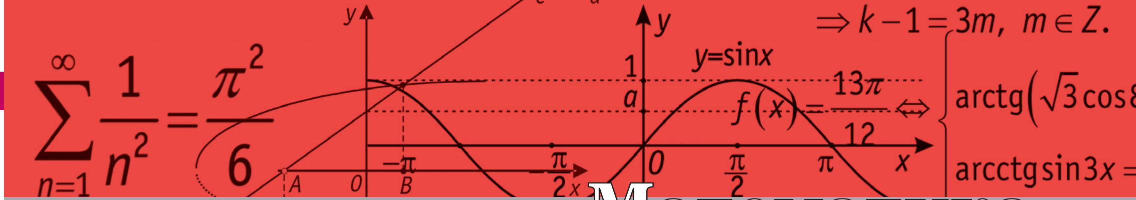


Колесникова Софья Ильинична
Старший преподаватель кафедры высшей математики Московского физико-технического института (МФТИ), специалист Заочной физико-технической школы (ЗФТШ) при МФТИ. Окончила Московский государственный университет (МГУ), имеет большой опыт работы со старшеклассниками, автор пособий «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ», «Решение сложных задач ЕГЭ».

Графики в задачах с параметрами.
Часть 3

В этой части рассматриваются уравнения, содержащие несколько модулей, а иногда ещё логарифмы или радикалы, решить которые невозможно. Для них в заданиях С5 поставлены задачи об отыскании таких значений параметра, при которых у уравнения существует один или три различных корня. Для решения таких задач приходится привлекать не самые простые графики.

1. При решении задач важно уметь строить график функции $y = k|x|$ – угол, боковыми сторонами которого являются лучи $y = \pm kx$, исходящие из начала координат. Важно также понимать, что график функции

$$y = k|x-a| + f(a)$$ –

это график функции $y = k|x|$, перенесённый в точку с координатами $x = a,\ y = f(a)$. В наших задачах a будет параметром, а потому важно, где же расположены такие углы. Так как для угла $x = a \Leftrightarrow a = x$, то координаты вершины связаны соотношением $y = f(a) = f(x)$, т. е. все углы своими вершинами «скользят» по кривой $y = f(x)$!

2. В некоторых задачах нам придётся хорошо понимать, что у графика $y = k|x|$ числа $\pm k$ – это тангенсы углов наклона лучей $y = \pm kx$. Их иногда придётся сравнивать с наклоном касательной к кривой $y = g(x)$ в некоторой точке x_0. При этом надо знать и помнить, что наклон касательной определяется значением производной функции $y = g(x)$ в рассматриваемой точке x_0, где значение $y'(x_0) = g'(x_0)$ – это и есть тангенс угла наклона касательной к оси Ox в точке x_0.

3. Обратите внимание на то, что при решении задач мы подставляем интересующие нас точки не в тот или другой луч «уголка», а в уравнение самого «уголка», потому что иногда работают оба луча (например, задачи 1, 3 и др.), а иногда только один (например, задачи 2, 3 и др.)

1. Задачи, в которых надо найти все значения параметра *a*, при каждом из которых заданное уравнение имеет единственный корень

Задача 1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$13|t-a+1|+3|t+7|=2t+5|t-a+5|+4$

имеет единственный корень.

Решение. *Первый способ.* Прежде всего упростим уравнение – сделаем замену переменных, чтобы под знаком модуля было поменьше параметра:

$$t-a+1=x \Leftrightarrow t=x+a-1.$$

Перепишем уравнение в новых переменных:

$$13|x|+3|x+a+6|=$$
$$=2(x-1)+2a+5|x+4|+4.$$

Ясно, что уравнение алгоритмично не решается. Что делать?

Перенесём в левую часть уравнения все функции, не зависящие от параметра, чтобы попробовать построить эскиз графика этой части, а всё, зависящее от параметра, отправим направо:

$$13|x|-5|x+4|-2(x-1)-4=$$
$$=2a-3|x+a+6|.$$

Прикинем эскиз графика левой части – функции

$$y=13|x|-5|x+4|-2x-2:$$

это ломаная с точками излома $x=0$ и $x=-4$, см. рис. 1.

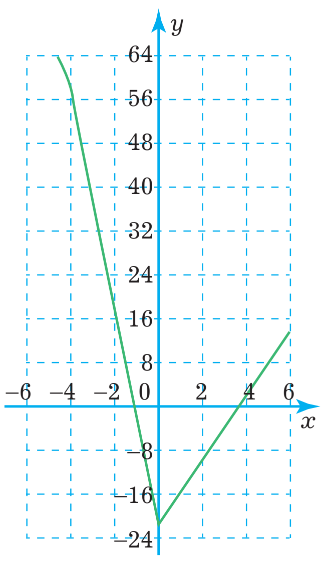


Рис. 1

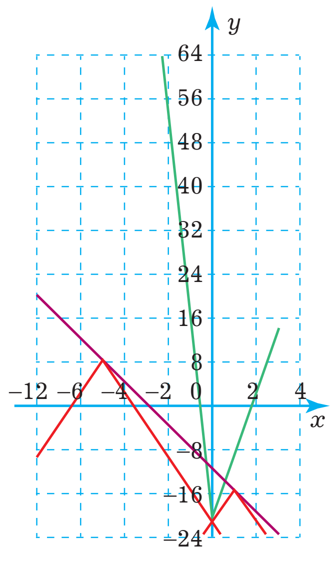


Рис. 2

Теперь займёмся правой частью. Заметим, что $y=2a-3|x+a+6|$ – это «опрокинутый» угол с вершиной в точке

