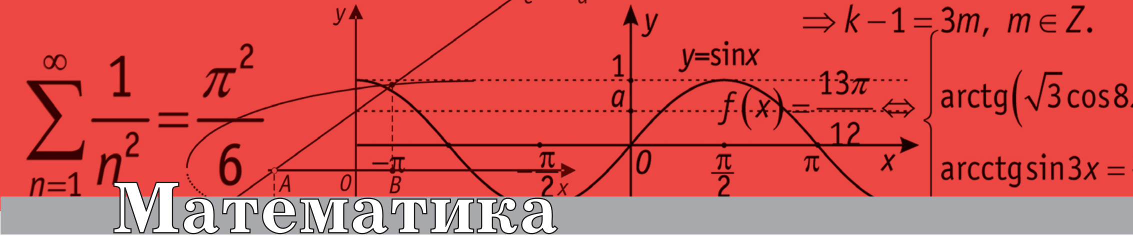

Колесникова Софья Ильинична
Старший преподаватель кафедры высшей математики Московского физико-технического института (МФТИ), специалист Заочной физико-технической школы (ЗФТШ) при МФТИ. Окончила Московский государственный университет (МГУ), имеет большой опыт работы со старшеклассниками, автор пособий «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ», «Решение сложных задач ЕГЭ».

Графики в задачах с параметрами

В статье рассматриваются довольно простые задачи. Однако они вызвали заметный интерес у слушателей курсов повышения квалификации учителей и методических работников по математике, проходивших при МФТИ в июне 2014 г. (начало см. в № 9).

Рассматривается три способа решения задач с неравенствами вида $\dfrac{x-f(a)}{x-g(a)} \le 0$ – два аналитических и один графический, а также два способа решения задач с неравенствами вида $\dfrac{x-f(a)}{x-g(a)} \ge 0$ – аналитический и графический.

Приводится подробный анализ графического решения некоторых задач для неравенств вида $\dfrac{a-f(x)}{a-g(x)} \ge 0\ (\le 0)$.

Часть 2. Метод интервалов для «дробно-линейных» неравенств в плоскости $(x,\ a)$

1. Некоторые задачи для неравенств вида $\dfrac{x-f(a)}{x-g(a)} \ge 0\ (\le 0)$

Задача 1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых отрезок $[-3;-1]$ целиком содержится среди решений неравенства

$$\frac{x-3a}{a-2x} \le 0.$$

Решение. *Первый способ* (аналитический, метод интервалов). Неравенство будем решать методом интервалов. Прежде всего запишем его правильно:

$$\frac{x-3a}{a-2x} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x-3a}{x-\frac{a}{2}} \ge 0.$$

Решение зависит от взаимного расположения точек $3a$ и $\frac{a}{2}$. Поэтому, чтобы расставить точки, придётся рассмотреть два случая:

1) $a \geq 0$:

$$\frac{x-3a}{x-\frac{a}{2}} \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0{,}5a) \cup [3a; +\infty),$$

см. рис. 1.

Рис. 1

В этом случае отрезок $[-3;-1]$ целиком входит в промежуток $\left(-\infty; \frac{a}{2}\right)$, т. е. неравенство выполнено для любого $a \geq 0$.

2) $a < 0$:

$$\frac{x-3a}{x-\frac{a}{2}} \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 3a] \cup (0{,}5a; +\infty),$$

см. рис. 2.

Рис. 2

В этом случае возможны два варианта: либо

$$0 > 3a \geq -1 \Leftrightarrow 0 > a \geq -\frac{1}{3},$$

либо

$$\frac{1}{2}a < -3 \Leftrightarrow a < -6,$$

т. е. $a \in (-\infty; -6) \cup \left[-\frac{1}{3}; 0\right)$.

Суммируя результаты 1) – 2), получаем, что

$$a \in (-\infty; -6) \cup \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right).$$

Ответ. $(-\infty; -6) \cup \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Второй способ (график в плоскости $(x;a)$). Полезным для решения задачи оказывается построение графиков в плоскости $(x;a)$. Построим сначала графики прямых $x - 3a = 0$ (числитель равен 0) – сплошная линия, и $a - 2x = 0$ (знаменатель равен 0) – пунктирная линия, так как это ноль знаменателя, см. рис. 3.

