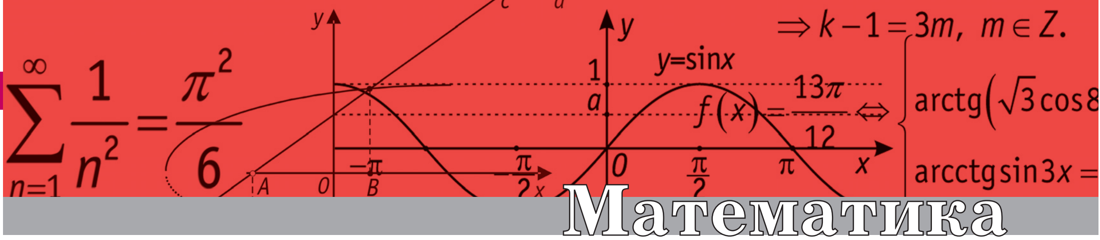


Пукас Юрий Остапович

Закончил в 1974 году физфак МГУ, работал в Королёве, принимал участие в программе «Союз – Аполлон», с 1978 по 2004 гг. работал в ФИАЭ им. Курчатова. Участник всех Творческих конкурсов учителей, учитель математики.

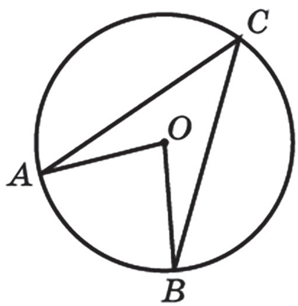
Готовимся к ЕГЭ – 2020. Планиметрия простая и сложная

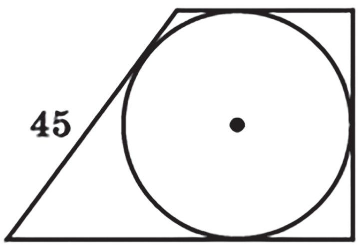
Мы продолжаем знакомство с планиметрическими задачами из вариантов ЕГЭ последних лет.

Чтобы не получить двойку на профильном ЕГЭ по математике, современный Митрофанушка должен получить правильные ответы хотя бы в шести заданиях из первых 12-ти. Их условия заранее известны, все они содержатся в Открытом банке математических задач ЕГЭ (http://mathege.ru/). Задание №6 – планиметрическая задача. Чтобы облегчить её решение, условие как правило сопровождается запоминающимся чертежом. Вот два примера таких задач:

6 Найдите центральный угол AOB, если он на 39° больше вписанного угла ACB, опирающегося на ту же дугу. Ответ дайте в градусах.

6 Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 100, её большая боковая сторона равна 45. Найдите радиус окружности.

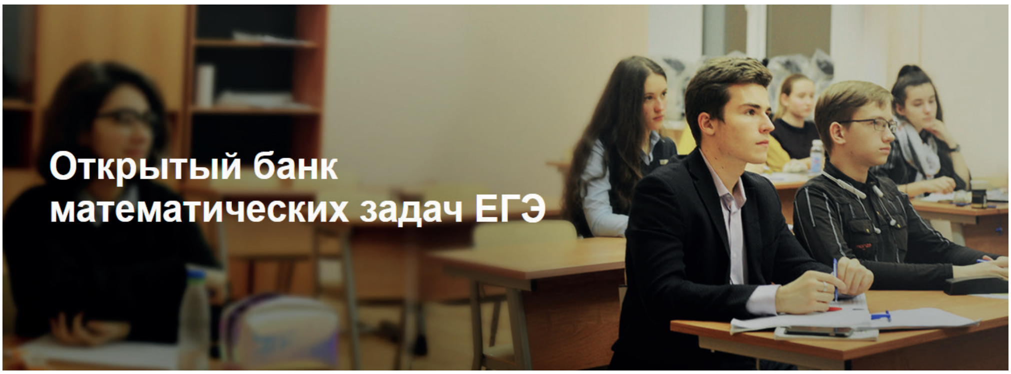




Вам, читателям «Потенциала», двойка не грозит, вас манят высоты, близкие к 100 баллам. Но всё же, перед тем, как мы с вами разберём очень интересные планиметрические задачи из вариантов ЕГЭ двух последних сезонов, давайте немного обсудим условия ещё нескольких простых задач с кратким ответом.

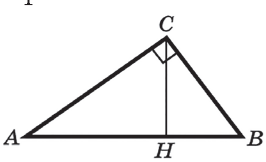
Что же ценного для нас в этих задачах? Нет никаких сомнений, что вы решите их в уме, но когда-нибудь, задумавшись над чертежом трудной и очень важной для вас задачи, вы вдруг разглядите очертания одного из рассмотренных простейших примеров, и тогда трудная задача станет лёгкой.