$$x=-a-6 \Leftrightarrow a=-x-6,$$
$$y=2a=-\ 2x-12,$$

а потому вершины «скользят» по прямой $y=-\ 2x-12$ (фиолетовая линия на рис. 2). Угол и ломаная будут иметь единственную точку пересечения (нарисуйте несколько положений таких уголков), если угол пройдёт через точку минимума ломаной – точку $(0;-22)$. Найдём a, подставив точку $(0;-22)$ в уравнение угла:

$$-22 = 2a - 3|a+6| \Leftrightarrow 3|a+6| = 2a + 22 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 11 \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} 3a + 18 = 2a + 22 \Leftrightarrow a = 4, \\ 3a + 18 = -2a - 22 \Leftrightarrow a = -8 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow a = 4, a = -8.$$

Отсюда следует, что уголков будет два, причём один пересекается с ломаной левым «боком», а другой – правым (красные линии на рис. 2).

Ответ. 4; – 8.

Замечание. Этот способ удобен для тех, кто привык строить конкретные графики, а не графики «в принципе», как это сделано в следующем способе.

Второй способ (график «в принципе»). Перенесём в левую часть уравнения все слагаемые, зависящие от x:

$$13|x| - 5|x+4| - 2x + 3|x+a+6| = \\ = 2 + 2a.$$

Теперь рассмотрим функцию

$$y(x) = 13|x| - 5|x+4| - \\ -2x + 3|x+a+6|.$$

Таким способом задачу решают те учащиеся, которые хорошо понимают, как выглядит график этой функции «в принципе», без конкретного раскрытия модулей.

При любом раскрытии модулей будут получаться ломаные с разными наклонами. Заметим, что наибольший коэффициент у нас равен 13. Если $x > 0$, то при любом раскрытии модулей получаются ломаные с положительным наклоном:

$$13 \pm 5 - 2 \pm 3 > 0,$$

т. е. при $x > 0$ функция монотонно возрастает. Если $x \le 0$, то при любом раскрытии модулей получаются ломаные с отрицательным наклоном:

$$-13 \pm 5 - 2 \pm 3 < 0,$$

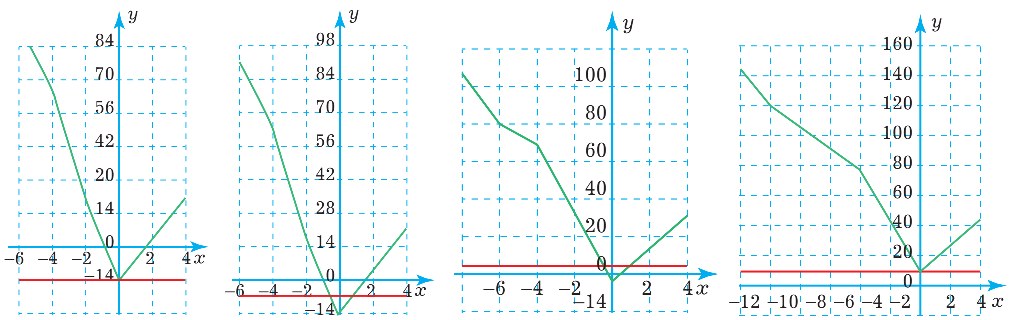
т. е. при $x \le 0$ функция монотонно убывает. Поэтому при $x = 0$ функция $y(x)$ принимает своё минимальное значение, равное $3|a+6| - 20$. Решение будет одно, если

$$y(0) = 2 + 2a \Leftrightarrow 3|a+6| = 22 + 2a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11 + a \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} 3a + 18 = 22 + 2a, \\ 3a + 18 = -22 - 2a \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 4, \\ a = -8. \end{array}\right.$$

Этот способ годится для тех, кто свободно владеет построением графиков ломаных. На рис. 3 *а* – г приведены примеры графиков левых (зелёные ломаные) и правых (красные прямые) частей уравнения $13|x| - 5|x+4| - 2x + 3|x+a+6| = 2 + 2a$ при разных значениях параметра a.

Ответ. 4; – 8.



а *б* *в* *г*

Рис. 3. а: a = – 8 (одно решение); б: a = – 4 (два решения); в: a = 0 (два решения); г: a = 4 (одно решение)

Задача 2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$13|x|-5|x+4|-2(x-1)-4 = \\ = 2a-|x+a+6|.$$

имеет единственный корень.

Решение. *Первый способ.* Уравнение отличается от уравнения предыдущей задачи только коэффициентом при $|x+a+6|$. Ход решения дословно совпадает с решением предыдущей задачи.