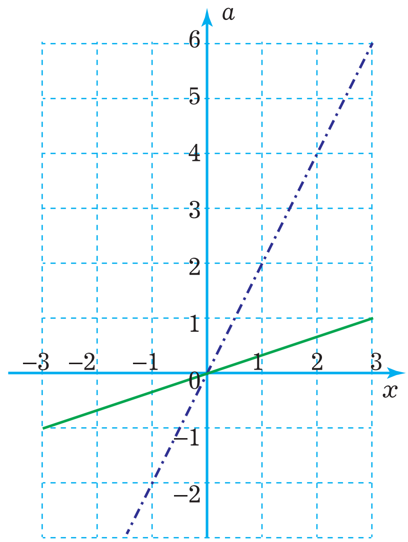

Рис. 3

Каждая из этих прямых разбивает плоскость на две полуплоскости: в одной полуплоскости $x - 3a > 0$, в другой $x - 3a < 0$, в одной $a - 2x > 0$, в другой $a - 2x < 0$. Вся плоскость разбилась на четыре угла, в каждом из которых дробь $\frac{x-3a}{a-2x}$ имеет свой знак, и при переходе в соседний угол меняет его (так как в это время меняет знак или числитель, или знаменатель). Чтобы узнать, какой именно знак имеет дробь в каком-либо угле, достаточно подставить в неравенство $\frac{x-3a}{a-2x} \leq 0$ произвольную точку, принадлежащую этому углу. Если внутри этого угла дробь отрицательна, то угол – «наш», а если дробь положительна, то «нашим» является соседний угол. При переходе в соседний угол знак изменяется на противоположный. Например, подставим точку (1;1): $\frac{1-3}{1-2}>0$ – дробь положительна, значит, это не наш угол. В соседнем угле неравенство меняет знак – наш угол. Следующий опять не наш, а вот вертикальный с первым – наш. Расставим знаки. Теперь проведём две вертикали $x=-3$ и $x=-1$, см. рис. 4.

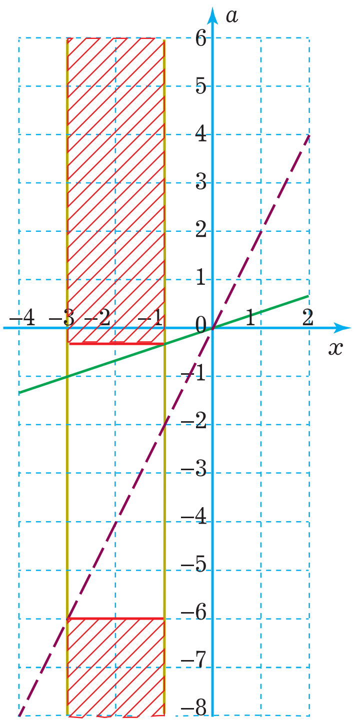

Рис. 4

Видно, что для получения ответа надо найти точки пересечения прямых $x-3a=0$ и $x=-1$, а также прямых $a-2x=0$ и $x=-3$:

$$\begin{cases}3a=x,\\ x=-1\end{cases}\Leftrightarrow x=-1,\quad a=-\frac{1}{3};$$

$$\begin{cases}a=2x,\\ x=-3\end{cases}\Leftrightarrow x=-3,\quad a=-6.$$

Отсюда следует, что

$$a\in(-\infty;-6)\cup\left[-\frac{1}{3};+\infty\right).$$

Ответ. $(-\infty;-6)\cup\left[-\frac{1}{3};+\infty\right)$.

Прежде чем говорить о третьем способе – аналитическом, рассмотрим классическую задачу с квадратным трёхчленом.

Задача 2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых интервал $(0;4)$ целиком содержится среди решений неравенства

$$x^2+(a-4)x+a^2-2a-8<0.$$

Решение. Прежде всего заметим, что данное неравенство имеет решение, если дискриминант квадратного трёхчлена положителен, т. е. уравнение

$$x^2+(a-4)x+a^2-2a-8=0$$

имеет два различных корня. Начертим произвольную параболу с ветвями, направленными вверх и имеющую два различных корня, см. рис 5.

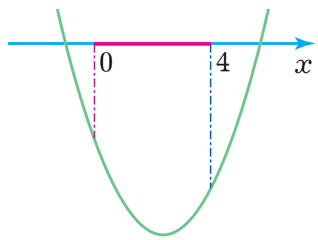

Рис. 5

Видно, что промежуток $(0;4)$ целиком содержится среди решений неравенства

$$x^2+(a-4)x+a^2-2a-8<0$$

в случае, если выполнены условия:

$$\begin{cases}y(0)\le 0,\\ y(4)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-2a-8\le 0,\\ a^2+2a-8\le 0\end{cases}\Leftrightarrow a\in[-2;\ 2].$$

Ответ. $[-2;\ 2]$.