В фильме 1988 года «Всё меняется» (“Things Change”) один уважаемый человек (чикагский мафиози) произносит золотые слова: «На Сицилии говорят, что богач ценит и мелкую монету. Моя дружба, это мелкая монета, но это всё, что я могу предложить». Мы же хотим сказать, что задачи с кратким ответом (первые 12 в вариантах ЕГЭ), это мелкие монеты, но сильный ученик, должен ценить и мелкие монеты

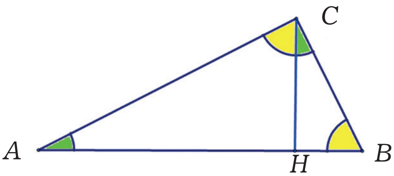


Сюжет первый. Прямоугольный треугольник

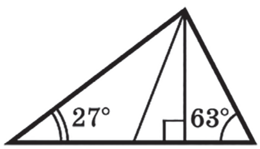
$\boxed{6}$ В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH – высота, $BH = 9$, $tgA = \frac{3}{4}$. Найдите AH.

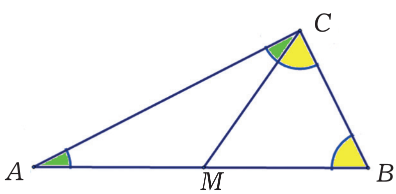


Самое важное в этой конструкции, это две пары равных углов:



$\boxed{6}$ Два угла треугольника равны 63° и 27°. Найдите угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины третьего угла. Ответ дайте в градусах.

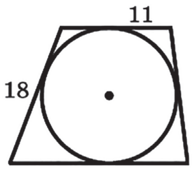




Медиана, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы, поэтому треугольники AMC и BMC – равнобедренные! Это встретится нам не один раз.

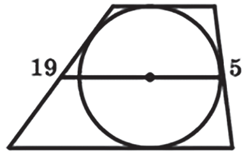
Сюжет второй. Описанный четырёхугольник

6 Периметр четырёхугольника, описанного около окружности, равен 56, две его стороны равны 11 и 18. Найдите большую из оставшихся сторон.

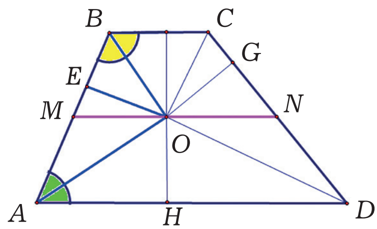


Если четырёхугольник описан около окружности, суммы длин его противоположных сторон попарно равны. Обратное утверждение тоже верно. Центр окружности равноудалён от сторон описанного четырёхугольника, следовательно, он расположен в общей точке пересечения биссектрис всех четырёх углов. Если же этот четырёхугольник – трапеция, проявляются и другие закономерности:

6 Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 19 и 5. Найдите среднюю линию трапеции.



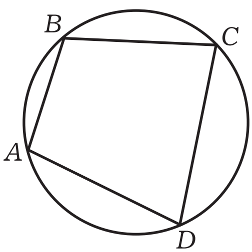
Это легко, так как полусумма оснований равна полусумме боковых сторон. Соединим теперь вершины трапеции с центром вписанной окружности:

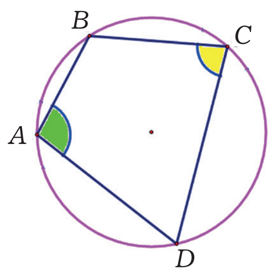


Биссектрисы, проведённые из вершин вписанной трапеции, образуют прямоугольные треугольники AOB и COD, а отрезки OM и ON средней линии трапеции являются в этих треугольниках медианами, проведёнными из вершин прямых углов.

Сюжет третий. Вписанный четырёхугольник

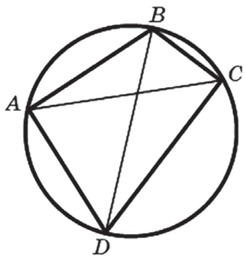
6 Угол A четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, равен 98°. Найдите угол C. Ответ дайте в градусах.

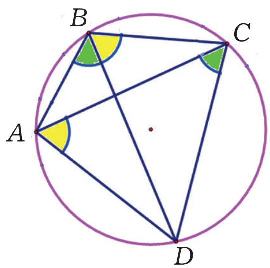




Сумма противоположных углов вписанного в окружность четырёхугольника равна 180°. Верно и обратное утверждение: если сумма противоположных углов четырёхугольника равна 180°, вокруг него можно описать окружность. А если есть окружность, то есть и равные углы, опирающиеся на общую дугу:

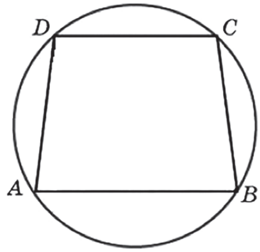
$\boxed{6}$ Четырёхугольник *ABCD* вписан в окружность. Угол *ABD* равен 78°, угол *CAD* равен 40°. Найдите угол *ABC*. Ответ дайте в градусах.

