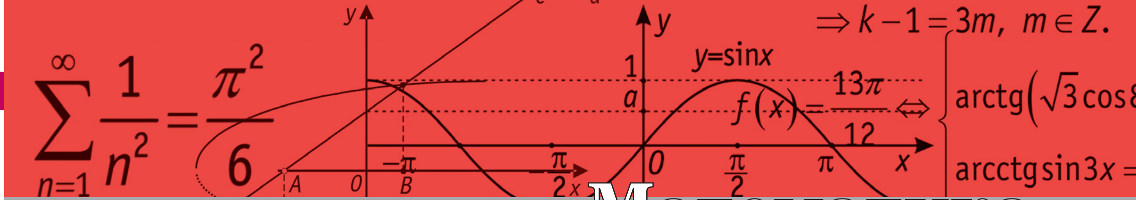


Колесникова Софья Ильинична
Старший преподаватель кафедры высшей математики Московского физико-технического института (МФТИ), специалист Заочной физико-технической школы (ЗФТШ) при МФТИ. Окончила Московский государственный университет (МГУ), имеет большой опыт работы со старшеклассниками, автор пособий «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ», «Решение сложных задач ЕГЭ».

Графики в задачах с параметрами

Данная работа открывает цикл статей, посвящённых исследованию некоторых задач, содержащих или всё тот же хорошо знакомый квадратный трёхчлен, или дробно-линейные неравенства, или довольно сложные уравнения, содержащие модуль, которые уже алгоритмично не решаются. К решению задач активно привлекаются графики.

При работе с квадратным трёхчленом иногда невозможно обойтись без дискриминанта, но в работе ни разу не появился *корень* из дискриминанта, зависящего от параметра. Методика исследования несколько отличается от общепринятой.

Многие задачи взяты из разных пособий под редакцией А.Л. Семёнова и И.В. Ященко (2014 г.), где они предложены в качестве подготовительных заданий С5. Приведены другие способы и методы их решений.

Цикл состоит из нескольких разных по темам частей. Первые две части адресованы учителям и учащимся 9 – 11 классов, знакомым с квадратным трёхчленом. В первой рассматриваются уравнения вида

$$x^2 \pm f(a)x - g(a) = 0,$$

во второй – неравенства вида

$$\frac{x - f(a)}{x - g(a)} \geq 0 \ (\leq 0).$$

Далее несколько сложнее – там в уравнения входят модули, сами уравнения алгоритмично не решаются, иногда к исследованию приходится привлекать производные.

Статьи написаны по просьбе учителей. Они основаны на материалах лекций, прочитанных автором слушателям курсов повышения квалификации учителей и методических работников при МФТИ в июне 2014 г.

Часть 1. Опять квадратный трёхчлен

Часто встречаются задачи с параметром, которые содержат радикалы, логарифмы, показательные функции, но при этом с помощью замены переменных сводятся к обыкновенному квадратному уравнению или неравенству. Здесь очень важно переформулировать исходную задачу применительно к *получившемуся* квадратному уравнению или неравенству.

В статье подробно излагается часто используемый в работах автора приём исследования функции

$$h(t) = t^2 - f(a)t - g(a)$$

с помощью исследования более простого квадратного трёхчлена

$$y(t) = t^2 - f(a)t = \big(t - f(a)\big)t,$$

построение которого не связано с дискриминантом. Некоторые задачи могут быть решены и другими, более обычными способами.

1. Несколько слов об исследовании квадратного уравнения

Рассмотрим сначала уравнение вида $x^2 - f(a)x - g(a) = 0$.

1) Перепишем его по-другому:

$$x^2 - f(a)x - g(a) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \big(x - f(a)\big)x = g(a).$$

2) Построим эскиз графика функции $y(x) = \big(x - f(a)\big)x$. Это очень просто – один корень равен 0, а другой равен $f(a)$. Нам будет важен только знак $f(a)$, см. рис. 1, 2.