Теперь решим другие задачи.

Задача 3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых отрезок $[-2;1]$ целиком содержится среди решений неравенства

$$\frac{x-2a+7}{x+a-1} \le 0.$$

Решение.

Первый способ (графический). Продолжим осваивать графический способ. Построим две прямые $x-2a+7=0$, $x+a-1=0$ и вертикали $x=-2$, $x=1$ (см. рис. 6). В этом случае начало координат не лежит на прямых, поэтому удобно проверить знак неравенства именно в точке $(0;0)$:

$$\frac{0-2\cdot 0+7}{0+0-1} < 0.$$

Следовательно, угол, содержащий начало координат, а также вертикальный с ним – оба наши.

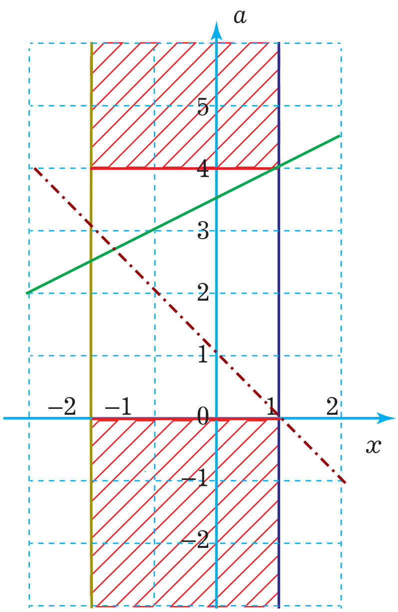

Рис. 6

Видно, что условию задачи удовлетворяют $a \in (-\infty;0) \cup [4;+\infty)$.

Ответ. $(-\infty;0) \cup [4;+\infty)$.

Второй способ (аналитический, третий обещанный способ решения задач с неравенствами вида

$$\frac{x-f(a)}{x-g(a)} \le 0 -$$

знак *меньше* или равно).

Заметим, что

$$\frac{x-f(a)}{x-g(a)} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-f(a))(x-g(a)) \le 0, \\ x-g(a) \ne 0. \end{cases}$$

Рассмотрим параболу

$$y=(x-f(a))(x-g(a)),$$

см. рис. 5. Неравенство

$$(x-f(a))(x-g(a)) \le 0$$

выполнено между корнями квадратного трёхчлена: $f(a), g(a)$. Если отрезок $[c;d]$ целиком содержится среди решений этого неравенства, то оно выполнено и для концов заданного отрезка, т. е. справедливы условия

$$\begin{cases} (c-f(a))(c-g(a)) \le 0, \\ (d-f(a))(d-g(a)) \le 0. \end{cases}$$

Эти условия являются и достаточными, так как если в концах некоторого отрезка значения *квадратного* трёхчлена с положительным коэффициентом при x^2 неположительны, то и на всём отрезке квадратный трёхчлен неположителен. В нашем случае должно ещё выполняться условие

$$x-g(a) \ne 0,$$

которое будет выполнено, если условие равносильности мы запишем в виде

$$\begin{cases} \dfrac{c-f(a)}{c-g(a)} \le 0, \\ \dfrac{d-f(a)}{d-g(a)} \le 0. \end{cases}$$

Итак, найти все значения параметра a, при каждом из которых отрезок $[c;d]$ целиком содержится среди решений неравенства

$$\frac{x-f(a)}{x-g(a)}\le 0,$$

значит просто решить *систему неравенств*:

$$\begin{cases}\dfrac{c-f(a)}{c-g(a)}\le 0,\\ \dfrac{d-f(a)}{d-g(a)}\le 0.\end{cases}$$

В нашем случае отрезок $[-2;1]$ целиком содержится среди решений неравенства

$$\frac{x-2a+7}{x+a-1}\le 0$$

тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\begin{cases}\dfrac{-2-2a+7}{-2+a-1}\le 0,\\ \dfrac{1-2a+7}{1+a-1}\le 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a-\frac{5}{2}}{a-3}\ge 0,\\ \dfrac{a-4}{a}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow a\in(-\infty;0)\cup[4;+\infty).$$

Ответ. $(-\infty;0)\cup[4;+\infty)$.

Замечание. Графический метод решения неравенств в плоскости $(x;a)$ является наглядным и более *универсальным*, так как годится для неравенств рассмотренных видов *любого* знака.