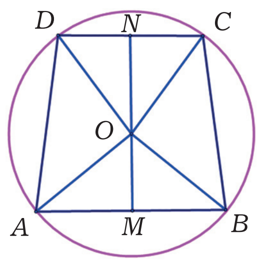




А вот ещё одна полезная задача:

$\boxed{6}$ Основания равнобедренной трапеции равны 16 и 12. Радиус описанной окружности равен 10. Центр окружности лежит внутри трапеции. Найдите высоту трапеции.





Высоту *MN* находят, как сумму перпендикуляров, опущенных из центра окружности на основания: $MN = OM + ON$, вычисляя *OM* и *ON* по теореме Пифагора из прямоугольных треугольников *AMO* и *CNO*.

Переходим к рассмотрению задач №16

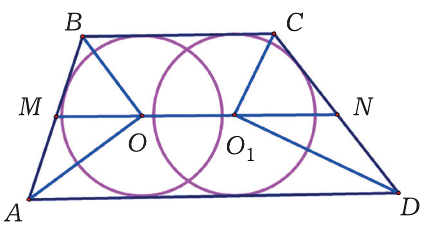
1. Окружность с центром *O* касается оснований *BC*, *AD* и боковой стороны *AB* трапеции *ABCD*. Окружность с центром O_1 касается сторон *BC*, *CD* и *AD*. Известно, что $AB = 10$, $BC = 9$, $CD = 10$, $AD = 39$.

а) Докажите, что прямая OO_1 параллельна основаниям трапеции *ABCD*.

б) Найдите OO_1.

Решение.

а) Диаметры обеих окружностей



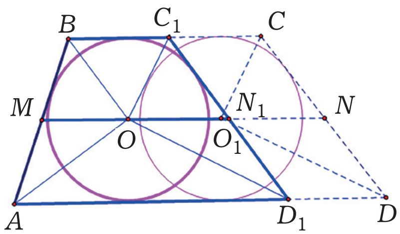
равны высоте трапеции, то есть равны расстоянию между основаниями трапеции *ABCD* и, следовательно, равны друг другу. Расстояния от центров обеих окружностей до прямых BC и AD равны их радиусам, то есть равны половине высоты трапеции. Получается, что центры окружностей лежат на средней линии трапеции, и прямая OO_1 параллельна основаниям трапеции $ABCD$.

б) Интересно, что произойдёт раньше: вы вспомните чертежи из рассмотренных в начале простых задач, или вы о них вспомните, уже решив задачу? Нас не просят, как в третьем сюжете, найти среднюю линию, но мы её найдём. То, что треугольники AOB и CO_1D прямоугольные, вы, конечно, знаете и сумеете это доказать, если потребуется. Но подумать о том, что OM и O_1N их медианы, проведённые к гипотенузам, дорогого стоит.

Итак,

$$OO_1=\frac{AD+CB}{2}-\frac{AB+CD}{2}=4.$$

Я решил эту задачу иначе. Переместим боковую сторону CD параллельно самой себе на расстояние, равное $OO_1=x$, сдвигая при этом влево центр второй окружности, как это показано на следующем рисунке.



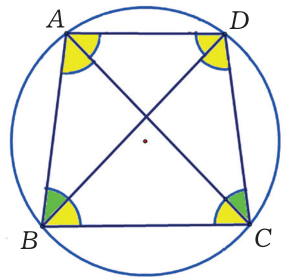
Центры окружностей совместятся, точка C перейдёт в точку C_1, а точка D – в точку D_1. В трапеции ABC_1D_1 стороны $AB = 10$, $BC_1 = 9 - x$, $CD = 30$, $AD_1 = 39 - x$. Так как в трапецию ABC_1D_1 вписана окружность, $AD_1 + BC_1 = AB + CD$, отсюда находим ответ: $OO_1 = x = 4$.

2. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса $R = 8$. Известно, что $AB = BC = CD = 12$.

а) Докажите, что прямые BC и AD параллельны.

б) Найдите AD.

Решение. В ходе решения выясняется, что AD меньшее основание. Так как хорды AB, DC и CD равны, равны и соответствующие им дуги окружности, следовательно, равны и опирающиеся на них углы.