Переписываем уравнение:

$$13|x|-5|x+4|-2x-2=2a-|x+a+6|.$$

Выясняем, что вершины «уголков» расположены на прямой $y=-2x-12$. Рисуем ломаную $y(x)=13|x|-5|x+4|-2x-2$ (зелёная линия на рис. 4) и прямую $y=-2x-12$ (фиолетовая линия на рис. 4). Затем рисуем «пробный» угол (синий). Видно, что решение может быть единственным, если «угол» $y=2a-|x+a+6|$ проходит через вершину ломаной – точку $(0;-22)$:

$$-22=2a-|a+6| \Leftrightarrow |a+6|=2a+22 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+11 \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} a+6=2a+22, \\ a+6=-2a-22 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+11 \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} a=-16 \Rightarrow \varnothing, \\ a=-\dfrac{28}{3}=-9\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a=-9\frac{1}{3} \Rightarrow y=-\frac{56}{3}-\left|x-\frac{10}{3}\right|.$$

Как видите, в отличие от предыдущей задачи такой угол только один. Это объясняется тем, что «раствор» угла стал другим (см. рис. 4).

Ответ. $-9\frac{1}{3}$.

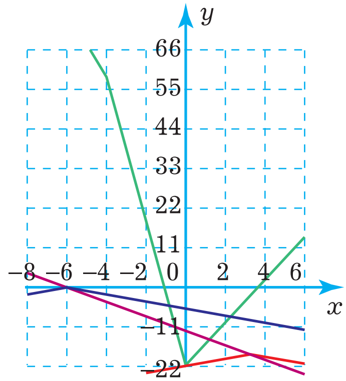


Рис. 4

Замечание. Желающие могут решать вторым способом, приведённым в предыдущей задаче.

Задача 3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a^2+11|t+2|+3\sqrt{t^2+4t+13} = \\ = 5a+2|t-2a+2|$$

имеет ровно один корень.

Решение. Часто задачи «рождаются» из некоторой базовой, а затем тиражируются с помощью замены переменных – сдвигов, растяжений. Так и в нашем случае.

Прежде всего упростим уравнение – сделаем замену переменных: $t+2=x \Leftrightarrow t=x-2$. Перепишем уравнение в новых переменных:

$$a^2+11|x|+3\sqrt{x^2+9}=5a+2|x-2a|.$$

Ясно, что опять уравнение алгоритмично не решается. Что делать?

Первый способ. Перенесём в левую часть уравнения все функции, не зависящие от параметра, чтобы попробовать построить эскиз графика этой части, а всё, зависящее от параметра, отправим направо:

$$3\sqrt{x^2+9}+11|x|=5a-a^2+2|x-2a|.$$

Прикинем эскиз графика левой части, т. е. функции

$$y=3\sqrt{x^2+9}+11|x|.$$

Функция

$$y = 3\sqrt{x^2+9} + 11|x|$$

чётная, при $x \geq 0$ монотонно возрастающая (зелёная линия на рис. 5).

Теперь изучим структуру графика правой части – функции $y = 5a - a^2 + 2|x - 2a|$. Заметим, что вершина «угла» находится в точке с абсциссой $x = 2a \Leftrightarrow a = \dfrac{x}{2}$, а все вершины лежат на параболе $y = 5a - a^2 = \dfrac{5x}{2} - \dfrac{x^2}{4}$, скользят по ней. Проведём параболу на чертеже (синяя линия на рис. 5).

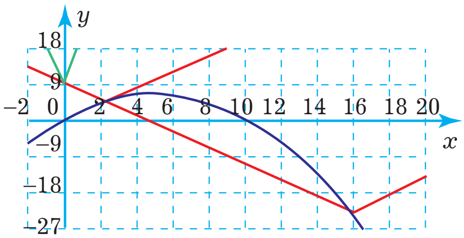


Рис. 5

Далее нам надо нарисовать «уголки»

$$y = 5a - a^2 + 2|x - 2a|$$

с вершинами на этой параболе, пересекающие наш график в одной точке. Это будут уголки

$$y = 5a - a^2 + 2|x - 2a|,$$

проходящие через точку $(0;9)$ (красные):

$$9 = 5a - a^2 + 2|2a| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4|a| = 9 - 5a + a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geq 0, \\ 9 - 5a + a^2 = 4a; \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0, \\ 9 - 5a + a^2 = -4a \Leftrightarrow \varnothing \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{9 \pm 3\sqrt{5}}{2}.$$

Второй способ. Перенесём в левую часть уравнения все слагаемые, зависящие от x:

$$a^2 + 11|x| + 3\sqrt{x^2+9} = 5a + 2|x - 2a| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 11|x| + 3\sqrt{x^2+9} - 2|x - 2a| = 5a - a^2.$$

Проанализировав (поэтому этот способ подходит для тех, кто быстро умеет это делать) функцию

$$y(x) = 11|x| + 3\sqrt{x^2+9} - 2|x - 2a|,$$

можно убедиться в том, что при любом значении параметра a она принимает минимальное значение в точке $x = 0$. Поэтому единственное решение будет в случае, если

$$y(0) = 5a - a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9 - 2|2a| = 5a - a^2 \Leftrightarrow a = \frac{9 \pm 3\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ. $\dfrac{9 - 3\sqrt{5}}{2}$; $\dfrac{9 + 3\sqrt{5}}{2}$.