Задача 6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых отрезок $[1;2]$ целиком содержится

а) среди решений неравенства

$$\frac{ax-4}{ax+6}\le 0,$$

б) среди решений неравенства

$$\frac{ax-4}{ax+6}\ge 0.$$

Решение. Строим графики функций:

$$ax+6=0\Leftrightarrow a=-\frac{6}{x},$$

пунктирная линия на рис. 7;

$$ax-4=0\Leftrightarrow a=\frac{4}{x},$$

сплошная линия на рис. 7. Затем проводим вертикали $x=1$, $x=2$.

Решение задачи а) на рис. 7 отмечено синим цветом, а решение задачи б) – красным.

Ответ. а) $(-3;2]$;

б) $(-\infty;-6)\cup[4;+\infty)$.

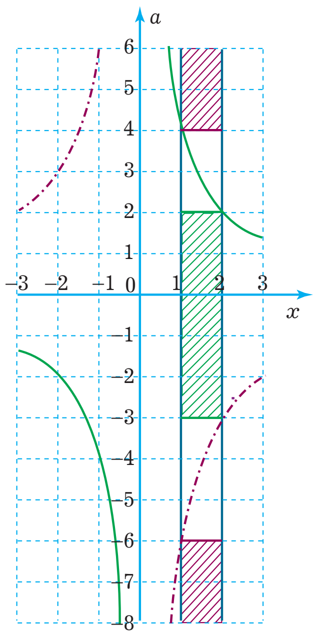

Рис. 7

Задача 7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых отрезок $[-3;4]$ целиком содержится

а) среди решений неравенства

$$\frac{x-a^2+4a}{x+a^2-6a+1}\le 0,$$

б) среди решений неравенства

$$\frac{x-a^2+4a}{x+a^2-6a+1}\ge 0.$$

Решение. Задачу а), в отличие от задачи б), легко решить аналитически:

$$\begin{cases}\dfrac{-3-a^2+4a}{-3+a^2-6a+1}\le 0,\\ \dfrac{4-a^2+4a}{4+a^2-6a+1}\le 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a^2-4a+3}{a^2-6a-2}\ge 0,\\ \dfrac{a^2-4a-4}{a^2-6a+5}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(a-1)(a-3)}{\left(a-\left(3-\sqrt{11}\right)\right)\left(a-\left(3+\sqrt{11}\right)\right)}\ge 0,\\ \dfrac{\left(a-\left(2-\sqrt{8}\right)\right)\left(a-\left(2+\sqrt{8}\right)\right)}{(a-1)(a-5)}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a\in\left(-\infty;2-\sqrt{8}\right]\cup(1;3]\cup\left(3+\sqrt{11};+\infty\right).$$

Задачу б) удобнее решать графически.

Решим графически сразу обе задачи – а) и б). Строим эскизы графиков функций

$$x-a^2+4a=0$$

зелёная парабола на рис. 8, и

$$x+a^2-6a+1=0$$

красная парабола на рис. 8. Затем проводим вертикали $x=-3$, $x=4$ и находим соответствующие точки пересечения:

$$\begin{cases}x=-a^2+6a-1,\\ x=4\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -a^2+6a-1=4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2-6a+5=0\Leftrightarrow a=1;\ 5.$$

$$\begin{cases}x=-a^2+6a-1,\\ x=-3\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3=-a^2+6a-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2-6a-2=0\Leftrightarrow a=3\pm\sqrt{11}.$$

$$\begin{cases}x=a^2-4a,\\ x=-3\end{cases}\Leftrightarrow a^2-4a+3=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a=1;\ 3.$$

$$\begin{cases}x=a^2-4a,\\ x=4\end{cases}\Leftrightarrow a^2-4a-4=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a=2\pm\sqrt{8}.$$

Сразу видно, что решений задачи б) нет.

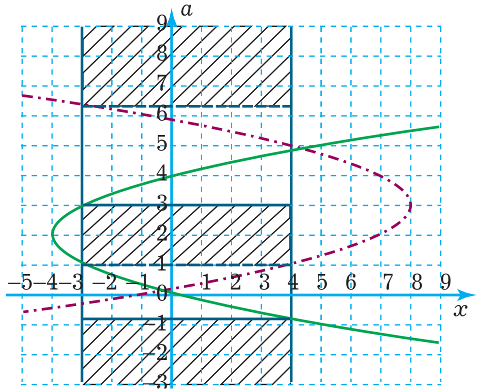

Рис. 8

Ответ.

а) $\left(-\infty;2-\sqrt{8}\right]\cup(1;3]\cup\left(3+\sqrt{11};+\infty\right)$;

б) $\varnothing$.

