Бабинцева Елена Николаевна
Учитель физики МОУ «Гимназия г. Троицка» Московской области.

Графический вывод формул для производной и первообразной обратных функций

В статье рассказывается о возможности наглядного доказательства некоторых сложных математических соотношений с использованием геометрического смысла производной и определённого интеграла.

В частности, используется свойство симметрии графиков прямой и обратной функций для графического вывода выражений производных и первообразных обратных функций, доказывается неравенство Юнга.

1. Несколько слов об обратной функции

Взгляните на графики знакомых прямых и обратных функций (см. рис. 1).

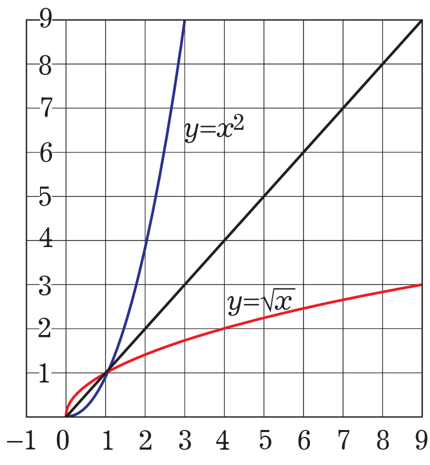


Рис. 1 *а*. $y = x^2$, $x \geq 0$ и $y = \sqrt{x}$

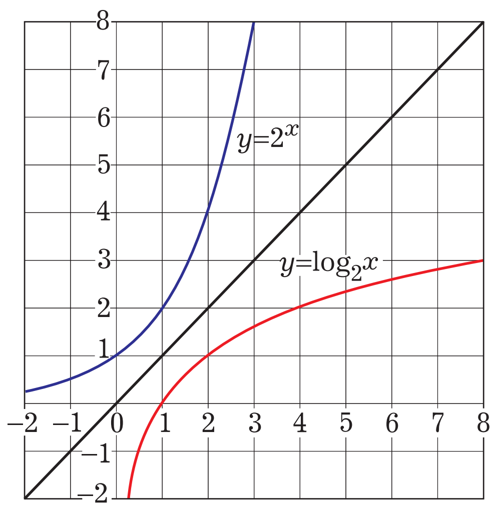


Рис. 1 *б*. $y = 2^x$ и $y = \log_2 x$

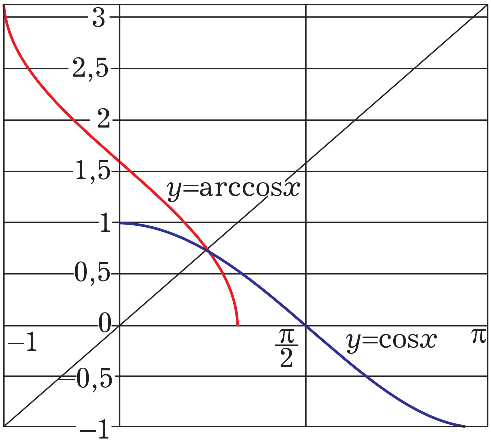


Рис. 1 *в*. $y=\cos x$, $x\in[0;\,\pi]$ и $y=$ $=\arccos x$

Не зря на рисунках отмечена биссектриса I и III координатных углов. Можно заметить, что графики прямых и обратных функций симметричны относительно этой биссектрисы. И это не мудрено, ведь любой точке на графике прямой функции с координатами $(x;\ y)$ всегда соответствует точка на графике обратной функции с координатами $(y;\ x)$. Такие пары точек симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов. Этот почти очевидный факт легко доказать. Возьмём любую пару описанных выше точек A и B на графиках некоторых прямой и обратной функций (см. рис. 2). Координаты середины отрезка определяются полусуммой соответствующих координат начала и конца отрезка. Точка M – середина отрезка AB – будет иметь координаты $\left(\dfrac{x+y}{2};\ \dfrac{x+y}{2}\right)$. Итак, точка M лежит на указанной биссектрисе. Для того чтобы доказать симметричность точек A и B относительно биссектрисы, осталось показать, что отрезок AB перпендикулярен ей. Треугольник AOB равнобедренный, т. к. $OA=\sqrt{x^2+y^2}=OB$, а значит, медиана OM является также и высотой. Мы доказали, что графики прямой и обратной функций симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов. Теперь применим это.