Замечание. Выбирайте тот способ, который кажется вам более убедительным и понятным.

Задача 4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$17|x - a| + \left|a^2 - 7x + 12\right| + \left|a^2 + 2x - 15\right| =$$

$$= \left|2a^2 - 6a + x - 3\right| + \big|4|x| - |x + 3a|\big|$$

имеет хотя бы один корень.

Решение. Это пример задачи, в которой, кроме рассуждений о том, что получается «в принципе», ничего сделать нельзя – слишком много модулей!

Рассмотрим функцию

$$y(x) = 17|x - a| + \left|-7x + a^2 + 12\right| +$$

$$+ \left|2x + a^2 - 15\right| - \left|x + 2a^2 - 6a - 3\right| -$$

$$- \big|4|x| - |x + 3a|\big|.$$

Вот стандартное рассуждение, встречающееся у составителей ЕГЭ примерно с 2005 г.: «Если $x \geq a$, то при любом раскрытии модулей получаются ломаные $y = kx + b$ с положительным значением

$$k = 17 \pm 7 \pm 2 \pm 1 \pm 5 \geq 3.$$

Значит, при $x \geq a$ функция монотонно возрастает. Если $x \leq a$, то при любом раскрытии модулей получаются ломаные $y = kx + b$ с отрицательным значением

$$k = -17 \pm 7 \pm 2 \pm 1 \pm 5 \leq -2.$$

Значит, при $x \leq a$ функция монотонно убывает. Отсюда следует, что функция принимает минимальное значение в точке $x = a$. А тогда уравнение имеет хотя бы одно решение, если $y(a) \leq 0$».

Решаем неравенство

$$y(a) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y(a) = \left|a^2 - 7a + 12\right| + \left|a^2 + 2a - 15\right| -$$

$$-\left|2a^2 - 5a - 3\right| \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |a-3|\left(|a-4| + |a+5| - |2a+1|\right) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3, \\ |a-4| + |a+5| - |2a+1| \leq 0. \end{array}\right.$$

Решим второе неравенство отдельно, рассмотрев четыре промежутка:

$$\begin{cases} a \geq 4, \\ a - 4 + a + 5 - 2a - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \geq 4;$$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2} \leq a < 4, \\ -a + 4 + a + 5 - 2a - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing;$$

$$\begin{cases} -5 \leq a < -\dfrac{1}{2}, \\ -a + 4 + a + 5 + 2a + 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -5;$$

$$\begin{cases} a < -5, \\ -a + 4 - a - 5 + 2a + 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a < -5.$$

Объединяя все полученные результаты, получаем ответ.

Ответ. $(-\infty; -5] \cup \{3\} \cup [4; +\infty)$.

2. Задачи, в которых надо найти все значения параметра *a*, при каждом из которых заданное уравнение имеет ровно 3 корня

Задача 5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2 + 2x - 3\right| = |x - a| + 2a + 3$$

имеет ровно 3 корня.

Решение. Приведём решение из пособия С.А. Шестакова «Задачи С5» под редакцией А.Л. Семёнова и И.В. Ященко, 2014 г.

Построим график функции

$$y = \left|x^2 + 2x - 3\right| -$$

зелёная линия на рис. 6. Теперь обсудим эскиз графика функции

$$y(x) = |x - a| + 2a + 3.$$

Это «угол» $y = |x|$, вершина которого перенесена в точку с координатами $x = a$, $y = 2a + 3$. Заметим, что координаты вершины связаны между собой соотношением

$$x = a \Leftrightarrow a = x \Rightarrow y = 2a + 3 = 2x + 3,$$

т. е. вершина «скользит» (синий пунктир, красный сплошной на рис. 6) по прямой $y = 2x + 3$ (фиолетовая линия на рис. 6).

Автор пособия утверждает, исходя из картинки на рис. 6, что уравнение имеет ровно три различных корня только в двух случаях.

1. Левая сторона угла

$$y(x) = |x - a| + 2a + 3,$$

т. е. прямая

$$y(x) = -x + a + 2a + 3 = -x + 3a + 3$$

проходит через точку $(-3; 0)$:

$$y(-3) = 0 \Leftrightarrow 3 + 3a + 3 = 0 \Leftrightarrow a = -2$$

(красная линия на рис. 6).

2. Сторона угла касается параболы

$$y(x) = -x^2 - 2x + 3$$

левее вершины угла. Касание означает, что квадратное уравнение

$$-x^2 - 2x + 3 = -x + a + 2a + 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + 3a = 0$$

имеет единственное решение, т. е. его дискриминант равен нулю:

$$D = 1 - 12a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{12}$$

(второй красный угол на рис. 7).

Ответ. -2; $\frac{1}{12}$.