2. Решение некоторых задач для неравенств вида $\dfrac{a-f(x)}{a-g(x)}\le 0\ (\ge 0)$

Сначала рассмотрим задачу, в которой все графики легко можно построить.

Задача 8. Найдите все значения a, при каждом из которых

а) решением неравенства

$$\frac{a-\cos^2 x-1}{x^2+3-a}\ge 0$$

является вся числовая ось,

б) неравенство

$$\frac{a-\cos^2 x-1}{x^2+3-a}\le 0$$

не имеет решений,

в) неравенство

$$\frac{a-\cos^2 x-1}{x^2+3-a}\le 0$$

выполнено при всех действительных значениях x.

Решение. Задачу будем решать в плоскости $(x;a)$. Перепишем левую часть неравенства:

$$\frac{a-\cos^2 x-1}{x^2+3-a}=-\frac{a-(\cos^2 x+1)}{a-(x^2+3)}.$$

Построим эскизы графиков определённых на всей числовой прямой функций

$$a=\cos^2 x+1 -$$

сплошная зелёная линия на рис. 9, и

$$a=x^2+3 -$$

пунктирная (так как $x^2+3-a\ne 0$) синяя линия на рис. 9. Заметим, что $1\le\cos^2 x+1\le 2$ и $x^2+3>3$.

Плоскость разбилась на три области, в каждой из которых левая часть неравенства сохраняет знак, а при переходе в соседнюю область – меняет.

Определим знак функции

$$\frac{a-(\cos^2 x+1)}{a-(x^2+3)}$$

в точке $(0;0)$, принадлежащей зелёной области:

$$\frac{0-1-1}{0-0-3}>0.$$

Итак, в зелёной части, включая зелёную границу, выполнено неравенство

$$\frac{a-\cos^2 x-1}{a-x^2-3}\ge 0,$$

в бесцветной, включая зелёную границу,

$$\frac{a-\cos^2 x-1}{a-x^2-3}\le 0,$$

в синей без границы выполнено неравенство

$$\frac{a-\cos^2 x-1}{a-x^2-3}>0.$$

Заметим, что

1) на «целой» горизонтали (т. е. на линии $a=\text{const}$, определённой на всей оси x) $a=2$ выполнено равенство

$$\frac{a-\cos^2 x-1}{a-x^2-3}=0.$$

(она прорисована пунктиром для обозначения решения пункта б));

2) на «целой» горизонтали $a=3$ выполнено неравенство

$$\frac{a-\cos^2 x-1}{a-x^2-3}<0;$$

3) на «целых» горизонталях $a=c,\ c\le 2,$ выполнено неравенство

$$\frac{a-\cos^2 x-1}{a-x^2-3}\ge 0.$$

Теперь можно отвечать на вопросы задачи.

а) Как видно из рис. 9, решением задачи является область, состоящая из «целых» красных горизонталей, на которых выполнено неравенство

$$\frac{a-\cos^2 x-1}{x^2+3-a}\ge 0\Leftrightarrow\frac{a-\cos^2 x-1}{a-x^2-3}\le 0,$$

т. е. если $a\in[2;3)$.

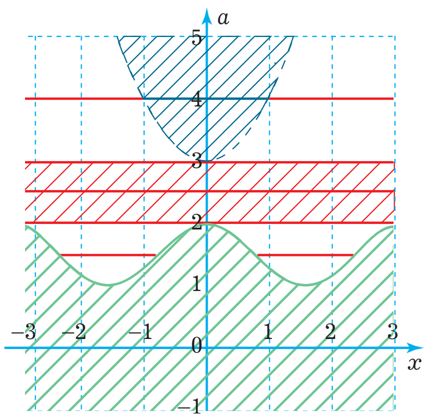

Рис. 9

б) Видно, что неравенство

$$\frac{a-\cos^2 x-1}{x^2+3-a}\le 0\Leftrightarrow\frac{a-\cos^2 x-1}{a-x^2-3}\ge 0$$

не имеет решений, если $a \in (2;3]$ – красная полоса на рис. 9, потому что любая другая горизонталь затрагивает либо зелёную, либо синюю область.

в) Как оказалось, числитель ограничен не только сверху, но и снизу. Поэтому мы видим, что неравенство

$$\frac{a-\cos^2 x-1}{x^2+3-a} \le 0 \Leftrightarrow \frac{a-\cos^2 x-1}{a-x^2-3} \ge 0,$$

выполненное в зелёной и синей областях, при *всех* действительных значениях x справедливо только в той части, где расположены «целые» горизонтали (зелёные), т. е. там, где $a \in (-\infty;1]$.