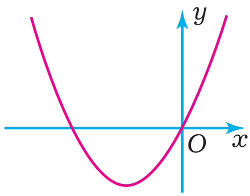


Рис. 1. $f(a) < 0$

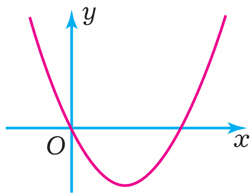


Рис. 2. $f(a) > 0$

Задача 1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 + \left(a^2 - 3a + 4\right)x + a^2 - 7a + 12 = 0$$

имеет неотрицательный корень.

Решение. Перепишем уравнение по-другому, отправив свободный член направо. Это очень удобно, потому что легко строить эскиз графика оставшегося квадратного трёхчлена, не думая о дискриминанте:

$$x^2 + \left(a^2 - 3a + 4\right)x + a^2 - 7a + 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \left(a^2 - 3a + 4\right)\right)x = -a^2 + 7a - 12.$$

Построим эскиз графика левой части – функции

$$y = \left(x + \left(a^2 - 3a + 4\right)\right)x.$$

Так как дискриминант квадратного трёхчлена $a^2 - 3a + 4$ отрицателен, знак коэффициента при x положителен при любых a. Поэтому эскиз графика имеет вид, представленный на рис. 1. Теперь проведём прямую $y = \text{const} = c$, см. рис. 3.

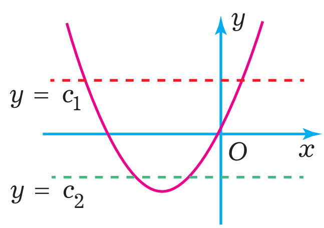


Рис. 3

В нашей задаче в роли c «выступает» выражение

$$c = -a^2 + 7a - 12.$$

Видно, что уравнение имеет неотрицательный корень, если

$$-a^2 + 7a - 12 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 7a + 12 \leq 0 \Leftrightarrow a \in [3; 4],$$

при этом уравнение имеет два решения, среди которых всегда есть неотрицательное.

Ответ. $[3;4]$.

Обобщение. Так можно исследовать уравнения вида

$$x^2 + f^2(a)x = g(a), \quad f^2(a) \neq 0. \quad (1)$$

1) Если $g(a) > 0$, то уравнение

$$x^2 + f^2(a)x - g(a) = 0$$

имеет два корня разных знаков. Здесь, конечно, ничего нового нет: для данного квадратного уравнения $D > 0$, хотя мы его и не вычисляли, произведение корней отрицательно. Но данный метод более наглядный.

2) Если $g(a) \leq 0$, то уравнение

$$x^2 + f^2(a)x - g(a) = 0$$

не имеет положительных корней. В этом случае уже есть преимущества данного метода перед классическим, в котором пришлось бы перебирать несколько вариантов.

3) Если $g(a) = 0$, то уравнение

$$x^2 + f^2(a)x = g(a)$$

имеет один отрицательный корень и один корень, равный 0. Это, конечно, очевидно, но иногда рисунок может помочь при полном исследовании заданного уравнения.

Можно также исследовать свойства решений уравнения

$$x^2 - f^2(a)x = g(a), f^2(a) \neq 0. \quad (2)$$

Из рис. 4 видно, что:

1) если $g(a) > 0$, то уравнение

$$x^2 - f^2(a)x = g(a)$$

имеет два корня разных знаков,

2) если $g(a) \leq 0$, то уравнение не имеет отрицательных корней,

3) если $g(a) = 0$, то уравнение

$$x^2 - f^2(a)x = g(a)$$

имеет один положительный корень и один корень, равный 0.

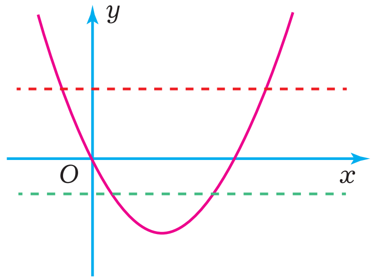


Рис. 4

Заметим, что в обоих случаях ответы 1) – 3) *не зависят* ни от дискриминанта уравнения, ни от функции $f(a)$. Ответ зависит *только* от значений свободного члена!