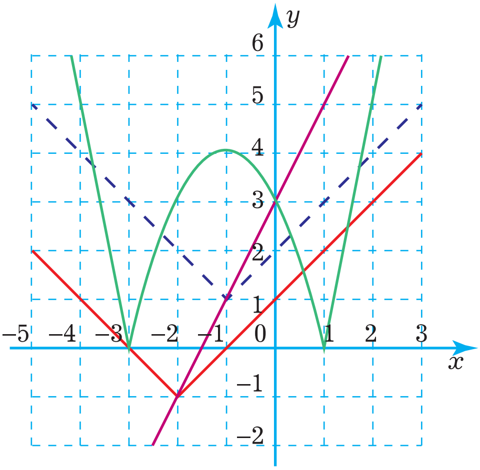


Рис. 6

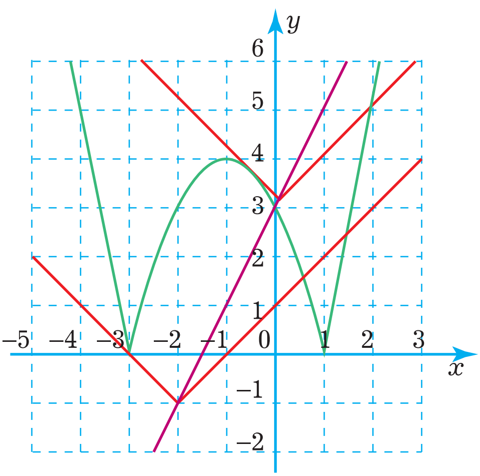


Рис. 7

Задача 6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2 + 2x - 3\right| = |x - a| + 2a + 5{,}04$$

имеет ровно 3 корня.

Решение. Задача отличается от предыдущей только одним слагаемым – вместо 3 стоит 5,04. Решаем так же, как и предыдущую задачу.

Строим график функции

$$y = \left|x^2 + 2x - 3\right|$$

(зелёная линия на рис. 8). Затем выясняем, где расположены вершины углов:

$$x = a, \quad y = 2a + 5{,}04 \Rightarrow y = 2x + 5{,}04.$$

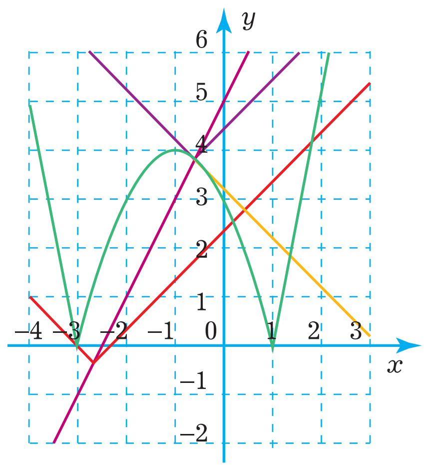


Рис. 8

Строим прямую $y = 2x + 5{,}04$ (фиолетовая линия на рис. 8). Рисунок очень похож на рис. 6, особенно если он сделан «от руки». Наш рисунок сделан на компьютере.

Строим уголок, проходящий через точку $(-3;0)$ (красный угол на рис. 8). Находим a:

$$0 = 3 + a + 2a + 5{,}04 \Leftrightarrow a = -2{,}68.$$

Неправильное решение. Теперь займёмся вторым уголком. Найдём его так же, как в пособии, – прямая касается параболы, если она с кривой имеет *единственную* общую точку:

$$-x^2 - 2x + 3 = -x + a + 2a + 5{,}04 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + 3a + 2{,}04 = 0 \Rightarrow$$

$$D = 1 - 12a - 8{,}16 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{179}{300}.$$

Вроде бы задача решена (синий угол на рис. 8), чертёж сделан на компьютере. Касательная (уравнение касательной примет вид

$$y=-x+3a+5{,}04=-x+3{,}25\,)\;-$$

желтая линия, переходящая в синюю). Но не тут-то было! Ответ *неправильный*! В чём дело?

Исследование. В предыдущей задаче никто не проверял, действительно ли угол

$$y(x)=\left|x-\frac{1}{12}\right|+\frac{1}{6}+3,$$

у которого прямая, лучом которой является левая сторона угла, касается параболы, на самом деле касается самой параболы. Проверим это.

Найдём точку на параболе, в которой производная равна -1 (наклон левой стороны угла):

$$y=-x^2-2x+3\Rightarrow y'=-2x-2;$$

$$y'=-1\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}+1+3=3{,}75.$$

Подставим эту точку в уравнение угла при найденном значении параметра $a=\dfrac{1}{12}$:

$$3{,}75=\left|-\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\right|+\frac{1}{6}+3\Leftrightarrow 3{,}75\equiv 3{,}75\;-$$

всё в порядке.

Теперь сделаем проверку в нашей задаче:

$$y=-x^2-2x+3\Rightarrow y'=-2x-2;$$

$$y'=-1\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2};$$

$$y\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}+1+3=3{,}75.$$

Подставим точку $\left(-\dfrac{1}{2};3{,}75\right)$ в уравнение угла при найденном значении параметра $a=-\dfrac{179}{300}$:

$$3{,}75\neq\left|-\frac{1}{2}+\frac{179}{300}\right|-\frac{179}{150}+5{,}04.$$

Почему? Угол

$$y=\left|x+\frac{179}{300}\right|-\frac{179}{150}+5{,}04$$

(синий угол на рис. 8) – это угол, левая сторона которого слилась с жёлтой касательной.