Ответ. а) $[2;3)$; б) $(2;3]$; в) $(-\infty;1]$.

Важное примечание. Нужны ли на самом деле графики для решения этой задачи? Как видите, конкретный вид графиков *не имеет* никакого значения! Важны лишь области определения числителя и знаменателя, а также числа, ограничивающие графики сверху или снизу соответственно. А эти значения могут быть найдены или с помощью каких-то оценок, или с помощью производных.

Отступление. В последнее время при решении задач довольно часто используется неравенство Коши. Чтобы не загромождать решения в дальнейшем, напомним его:

$$a^2|x| + \frac{b^2}{|x|} \ge 2|ab|, \quad abx \ne 0. \qquad (*)$$

Действительно,

$$a^2|x| + \frac{b^2}{|x|} =$$

$$= \frac{a^2|x|^2 + b^2 - 2|ab||x| + 2|ab||x|}{|x|} =$$

$$= \frac{(|a||x|-|b|)^2 + 2|ab||x|}{|x|} \ge 2|ab|,$$

причём видно, что равенство достигается тогда и только тогда, когда

$$|a||x| - |b| = 0 \Leftrightarrow |x| = \left|\frac{b}{a}\right|.$$

Нередко неравенство Коши используется для оценки выражения вида $ax + \frac{b}{x}$, где $a > 0$, $b > 0$, $x > 0$. Тогда оно принимает вид

$$ax + \frac{b}{x} \ge 2\sqrt{ab}, \quad a > 0,\ b > 0,\ x > 0,$$

причём равенство достигается при

$$x = \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Задача 9. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$\frac{a|\sin x| - 1}{ax^2 + 4x^4 + 1} \le 0$$

выполнено при всех действительных значениях x.

Решение. Эта задача отличается от предыдущей тем, что графики сложнее. Но мы ведь заметили, что «истинные» графики и *не нужны*.

Первый способ (применяем неравенство Коши). Задачу будем решать в плоскости $(x;a)$. Работать будут функции

$$a|\sin x| - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{|\sin x|}$$

и

$$ax^2 + 4x^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -4x^2 - \frac{1}{x^2}.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{|\sin x|} \ge 1 \Rightarrow a \ge 1.$$

Вообще говоря, эскиз этого графика прикинуть можно, хотя пока мы этого делать не будем. График расположен не ниже прямой $a = 1$ (независимо от конкретного вида графика), функция определена на всей числовой оси, за исключением точек вида $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; значение $a = 1$ (сплошная горизонталь) принимается в точках, где $|\sin x| = 1$. Поэтому $a = 1$ отмечается сплошной линией (рис. 10).

Прикинем, что можно сказать об эскизе второго графика. В силу неравенства Коши (*), для всех $x \neq 0$ имеем

$$a = -4x^2 - \frac{1}{x^2} \leq -4,$$

причём

$$a = -4 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Эскиз этого графика уже не всякий школьник представляет. Но зато мы понимаем, что график расположен ниже прямой $a = -4$ для всех действительных x (тоже независимо от вида графика), функция определена на всей оси за исключением точки $x = 0$ (можно считать, что это фиолетовый пунктир на рис. 10, хотя вид этого графика далёк от действительного). Равенство $a = -4$ исключаем (пунктирная горизонталь), так как при этом знаменатель обращается в 0, поэтому прямая $a = -4$ изображена пунктиром.

В точке $(0;0)$ имеем

$$\frac{-1}{+1} < 0$$

заданное неравенство выполнено. Значит, бесцветная область «наша». Условию задачи удовлетворяет та её часть, в которой расположились «целые» горизонтали, т. е. все значения $a \in (-4;1]$. Настоящие графики приведены на рис. 10.

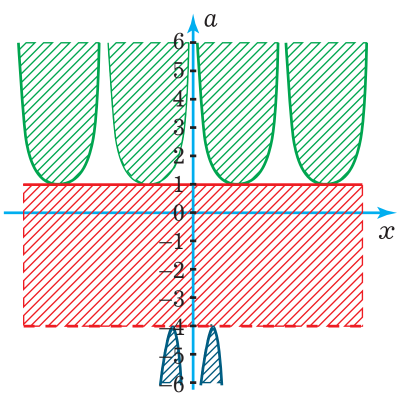

Рис. 10

Ответ. $(-4;1]$.