А вот на существование, например, двух отрицательных корней уже влияет функция $f(a)$. Например, уравнение

$$x^2 + f^2(a)x = g(a), \ f^2(a) \neq 0$$

имеет два отрицательных корня, если

$$y\left(-\frac{f^2(a)}{2}\right) = -\frac{f^4(a)}{4} < g(a) < 0,$$

где

$$y(x) = x^2 + f^2(a)x.$$

Здесь уже работает дискриминант исходного уравнения

$$x^2 + f^2(a)x = g(a):$$

$$D = f^4(a) + 4g(a) > 0.$$

Но заметим, что формул с радикалами нет.

Конечно, эти задачи можно решать и по-другому – например, при исследовании некоторых случаев хорошо работают теоремы Виета. На взгляд автора, описанный приём обладает хорошей наглядностью.

Приведённые рисунки могут помочь и при исследовании неравенств вида

$$x^2 \pm f^2(a)x - g(a) \ge 0 \quad (\le 0).$$

Задача 2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 - (8a-1)x + a^2 - 4a - 5 = 0$$

имеет единственный положительный корень.

Решение. Перепишем уравнение по-другому, отправив свободный член направо:

$$\big(x - (8a-1)\big)x = -a^2 + 4a + 5.$$

В отличие от предыдущих задач, расположение корней левой части зависит от знака коэффициента при x. Поэтому придётся рассмотреть два случая, см. рис. 5, 6.

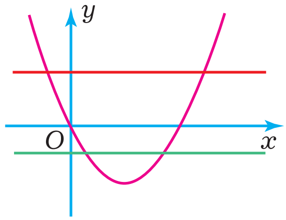


Рис. 5. $8a - 1 > 0$

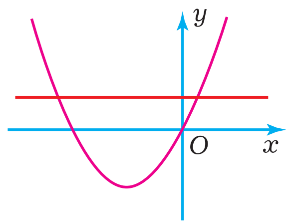


Рис. 6. $8a - 1 \le 0$

Видно, что

1) если $8a - 1 > 0$ (см. рис. 5), то уравнение

$$x^2 - (8a-1)x + a^2 - 4a - 5 = 0$$

имеет единственное положительное решение в случае, если

$$-a^2 + 4a + 5 \ge 0 \Leftrightarrow a^2 - 4a - 5 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \in [-1; 5] \Rightarrow a \in \left(\frac{1}{8}; 5\right];$$

2) если $8a - 1 \le 0$ (см. рис. 6), то уравнение

$$x^2 - (8a-1)x + a^2 - 4a - 5 = 0$$

имеет единственное положительное решение в случае, если

$$-a^2 + 4a + 5 > 0 \Leftrightarrow a^2 - 4a - 5 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \in (-1; 5) \Rightarrow a \in \left(-1; \frac{1}{8}\right].$$

Ответ. $(-1; 5]$.

Задача 3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых совокупность уравнений

$$\left[\begin{aligned} &x^2 - 2x - f(a) = 0, \\ &x^2 + 2x - g(a) = 0 \end{aligned}\right.$$

имеет хотя бы один положительный корень.

Решение. Переписываем уравнения совокупности в другом виде:

$$\left[\begin{aligned} &x^2 - 2x - f(a) = 0, \\ &x^2 + 2x - g(a) = 0 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &(x-2)x = f(a), \\ &(x+2)x = g(a). \end{aligned}\right.$$

Затем строим графики функций $y_1(x) = (x-2)x$ и $y_2(x) = (x+2)x$ – нам годятся рис. 5 и 6 соответственно.