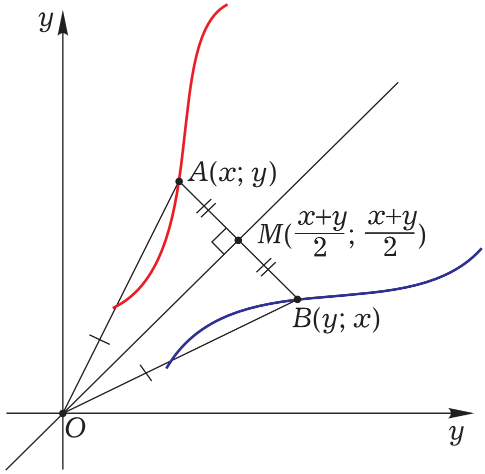


Рис. 2

2. Геометрический смысл производной прямой и обратной функций

Геометрический смысл производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 состоит в том, что она равна тангенсу угла между касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси Ox.

Построим касательные к графикам прямой и обратной функций в симметричных точках $A\big(f(x_0);\ x_0\big)$ и $B\big(x_0;\ f(x_0)\big)$ (см. рис. 3). Пусть угол между касательной к графику прямой функции и положительным направлением оси Ox $\angle BKO=\alpha$. Из соображений симметрии и $\angle ALO=\alpha$. Из прямоугольного треугольника OIL находим $\angle OIL=90^\circ-\alpha$. Вертикальный ему угол является углом между касательной к графику обратной функции и положительным направлением оси Ox $\angle AIN = 90^\circ - \alpha$.

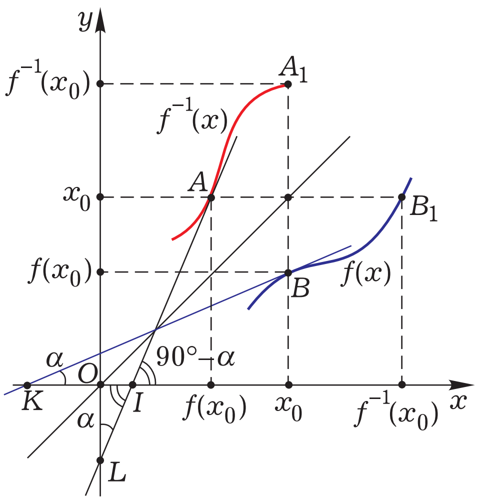


Рис. 3

Таким образом, если $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, то

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) =$$

$$= \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Так как $x_0 = f^{-1}(y_0)$, то

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) =$$

$$= \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Формула справедлива для любой точки x_0 из области определения – значит, и для любой точки y_0 из области определения. Для удобства поменяем в формуле обозначения и получим *знакомую* формулу расчёта производной обратной функции

$$\left(f^{-1}\right)'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}.$$

Приведём примеры применения полученной формулы для обратных функций, графики которых мы нарисовали в начале:

$f(x)$	$f^{-1}(x)$	$f'(x)$	$f'(f^{-1}(x))$	$\left(f^{-1}\right)'(x)$
$x^2,\ x>0$	$\sqrt{x}$	$2x$	$2\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
a^x	$\log_a x$	$a^x \ln a$	$x \ln a$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\cos x,\ x \in (0;\pi)$	$\arccos x$	$-\sin x$	$-\sqrt{1-x^2}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3. Геометрический смысл определённого интеграла от функции, обратной к неотрицательной непрерывной функции. Первообразные обратных функций

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то определённый интеграл с переменным верхним пределом $\int\limits_a^x f(\xi)d\xi = F(x)$ является первообразной функции $y = f(x)$.

Если функция $y = f(x)$ неотрицательна на отрезке $[a; b]$, то геометрический смысл определённого интеграла заключается в том, что он численно равен площади фигуры, ограниченной функцией $y = f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x = a$, $x = b$.

Пусть функция $y = f(x)$ и обратная непрерывны и неотрицательны (обратная функция существует, если, например, производная $f'(x)$ сохраняет знак). Рассмотрим первообразную $\Psi(x)$ обратной функции как определённый интеграл от обратной функции на отрезке $[a;\ x]$. Он равен площади под графиком функции $f^{-1}(x)$. Эта площадь выделена розовым цветом (см. рис. 4). Площадь складывается из площадей прямоугольника $AFHE$ и криволинейного треугольника ABE:

$$\Psi(x) = \int_a^x f^{-1}(\xi)d\xi = S_{AFHE} + S_{ABE}.$$

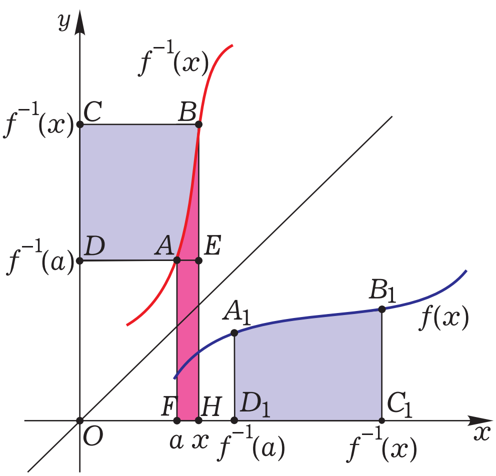


Рис. 4

Если первая площадь может быть легко вычислена как $S_{AFHE} = f^{-1}(a)\cdot(x-a)$, то вторую площадь придётся представить в виде *разности площадей прямоугольника* $BCDE$ и криволинейной трапеции $ABCD$: $S_{ABE} = S_{BCDE} - S_{ABCD}$. Заметим, что площадь криволинейной трапеции $ABCD$ равна площади симметричной ей относительно биссектрисы криволинейной трапеции $A_1B_1C_1D_1$ (обе фигуры выделены голубым цветом). Площадь $A_1B_1C_1D_1$, в свою очередь, не что иное, как определённый интеграл от прямой функции. Получается, что

$$S_{ABE} = S_{BCDE} - S_{ABCD} =$$
$$= x\cdot\left(f^{-1}(x) - f^{-1}(a)\right) - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(x)} f(\xi)d\xi,$$

а интеграл от обратной функции запишется как

$$\int_a^x f^{-1}(\xi)d\xi = f^{-1}(a)\cdot(x-a) +$$
$$+ x\cdot\left(f^{-1}(x) - f^{-1}(a)\right) - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(x)} f(\xi)d\xi.$$

Раскроем скобки и упростим выражение:

$$\Psi(x) = \int_a^x f^{-1}(\xi)d\xi =$$
$$= x\cdot f^{-1}(x) - a\cdot f^{-1}(a) - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(x)} f(\xi)d\xi =$$
$$= x\cdot f^{-1}(x) - a\cdot f^{-1}(a) - F\left(f^{-1}(x)\right) +$$
$$+ F\left(f^{-1}(a)\right) = x\cdot f^{-1}(x) - F\left(f^{-1}(x)\right) -$$
$$-\left(a\cdot f^{-1}(a) - F\left(f^{-1}(a)\right)\right) =$$
$$= x\cdot f^{-1}(x) - F\left(f^{-1}(x)\right) + \text{const},$$

где $F(\xi)$ – первообразная функции $f(\xi)$. (Формула получается и при интегрировании по частям:

$$\int f^{-1}(x)dx = xf^{-1}(x) - \int x\cdot\left(f^{-1}(x)\right)' dx$$

$f(\xi)$. Сделаем в интеграле замену переменых:

$$t = f^{-1}(x) \Rightarrow dt = \left(f^{-1}(x)\right)' dx,$$

$f(t)=f\left(f^{-1}(x)\right)=x$, тогда

$$\int x\cdot\left(f^{-1}(x)\right)'dx=\int f(t)dt=F(t)+C=$$
$$=F\left(f^{-1}(x)\right)+C,$$

и $\Psi(x)=x\cdot f^{-1}(x)-F(f^{-1}(x))$. При этом неотрицательность не требуется (прим. ред.)

Итак, первообразную обратной функции можно рассчитать по формуле

$$\Psi(x)=x\cdot f^{-1}(x)-F(f^{-1}(x)).$$

Попробуем применить формулу к нашим «подопытным» обратным функциям.