Второй способ (работаем с производной). Нас интересует поведение функций

$$a(x) = \frac{1}{\sin|x|} \text{ и } a(x) = -4x^2 - \frac{1}{x^2}.$$

Первая функция легко оценивается снизу:

$$a(x) = \frac{1}{|\sin x|} \geq 1.$$

Если мы не поняли, не знаем или просто забыли, что можно воспользоваться неравенством Коши, то найдём экстремум второй функции с помощью производной:

$$a'(x) = -8x + \frac{2}{x^3} = \frac{2 - 8x^4}{x^3};$$

$$a'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{\max} = a\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -4 \cdot \frac{1}{2} - 2 = -4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a(x) = -4x^2 - \frac{1}{x^2} \leq -4.$$

Остальные рассуждения такие же, как в первом способе. Отсюда следует

Ответ. $(-4;1]$.

Задача 10. Найдите все значения a, при каждом из которых

а) неравенство

$$\frac{a - 3\cos\sqrt{x-1} + 1}{3x^6 + \sqrt{10}x^{-6} - 4 - a} \geq 0$$

выполнено при любых $x \geq 1$,

б) неравенство

$$\frac{a - 3\cos\sqrt{x-1} + 1}{3x^6 + \sqrt{10}x^{-6} - 4 - a} \leq 0$$

не имеет решений,

в) неравенство

$$\frac{a - 3\cos\sqrt{x-1} + 1}{3x^6 + \sqrt{10}x^{-6} - 4 - a} \leq 0$$

выполнено при любых $x \geq 1$.

Решение. Будем опять решать задачу в плоскости $(x;a)$. Перепишем неравенство в более привычном виде:

$$\frac{a-3\cos\sqrt{x-1}+1}{3x^6+\sqrt{10}x^{-6}-4-a}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a-3\cos\sqrt{x-1}+1}{a-\left(3x^6+\sqrt{10}x^{-6}-4\right)}\le 0.$$

Нам надо изучить поведение эскизов графиков уравнения

$$a-3\cos\sqrt{x-1}+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a=3\cos\sqrt{x-1}-1$$

и уравнения

$$3x^6+\sqrt{10}x^{-6}-4-a=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a=3x^6+\frac{\sqrt{10}}{x^6}-4.$$

Это ещё более сложные функции, построение которых требует умения и времени, которых точно не хватит при выполнении задания ЕГЭ (а этот пример был в 2008 г.). Но ведь мы знаем, что настоящие эскизы и не требуются для решения поставленной задачи.

Заметим, что функция

$$a=3\cos\sqrt{x-1}-1$$

определена при $x\ge 1$, при этом

$$-4\le 3\cos\sqrt{x-1}-1\le 2,$$

т. е. график расположен в полосе $-4\le a\le 2$, см. рис. 11. На горизонтали $a=2$ выполнено равенство

$$\frac{a-3\cos\sqrt{x-1}+1}{a-\left(3x^6+\sqrt{10}x^{-6}-4\right)}=0.$$

Вторая функция

$$a=3x^6+\frac{\sqrt{10}}{x^6}-4$$

определена на $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, чётная, и

$$3x^6+\frac{\sqrt{10}}{x^6}-4\to+\infty$$

при $x\to\infty$ и при $x\to 0$. Кроме того,

$$a=3x^6+\frac{\sqrt{10}}{x^6}-4\ge 2\sqrt{3\sqrt{10}}-4$$

в силу неравенства Коши. График функции

$$a=-4+3x^6+\sqrt{10}x^{-6}$$

расположен выше прямой $a=-4+2\sqrt[4]{90}$, при этом

$$2\sqrt[4]{90}-4 \vee 2 \Leftrightarrow \sqrt[4]{90}\vee 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 90>81 \Rightarrow 2\sqrt[4]{90}-4>2.$$

В точке, например, $(2;0)$ неравенство имеет вид

$$\frac{0-3\cos 1+1}{0-\left(3\cdot 2^6+\sqrt{10}2^{-6}-4\right)}>0,$$

поэтому под синей и над зелёной линиями выполнено неравенство

$$\frac{a-3\cos\sqrt{x-1}+1}{a-\left(3x^6+\sqrt{10}x^{-6}-4\right)}>0,$$

а в бесцветной области выполнено неравенство

$$\frac{a-3\cos\sqrt{x-1}+1}{a-\left(3x^6+\sqrt{10}x^{-6}-4\right)}<0.$$

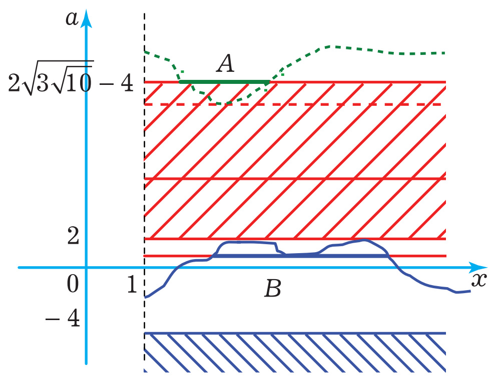

Рис. 11

Теперь будем решать задачи.