Из рис. 5 следует, что первое уравнение совокупности имеет хотя бы одно положительное решение, если

$$f(a) \ge y_{1\text{верш}} = y_1(1) \Leftrightarrow f(a) \ge -1,$$

а второе уравнение совокупности имеет хотя бы одно положительное решение, если $g(a) > 0$, см. рис. 6. Итак, совокупность уравнений

$$\left[\begin{aligned} &x^2 - 2x - f(a) = 0, \\ &x^2 + 2x - g(a) = 0 \end{aligned}\right.$$

имеет хотя бы одно положительное решение, если выполнена совокупность неравенств

$$\left[\begin{array}{l} f(a) \geq -1, \\ g(a) > 0. \end{array}\right.$$

Ответ. $\left[\begin{array}{l} f(a) \geq -1, \\ g(a) > 0. \end{array}\right.$

Задача 4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l} 2ax^2 - 4ax - a^2 + 3 = 0, \\ (a-2)x^2 + 2(a-2)x - a^2 - a + 2 = 0 \end{array}\right.$$

имеет хотя бы одно положительное решение.

Решение. Перепишем совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} 2ax^2 - 4ax - a^2 + 3 = 0, \\ (a-2)x^2 + 2(a-2)x - a^2 - a + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2a(x-2)x = a^2 - 3, \\ (a-2)(x+2)x = a^2 + a - 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

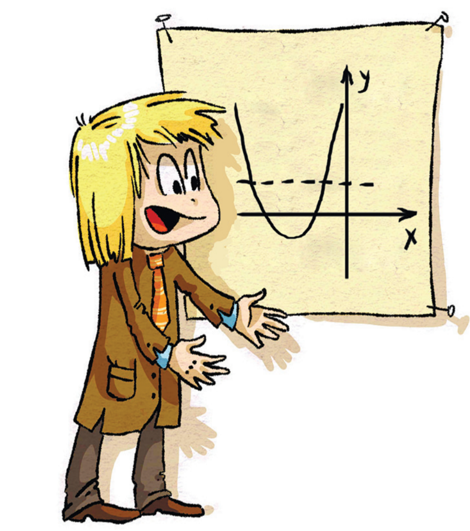
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-2)x = \dfrac{a^2-3}{2a}, \\ (x+2)x = \dfrac{a^2+a-2}{a-2}. \end{array}\right.$$

Из предыдущей задачи (или сделанных аналогичных рисунков) следует, что совокупность имеет хотя бы одно положительное решение, если

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{a^2-3}{2a} \geq -1, \\ \dfrac{a^2+a-2}{a-2} > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{a^2+2a-3}{2a} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{(a+3)(a-1)}{a} \geq 0, \\ \dfrac{a^2+a-2}{a-2} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{(a-1)(a+2)}{a-2} > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \in [-3;0) \cup [1;+\infty), \\ a \in (-2;1) \cup (2;+\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow a \in [-3;+\infty).$$

Ответ. $[-3;+\infty)$.



Задача 5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 2x + \dfrac{a+3}{a} = 0, \\ x^2 + 2x + \dfrac{a^2-4}{2a-1} = 0 \end{array}\right.$$

имеет хотя бы одно отрицательное решение.

Решение. Переписываем уравнения в другом виде:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 2x + \dfrac{a+3}{a} = 0, \\ x^2 + 2x + \dfrac{a^2-4}{2a-1} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-2)x = -\dfrac{a+3}{a}, \\ (x+2)x = \dfrac{4-a^2}{2a-1}. \end{array}\right.$$

Строим графики функций $y_1(x) = (x-2)x$, см. рис. 5, и $y_2(x) = (x+2)x$, см. рис. 6.

Видно, что совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l} (x-2)x = -\dfrac{a+3}{a}, \\ (x+2)x = \dfrac{4-a^2}{2a-1} \end{array}\right.$$

имеет хотя бы одно отрицательное решение, если выполнены условия:

$$\left[\begin{array}{l} -\dfrac{a+3}{a} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{a+3}{a} < 0, \\ \dfrac{4-a^2}{2a-1} \geq y_2(-1) = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \in (-3;0), \\ \dfrac{(a-3)(a+1)}{a-\dfrac{1}{2}} \leq 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty;-1] \cup \left(\dfrac{1}{2};3\right] \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \in (-\infty;0) \cup \left(\frac{1}{2};3\right].$$

Ответ. $(-\infty;0) \cup \left(\dfrac{1}{2};3\right]$.