Заметим, что рисунок сделан на компьютере. А теперь вычленим окрестность вершины угла – рис. 9. Видно, что найденный фиолетовый угол никакого отношения к нашей зелёной кривой не имеет. В чём дело? Дело в том, что в нашей задаче касание прямой и параболы происходит ниже точки пересечения параболы и прямой, «несущей» вершины углов, и искомый угол может вообще не касаться параболы.

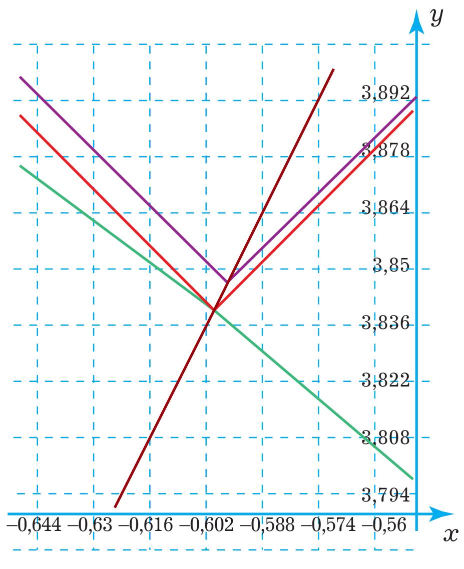


Рис. 9

Правильное решение. Всё дело в том, что мы не проверили, где направление касательной совпадает с наклоном угла.

Итак, в данном случае

$$y'=-1\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2},\quad y=3{,}75.$$

Теперь найдём точку пересечения прямой $y=2x+5{,}04$ и параболы:

$$-x^2-2x+3=2x+5,04 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2+4x+2,04=0 \Leftrightarrow$$
$$x=-2\pm1,4 \Rightarrow x=-0,6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y=-1,2+5,04=3,84.$$

Отсюда видно, что точка касания расположена ниже прямой $y=2x+5,04$, а потому угол, левая сторона которого является касательной к параболе, вообще не имеет общих точек с кривой – фиолетовый угол на рис. 9.

Теперь найдём наклон касательной в точке пересечения прямой и кривой:

$$y'(-0,6)=1,2-2=-0,8.$$

Отсюда следует, что угол с наклонами ±1 свободно «сядет», ничего не касаясь, на точку пересечения $(-0,6;3,84)$, см. рис. 9 (красный угол). При этом очевидно, что $a=-0,6$, уравнение искомого угла

$$y=|x+0,6|+3,84.$$

А на рис. 8 красный и фиолетовый углы просто «совпадают» в пределах точности построения эскиза.

Ответ. $-2,68$; $-0,6$.

Вывод. Для решения задачи недостаточно эскиза графиков – необходимо сравнить расположение точки пересечения прямой, несущей вершины углов, и точки кривой, в которой касательная параллельна интересующей нас стороне угла.

Примечание. Может оказаться, что угол, вершина которого находится в точке пересечения прямой и параболы, касается самой параболы (см. задачу 8).

Задача 7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2+4x-5\right|-3a=|x+a|-1$$

имеет ровно 3 корня.

Решение. Перепишем уравнение:

$$\left|x^2+4x-5\right|-3a=|x+a|-1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left|x^2+4x-5\right|=|x+a|+3a-1.$$

Так как при подстановке $x=-a$ в правую часть уравнения получаем $y=3a-1$, делаем вывод, что вершины углов расположены на прямой $y=-3x-1$. Строим графики функций $y=\left|x^2+4x-5\right|$ и $y=-3x-1$, см. рис. 10.

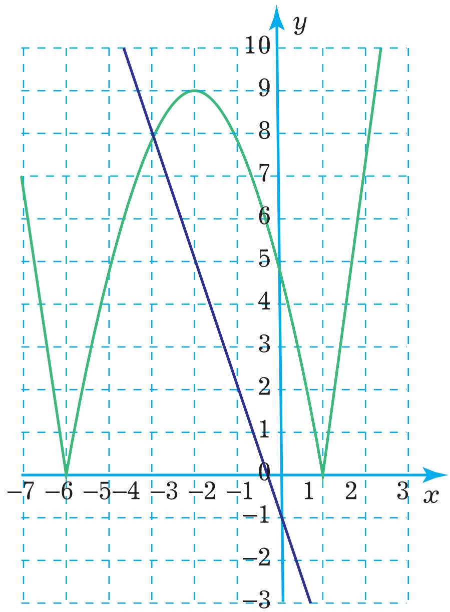


Рис. 10

Видно, что если угол коснётся параболы, то своим правым «боком» $y=x+4a-1$. Находим точку, в которой наклон касательной равен 1:

$$y'(x)=1 \Leftrightarrow -2x-4=1 \Leftrightarrow x=-2,5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y=-6,25+10+5=8,75.$$

Теперь сразу находим угол (а не прямую, которая касается параболы, но может не быть решением)

$$y=|x+a|+3a-1,$$

который проходит через точку $(-2,5;\ 8,75)$, см. рис. 11:

$$8,75=|-2,5+a|+3a-1 \Leftrightarrow |-2,5+a|=9,75-3a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \le 3{,}25, \\ \left[\begin{aligned} &-2{,}5 + a = 9{,}75 - 3a \Leftrightarrow a = \frac{49}{16}, \\ &-2{,}5 + a = -9{,}75 + 3a \Leftrightarrow 2a = 7{,}25 \Rightarrow \varnothing \end{aligned} \right. \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{49}{16}.$$

Далее находим угол

$$y = |x + a| + 3a - 1,$$

который проходит через точку $(1;0)$. В этом случае очевидно, что через точку проходит правая сторона угла:

$$0 = 1 + 4a - 1 \Leftrightarrow a = 0,$$

см. рис. 11.