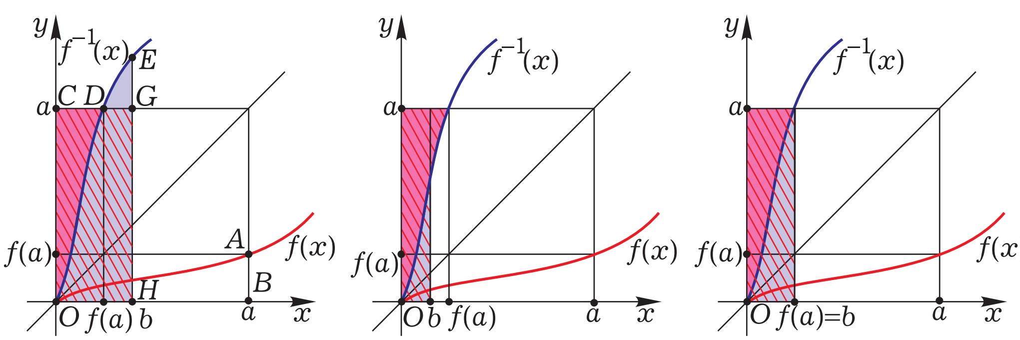
$f(x)$	$f^{-1}(x)$	$F(x)$	$F(f^{-1}(x))$	$\Psi(x)$
$x^2,\ x\geq 0$	$\sqrt{x}$	$\frac{x^3}{3}+C$	$\frac{x\sqrt{x}}{3}+C$	$\frac{2x\sqrt{x}}{3}+C$
a^x	$\log_a x$	$\frac{a^x}{\ln a}+C$	$\frac{x}{\ln a}+C$	$x\log_a x-\frac{x}{\ln a}+C$
$\cos x$, $x\in[0;\ \pi]$	$\arccos x$	$\sin x+C$	$\sqrt{1-x^2}+C$	$x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$

4. Графическое доказательство неравенства Юнга

Рассмотрим непрерывную монотонно возрастающую функцию $f(x)$, проходящую через начало координат. Тогда функция, обратная ей, также будет проходить через начало координат (см. рис. 5). Сравним значения выражений

$$\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}(x)dx$$

и ab при $a>0$ и $b>0,\ a\geq b$. Рассмотрим случаи $b>f(a)$, $b<f(a)$ и $b=f(a)$.



а *б* *в*

Рис. 5

В первом случае (см. рис. 5 *а*) сумма интегралов – это сумма площадей криволинейных трапеций OAB и OEH. Однако в силу симметрии обратных функций площадь OAB равна площади OCD. Поэтому искомая сумма интегралов может быть приравнена к площади фигуры $OCDEH$ (на рисунке закрашена). Произведение же ab равно площади прямоугольника $OCGH$ (на рисунке заштрихован). Из рисунка видно, что значение суммы интегралов превышает значение произведения ab на величину площади криволинейного треугольника DEG.

Аналогично (рис. 5 *б*) можно показать, что и в случае $b < f(a)$ сумма интегралов больше произведения ab. И только при $b = f(a)$ (рис. 5 *в*) сумма интегралов будет равна ab. Таким образом, для любой непрерывной функции f, проходящей через начало координат, и для любых $a > 0$ и $b > 0$ справедливо *неравенство Юнга*:

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx \geq ab.$$

С помощью этого неравенства можно получить много других интересных результатов, подставляя вместо f различные функции, например, степенную функцию $f = x^n$, $n > 0$, $x \geq 0$. Её график пересекает начало координат, а потому эта функция удовлетворяет условиям для функций в неравенстве Юнга:

$$\int_0^a x^n dx + \int_0^b x^{\frac{1}{n}} dx = \frac{a^{n+1}}{n+1} + \frac{b^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} \geq ab.$$

Если показатель степени переобозначить $n = p-1$ $(p > 1)$, то неравенство запишется в более красивом виде.

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab, \quad \text{где} \quad q = \frac{p}{p-1}.$$

Из этого неравенства, называемого неравенством Гёлдера, можно получить сравнение среднего геометрического чисел $\sqrt{xy}$ и их среднего арифметического $(x+y)/2$. Для этого подставим в замечательное неравенство $a = x^{1/2}$, $b = y^{1/2}$, $p = 2$:

$$\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{2} + \frac{\left(\sqrt{y}\right)^2}{2} = \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy},$$

где $q = \dfrac{2}{2-1} = 2.$

Итак, среднее геометрическое двух неотрицательных чисел никогда не превышает их среднего арифметического.

Исследовательский проект для учащихся: используя геометрические соображения, получить правило дифференцирования сложной функции («правило цепочки»).

Упражнения

1. Найдите производные и первообразные следующих функций:

$$\operatorname{arctg} x, \; x^{\frac{1}{n}}, \; \arcsin x.$$

2. Графическим методом докажите тождество

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

3. Графическим методом докажите, что $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

4. На стеклянный шарик с показателем преломления n=1,5 падает параллельный пучок света. Под каким максимальным углом к направлению первоначального распространения выйдут лучи из шарика?

5. Как запишется неравенство Гёльдера и его следствия при $p < 1$?

Литература

1. *Кудрявцев Л.Д.* Краткий курс математического анализа: учеб. для вузов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 736 с.

2. *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства: пер. с англ. – М: Мир. Ред. лит. по математ. наукам., 1965. – 83 с.