2. Особенности замены переменных

После того как мы сделали замену переменных и свели наше уравнение к квадратному, надо обязательно сформулировать новую задачу – задачу для квадратного уравнения. При этом, когда мы делаем замену переменных в задачах с параметрами, надо обратить внимание на то, является замена взаимно однозначной или нет, изменяется ли множество значений новой переменной. Это очень важно учитывать при формулировке задачи в новых переменных. Если, например, в исходной задаче речь идёт о количестве корней уравнения $f(x) = 0$, то при замене $t = x+1$, которая является взаимно однозначной, количество корней уравнения $f(x) = 0$ и уравнения $f(t-1) = 0$ будет одинаково. Однако, если речь идёт о количестве положительных корней уравнения $f(x) = 0$, то для нового уравнения $f(t-1) = 0$ речь пойдёт о корнях, бо́льших 1.

Задача 6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$t + \left(a^2 - 3a + 4\right)\sqrt{1+t} + a^2 - 7a + 13 = 0$$

имеет решение.

Решение. Уравнение не является стандартным — надо что-то делать.

Заметим, что

$$t + \left(a^2 - 3a + 4\right)\sqrt{1+t} + a^2 - 7a + 13 =$$

$$= 0 \Leftrightarrow (t+1) + \left(a^2 - 3a + 4\right)\sqrt{1+t} +$$

$$+ a^2 - 7a + 12 = 0.$$

Поэтому удобно сделать замену переменных:

$$\sqrt{1+t} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ t = x^2 - 1. \end{cases}$$

Обратим внимание на то, что количество неотрицательных значений x и значений t одинаково – замена взаимно однозначна.

Заданное уравнение примет вид:

$$x^2 + \left(a^2 - 3a + 4\right)x + a^2 - 7a + 12 = 0.$$

Теперь надо *выяснить,* какую задачу надо решить для нового, уже стандартного квадратного уравнения. Так как новая переменная принимает только неотрицательные значения, то надо решить

Задачу 6*. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x^2+\left(a^2-3a+4\right)x+a^2-7a+12=0$$

имеет неотрицательный корень.

Эту же задачу можно сформулировать и по-другому:

Задача 6.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+\left(a^2-3a+4\right)x+a^2-7a+12=0, \\ x\ge 0 \end{cases}$$

имеет решение.

Из **Задачи 1** следует ответ для **Задачи 6*** и **Задачи 6**:** $a\in[3;4]$.

Ответ. $[3;4]$.

Задача 7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x^2+\left(a^2-3a+4\right)\sqrt{1+x^2}-7a+13=0$$

имеет решение.

Решение.

1) Заметим, что

$$x^2+\left(a^2-3a+4\right)\sqrt{1+x^2}-7a+13=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+1\right)+\left(a^2-3a+4\right)\sqrt{1+x^2}-$$

$$-7a+12=0.$$

Сделаем, как обычно, замену переменных:

$$\sqrt{1+x^2}=t,\ \ t\ge 0.$$

Уравнение примет вид

$$t^2+\left(a^2-3a+4\right)t-7a+12=0.$$

2) Какую задачу надо решить для этого уравнения? Задачу 1? Другую? Почему?

Это связано с *заменой* переменных. В отличие от **Задачи 6**, ограничения $t\ge 0$ недостаточно для существования решения исходной задачи.

Найдём связь старой переменной с новой:

$$\sqrt{1+x^2}=t \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 0, \\ 1+x^2=t^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 0, \\ x^2=t^2-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{t^2-1}, \\ t\ge 1. \end{cases}$$

Оказывается, несмотря на «схожесть» с **Задачей 6**, возникает новая задача, потому что $t\ge 1$, а не просто неотрицательно. Она звучит так:

Задача 7*. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$t^2+\left(a^2-3a+4\right)t-7a+12=0$$

имеет решение, принадлежащее промежутку $[1;+\infty)$, или, что то же:

Задача 7.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+\left(a^2-3a+4\right)x-7a+12=0, \\ x\ge 1 \end{cases}$$

имеет решение.