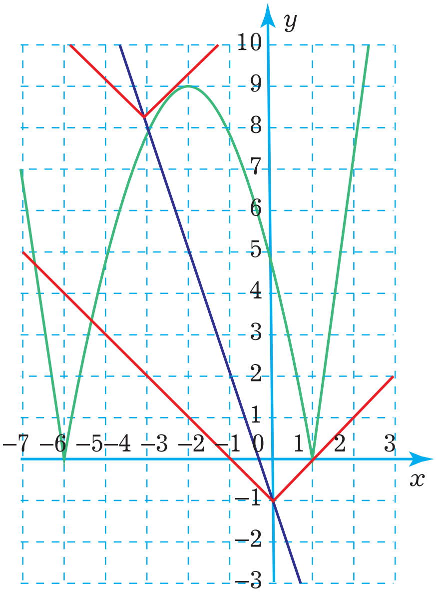


Рис. 11

Ответ. 0; $\frac{49}{16}$.

Задача 8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2 + 4x - 5\right| = |x - a| - 5a + 1{,}25$$

имеет ровно 3 корня.

Решение. Координаты вершин углов $x = a$, $y = -5a + 1{,}25$, поэтому углы «скользят» по прямой $y = -5x + 1{,}25$. Строим графики функций

$$y = \left|x^2 + 4x - 5\right| \text{ и } y = -5x + 1{,}25,$$

см. рис. 12. Находим точку, в которой наклон касательной равен -1:

$$y' = -2x - 4; \ y' = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x - 4 = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -1{,}5 \Rightarrow y = 8{,}75.$$

Теперь сразу находим *угол* (а не прямую, которая касается параболы, но может не быть решением)

$$y = |x - a| - 5a + 1{,}25,$$

который проходит через точку $(-1{,}5;\ 8{,}75)$:

$$8{,}75 = |-1{,}5 - a| - 5a + 1{,}25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |1{,}5 + a| = 5(a + 1{,}5) \Leftrightarrow a = -1{,}5.$$

Но

$x = a = -1{,}5$, $y = -5x + 1{,}25 = 8{,}75$ – это координаты вершины искомого угла, т. е. точки, в которой наклон касательной совпадает с наклоном левой стороны угла. Это значит, что касание происходит в точке пересечения параболы и прямой $y = -5x + 1{,}25$ (см. рис. 12).

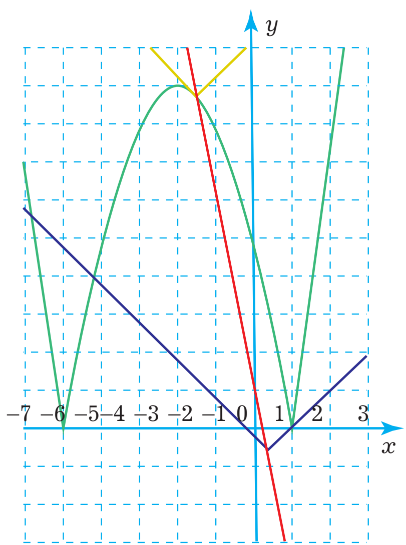


Рис. 12

Теперь находим угол

$$y = |x - a| - 5a + 1{,}25,$$

который проходит через точку $(1;0)$. В этом случае очевидно, что через точку проходит правая сторона угла (см. рис. 12):

$$0 = 1 - a - 5a + 1{,}25 \Leftrightarrow a = \frac{3}{8}.$$

Ответ. $-1{,}5;\ \frac{3}{8}$.

Задача 9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2 + 2x - 3\right| = 3|x - a| + 2a + 3$$

имеет ровно 3 корня.

Решение. Уголки с вершинами $x = a$, $y = 2a + 3$ скользят по прямой $y = 2x + 3$. Построим графики функций

$$y = \left|x^2 + 2x - 3\right| \text{ и } y = 2x + 3$$

(см. рис. 13). Угол может касаться параболы своей левой стороной. Найдём точку, в которой производная равна -3:

$$y' = -2x - 2 = -3 \Leftrightarrow x = 0{,}5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = -0{,}25 - 1 + 3 = 1{,}75.$$