а) Так как между кривыми выполнено неравенство

$$\frac{a-3\cos\sqrt{x-1}+1}{3x^6+\sqrt{10}x^{-6}-4-a}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a-3\cos\sqrt{x-1}+1}{a-\left(3x^6+\sqrt{10}x^{-6}-4\right)}\le 0,$$

то в той его части, где расположены «целые» горизонтали (из ОДЗ), неравенство выполнено *при всех* $x\ge 1$. Это происходит при

$$2\le a<-4+2\sqrt{3\sqrt{10}},$$

заштриховано красным.

б) Неравенство

$$\frac{a-3\cos\sqrt{x-1}+1}{3x^6+\sqrt{10}x^{-6}-4-a}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a-3\cos\sqrt{x-1}+1}{a-\left(3x^6+\sqrt{10}x^{-6}-4\right)}\ge 0,$$

как видно на рис. 11, не выполнено, конечно, вне ОДЗ, а также при

$$2<a\le -4+2\sqrt{3\sqrt{10}}$$

область красная, но с другими границами, так как на нарисованных границах неравенство выполнено. При любом другом значении параметра a на соответствующей горизонтали есть промежутки, где неравенство выполнено (красные), а есть и такие, в которых оно не выполнено (синие или зелёные), или оно не выполнено на всей горизонтали (синие).

в) На рис. 11 видно, что неравенство

$$\frac{a-3\cos\sqrt{x-1}+1}{3x^6+\sqrt{10}x^{-6}-4-a}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a-3\cos\sqrt{x-1}+1}{a-\left(3x^6+\sqrt{10}x^{-6}-4\right)}\ge 0$$

выполнено *для всех* $x\ge 1$ при $a\in(-\infty;-4]$ – заштриховано синим.

Для любопытных настоящие графики функций

$$a=f(x)=3\cos\sqrt{x-1}-1$$

и

$$a=g(x)=-4+3x^6+\sqrt{10}x^{-6},$$

а также решения задач (заштрихованные области) представлены на рис. 12. Для самых «дотошных» детальное поведение функции

$$a=-4+3x^6+\sqrt{10}x^{-6}$$

показано на рис. 13.

Ответ. а) $\left[2;-4+2\sqrt{3\sqrt{10}}\right)$;

б) $\left(2;-4+2\sqrt{3\sqrt{10}}\right]$; в) $(-\infty;-4]$.

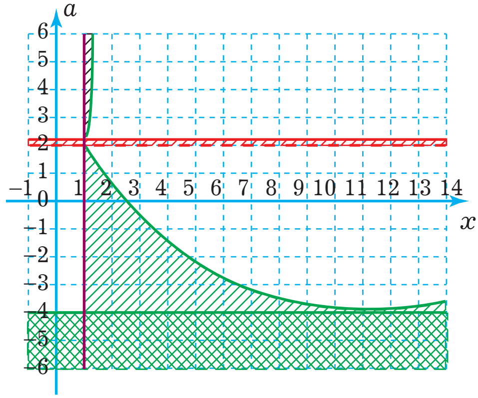

Рис. 12

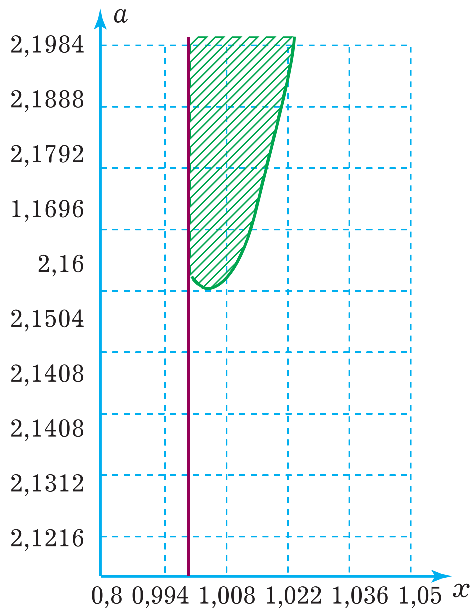

Рис. 13

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Вечность – это время до следующего выходного дня, а мгновение – это отпускное время.

***

Самое тяжёлое время – первые четыре дня после воскресенья.