3) Решим **Задачу 7*.** Опять перепишем уравнение по-другому, отправив свободный член направо:

$$\left(t+\left(a^2-3a+4\right)\right)t=7a-12.$$

Построим эскиз графика функции

$$y(t)=\left(t+\left(a^2-3a+4\right)\right)t$$

и проведём прямую $y=7a-12$, см. рис. 7.

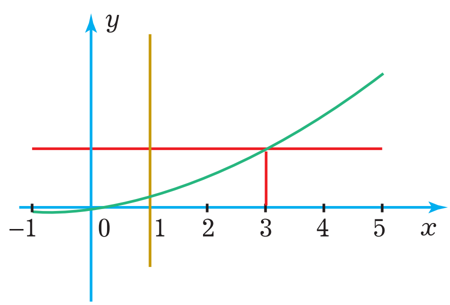


Рис. 7

Видно, что условие задачи будет выполнено, если

$$7a-12\ge y(1)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 7a-12\ge 1+\left(a^2-3a+4\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2-10a+17\le 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a\in\left[5-\sqrt{8};5+\sqrt{8}\right].$$

Ответ. $\left[5-\sqrt{8};5+\sqrt{8}\right]$.

Задача 8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$4^x-(3a-1)2^x+a^2-a+1\le 0$$

имеет решение.

Решение. Сделаем замену переменных:

$$2^x=t\Leftrightarrow x=\log_2 t,\ \ t>0.$$

Перепишем задачу в новых переменных.

Задача 8*. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} t>0, \\ \left(t-(3a-1)\right)t\le -a^2+a-1 \end{cases}$$

имеет решение.

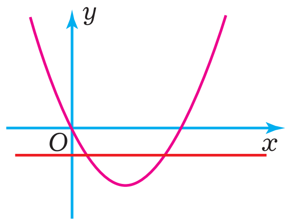


Рис. 8. $3a-1>0$

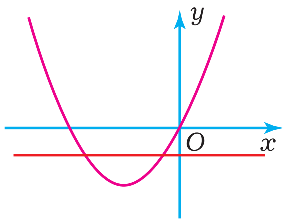


Рис. 9. $3a-1\le 0$

Строим эскиз графика функции $y=\left(t-(3a-1)\right)t$ и проводим горизонталь $y=-a^2+a-1$, см. рис. 8, 9. Заметим, что $-a^2+a-1<0$ при любом значении параметра.

Теперь видно, что

1) если $3a-1>0$ (рис. 8), то неравенство

$$\left(t-(3a-1)\right)t\le -a^2+a-1$$

имеет положительное решение в случае, если

$$-a^2+a-1\ge y\left(\frac{3a-1}{2}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -a^2+a-1\ge -\left(\frac{3a-1}{2}\right)^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -4a^2+4a-4\ge -9a^2+6a-1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5a^2-2a-3\ge 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a\in\left(-\infty;-\frac{3}{5}\right]\cup[1;+\infty).$$

Учитывая, что $3a-1>0$, получаем, что $a\in[1;+\infty)$.

2) Если $3a-1\le 0$ (рис. 9), то, как видно, решений задачи нет.

Ответ. $[1;+\infty)$.

Задача 9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$a\left(\sin^2 x-3\right)^2+2a+\cos^2 x<4$$

выполнено для любого действительного x.

Решение. Сделаем замену переменных: $t=\sin^2 x$, t изменяется на отрезке $[0;1]$. Неравенство примет вид:

$$a(t-3)^2+2a+(1-t)<4\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow at^2-(6a+1)t+11a-3<0.$$

Возникла новая задача.

Задача 9*. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$at^2-(6a+1)t+11a-3<0$$

выполнено для любого t, принадлежащего отрезку $[0;1]$. Ситуация у нас сложнее, чем в предыдущих задачах, потому что параметр присутствует везде.

Первый способ. Решение зависит, конечно, от знака a, который определяет вид параболы.