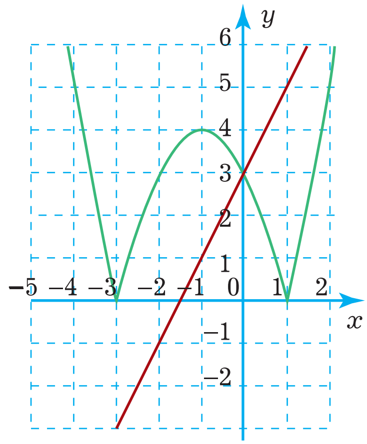


Рис. 13

Теперь найдём угол, проходящий через точку $(0{,}5;\ 1{,}75)$:

$$3|0{,}5 - a| + 2a + 3 = 1{,}75 \Leftrightarrow 3|0{,}5 - a| = -2a - 1{,}25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0{,}5 - a \geq 0, \\ 1{,}5 - 3a = -2a - 1{,}25 \end{cases} \Leftrightarrow a = 2{,}75 \Rightarrow \varnothing, \\ \begin{cases} 0{,}5 - a \leq 0, \\ -1{,}5 + 3a = -2a - 1{,}25 \end{cases} \Leftrightarrow a = 0{,}05 \Rightarrow \varnothing \end{array}\right. \Leftrightarrow \varnothing.$$

Таким образом, случай касания угла и параболы невозможен. Найдём точку пересечения прямой и параболы:

$$-x^2 - 2x + 3 = 2x + 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 3, \\ x = -4. \end{array}\right.$$

Отсюда следует, что точка $(0{,}5;\ 1{,}75)$ находится ниже точки $(0;3)$, а потому угол с вершиной в точке $(0;3)$ будет иметь 3 точки пересечения с графиком функции $y = \left|x^2 + 2x - 3\right|$. При этом очевидно, что $a = 0$ (см. рис. 14).

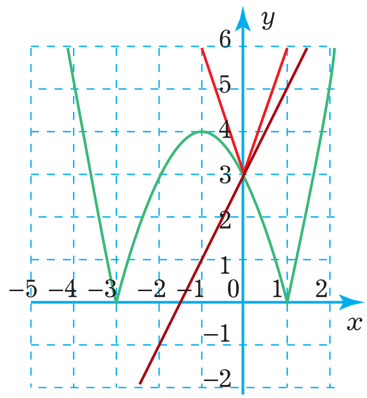


Рис. 14

Теперь найдём угол, который проходит через точку $(-3;\ 0)$:

$$0 = 3\left|-3 - a\right| + 2a + 3 \Leftrightarrow 3\left|3 + a\right| = -2a - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3 + a \geq 0, \\ 9 + 3a = -2a - 3 \end{cases} \Leftrightarrow 5a = -12 \Leftrightarrow a = -2,4, \\ \begin{cases} 3 + a \leq 0, \\ -9 - 3a = -2a - 3 \end{cases} \Leftrightarrow a = -6. \end{array}\right.$$

Значению $a = -6$ отвечает угол, проходящий через точку $(-3;\ 0)$ своей правой стороной, что не даёт решения задачи (см. рис. 15). Нам подходит $a = -2,4$ (рис. 16).

Ответ. $-2,4;\quad 0.$

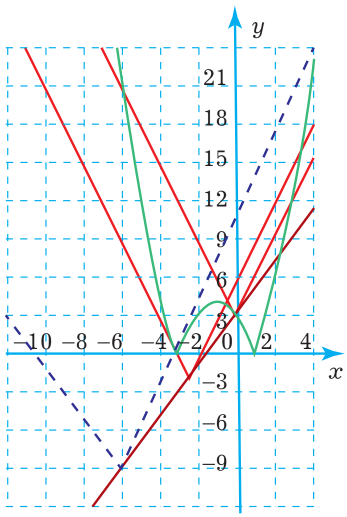


Рис. 15

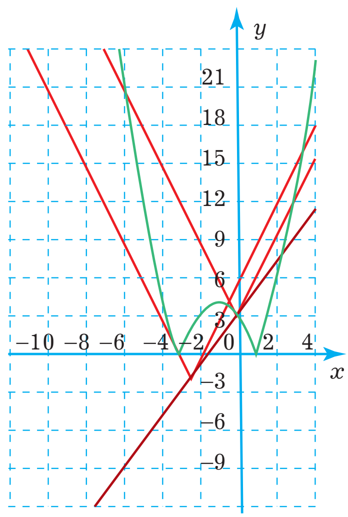


Рис. 16

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a^2 + 13|x| + 9\log_3\left(4x^2 + 3\right) = $$
$$= 3a + 3|4x - 3a|$$

имеет хотя бы один корень.

Ответ. $\{-3\} \cup \left[6 - 3\sqrt{3}; 6 + 3\sqrt{3}\right].$

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a^2 + 7|t + 1| + 5\sqrt{t^2 + 2x + 5} = $$
$$= 2a + 3|t - 4a + 1|$$

имеет хотя бы один корень.

Ответ.

$$\left[7 - \sqrt{39};\ 7 + \sqrt{39}\right] \cup$$
$$\cup \left[-5 - \sqrt{15};\ -5 + \sqrt{15}\right].$$

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$12\left|x^2 - 4\right| = 2a + |a - 12x + 12| + 36$$

имеет ровно 3 корня.

Ответ. $-24;\ 1.$

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2 + 2x - 3\right| = $$
$$= |x - a| + 2a + 4,44$$

имеет ровно 3 корня.

Ответ. $-2,48;\quad -\dfrac{119}{300}.$