1) Начнём, конечно, с $a=0$: $-3<0$ – неравенство выполнено для любого t, принадлежащего отрезку $[0;1]$. Значит, $a=0$ – решение задачи.

Для начала заметим, что если неравенство справедливо для всех t, принадлежащих отрезку $[0;1]$, то оно выполнено и при $t=0$, и при $t=1$, т. е.

$$\begin{cases}11a-3<0,\\ a-(6a+1)+11a-3<0 \Leftrightarrow a<\dfrac{2}{3}\end{cases} \Leftrightarrow a<\frac{3}{11}.$$

2) Рассмотрим сначала $a>0$. Ветви параболы направлены вверх. При этом известно, что, если значения квадратного трёхчлена

$$y(t)=at^2-(6a+1)t+11a-3$$

в концах отрезка отрицательны, то и внутри отрезка они тоже отрицательны. Следовательно, при

$$0<a<\frac{3}{11}$$

условия задачи выполнены.

3) Рассмотрим теперь $a<0$. Если нарисовать все возможные расположения параболы

$$y(t)=at^2-(6a+1)t+11a-3$$

относительно отрезка $[0;1]$ (нарисуйте эти положения), то будет видно, что нас не устраивает лишь одна «картинка» – это когда вершина параболы находится внутри отрезка $[0;1]$ и значение в вершине неотрицательно. Опишем эту ситуацию математически:

$$\begin{cases}a<0,\\ 0<\dfrac{6a+1}{2a}<1,\\ y(t_{\text{верш}})\geq 0 \Leftrightarrow -\dfrac{(6a+1)^2-44a^2+12a}{4a}\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-\dfrac{1}{4}<a<-\dfrac{1}{6},\\ 8a^2-24a-1\leq 0 \Leftrightarrow a\in\left[\dfrac{6-\sqrt{38}}{4};\dfrac{6+\sqrt{38}}{4}\right]\end{cases} \Leftrightarrow \varnothing, \text{ т. к.}$$

$$\frac{6-\sqrt{38}}{4}\vee -\frac{1}{6} \Leftrightarrow 18-3\sqrt{38}\vee -2 \Leftrightarrow 20\vee 3\sqrt{38} \Leftrightarrow 400>342 \Rightarrow \frac{6-\sqrt{38}}{4}>-\frac{1}{6}.$$

Отсюда следует, что, когда вершина находится внутри отрезка, то значение в вершине отрицательно – значит, и на всём отрезке отрицательно. А это значит, что при любом $a<0$ условие задачи выполнено.

Объединяя результаты 1 – 3, получаем, что $a \in \left(-\infty; \dfrac{3}{11}\right)$.

Ответ. $\left(-\infty; \dfrac{3}{11}\right)$.

Второй способ. Для начала заметим, что если неравенство справедливо для всех t, принадлежащих отрезку $[0;1]$, то оно выполнено и при $t = 0$, и при $t = 1$, т. е.

$$\begin{cases} 11a - 3 < 0, \\ a - (6a+1) + 11a - 3 < 0 \Leftrightarrow a < \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow a < \frac{3}{11}.$$

Это необходимое условие для решения задачи.

Теперь перепишем наше неравенство относительно a:

$$a\left(t^2 - 6t + 11\right) - (t+3) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a < (t+3) \cdot \frac{1}{(t-3)^2 + 2}.$$

Функция

$$y_1(t) = (t-3)^2 + 2$$

положительна на всей числовой прямой и на $(-\infty; 3]$ монотонно убывает. Значит, стоящая в правой части неравенства функция

$$y(t) = (t+3) \cdot \frac{1}{(t-3)^2 + 2}$$

монотонно возрастает на рассматриваемом отрезке $[0;1]$ как произведение двух положительных и монотонно возрастающих. Поэтому

$$y(t) \geq y(0) = \frac{3}{11}$$

на всём отрезке $[0;1]$.

Отсюда следует, что условие $a < \dfrac{3}{11}$ является и достаточным для того, чтобы

$$a < \frac{t+3}{t^2 - 6t + 11}$$

было выполнено при всех значениях $t \in [0;1]$.

Ответ. $\left(-\infty; \dfrac{3}{11}\right)$.

Задача 10. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(\log_7(2x+2a) - \log_7(2x-2a)\right)^2 -$$
$$-8a\left(\log_7(2x+2a) - \log_7(2x-2a)\right) +$$
$$+2a^2 + 8a - 4 = 0$$

имеет два различных корня.

Решение. Найдём ОДЗ:

$$\begin{cases} x + a > 0, \\ x - a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geq 0, \\ x > a; \end{cases} \\ \begin{cases} a \leq 0, \\ x > -a. \end{cases} \end{array}\right.$$

Сделаем замену переменных:

$$t = \log_7(2x+2a) - \log_7(2x-2a) \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} t = \log_7 \frac{x+a}{x-a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+a}{x-a} = 7^t \Leftrightarrow x\left(7^t - 1\right) = a\left(7^t + 1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \Leftrightarrow a = 0, \\ \begin{cases} t \neq 0, \\ x = \dfrac{a\left(7^t + 1\right)}{7^t - 1} = a + \dfrac{2a}{7^t - 1}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Отсюда видно, что замена взаимно однозначна. Проверим, что происходит при $a = 0$:

$$\left(\log_7(2x) - \log_7(2x)\right)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \varnothing.$$

Значит, у нас $a \neq 0$. Перепишем уравнение в новых переменных:

$$t^2 - 8at + 2a^2 + 8a - 4 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (t - 4a)^2 = 14a^2 - 8a + 4,$$

где, как видно, всегда

$$14a^2 - 8a + 4 > 0.$$

Какую же задачу мы должны поставить для этого квадратного уравнения? У нас сложное ОДЗ. Из него следует, что

$$1)\ a > 0 \Rightarrow x > a \Leftrightarrow \frac{2a}{7^t - 1} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ t > 0. \end{cases}$$

$$2)\ a < 0 \Rightarrow a + \frac{2a}{7^t - 1} > -a \Leftrightarrow 2a + \frac{2a}{7^t - 1} > 0 \Leftrightarrow \frac{2a7^t}{7^t - 1} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, \\ t < 0. \end{cases}$$

Это значит, что нам придётся решать две задачи.

Задача 10*. Найдите все *положительные* значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(t - 4a)^2 = 14a^2 - 8a + 4$$

имеет два положительных корня.

Задача 10.** Найдите все *отрицательные* значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(t - 4a)^2 = 14a^2 - 8a + 4$$

имеет два отрицательных корня.

Нарисуем эскизы графиков функции

$$y(t) = (t - 4a)^2$$

для $a > 0$ (рис. 10) и для $a < 0$ (рис. 11).

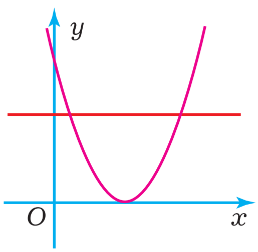


Рис. 10. $a > 0$

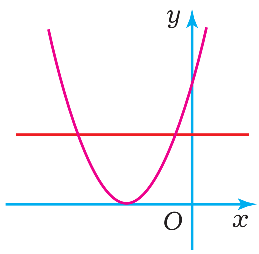


Рис. 11. $a < 0$

Видно, что нужных корней два на любом рисунке, если

$$0 < 14a^2 - 8a + 4 < y(0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 14a^2 - 8a + 4 < 16a^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2 + 4a - 2 > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a \in \left(-\infty; -2 - \sqrt{6}\right) \cup \left(-2 + \sqrt{6}; +\infty\right).$$

Первый промежуток годится для $a < 0$, а второй – для $a > 0$.

Заметим, что эта задача – редкий случай, когда ОДЗ играет такую существенную роль в исследовании.

Ответ.

$$\left(-\infty; -2 - \sqrt{6}\right) \cup \left(-2 + \sqrt{6}; +\infty\right).$$

Продолжение следует.