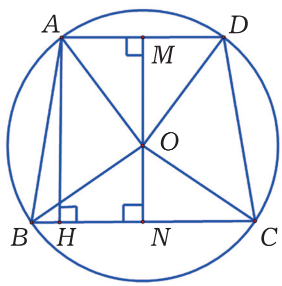


Пусть $\angle BAC = \angle BDC = \angle ACB = \angle ADB = \angle CAD = \angle CDB = \alpha$ и $\angle ABD = \angle ACD = \beta$. Так как $6\alpha + 2\beta = 360^\circ$, получаем, что $\beta = 180^\circ - 3\alpha$.

а) Так как $\angle ACB = \angle CAD$, прямые BC и AD параллельны.

б) По теореме синусов найдём, чему равен $\sin\alpha$: $\sin\alpha=\frac{BC}{2R}=\frac{3}{4}$. Далее можно вычислить $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin\alpha^3=\frac{9}{16}$. Тогда $AD = 2R\cdot\sin 3\alpha=9$.

Те, кто не привык ещё к синусам тройных углов, может действовать в стиле задачи из второго сюжета, в которой высоту MN находят, как



сумму $MN = OM+ON$, вычисляя OM и ON по теореме Пифагора из прямоугольных треугольников AOM и BON.

Обозначив $AM = HN = x$, приравняем $AH = MN$, найдя AH из прямоугольного треугольника AHB:

$$\sqrt{12^2-(6-x)^2}=\sqrt{8^2-x^2}+\sqrt{8^2-6^2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 4{,}5 \Rightarrow AD = 9.$

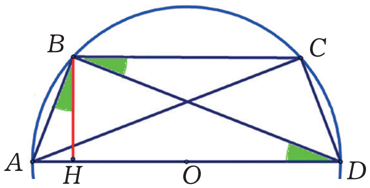
3. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD углы ABD и ACD прямые.

а) Докажите, что $AB = CD$.

б) Найдите AD, если $AB = 2$, $BC = 7$.

Решение. Задача очень простая, поэтому ограничимся краткими комментариями.

а) Нам дано, что $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$, поэтому вершины трапеции $ABCD$ лежат на окружности с диаметром AD. Так как у трапеции $\angle DBC = \angle ADB$, то равны дуги CD и AB, следовательно, $AB = CD$. Осталось найти $AD = 2R$.



б) Опустим из вершины B высоту BH на основание AD. В прямоугольном треугольнике ABD BH является высотой, проведённой к гипотенузе, поэтому $\angle ABH = \angle ADB = \alpha$. $AH = AB \cdot \sin\alpha = 2 \cdot \sin\alpha$, $AD = \dfrac{AB}{\sin\alpha} = \dfrac{2}{\sin\alpha}$. Так как $AD=BC+2\cdot AH$, получаем уравнение $\dfrac{2}{\sin\alpha} = 7 + 2\cdot\sin\alpha$, $\Rightarrow$ $\Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{1}{4}$, $\Rightarrow$ AD = 8. Ответ: 8.

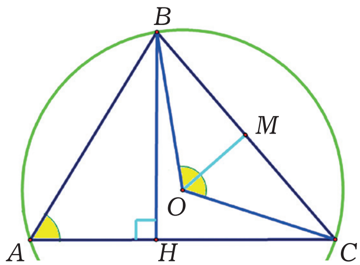
4. Точка O – центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, а BH – высота этого треугольника.

а) Докажите, что углы ABH и CBO равны.

б) Найдите BH, если $AB = 8$, $BC = 9$, $BH = BO$.

Решение.

а) Центральный угол BOC в два раза больше, чем вписанный угол BAC, опирающийся на ту же дугу BC. Пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда $\angle BOC = 2\alpha$. Опустим перпендикуляр OM на сторону BC, тогда $\angle BOM = COM = \alpha$.



Но тогда $\angle ABH = \angle OBM = \angle CBO = 90^\circ - \alpha$.

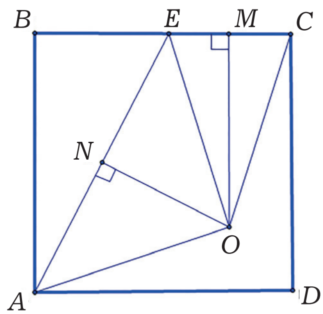
б) Нам дано, что $BH = BO = R$. По теореме синусов $BC = 2R \cdot \sin\alpha = 2 \cdot BH \cdot \sin\alpha = 9$, но $AB \cdot \sin\alpha = 8 \cdot \sin\alpha = BH$. Из этих двух соотношений находим, что $BH = 6$. Ответ: 8.

5. Точка E – середина стороны BC квадрата $ABCD$. Серединные перпендикуляры к отрезкам AE и EC пересекаются в точке O.

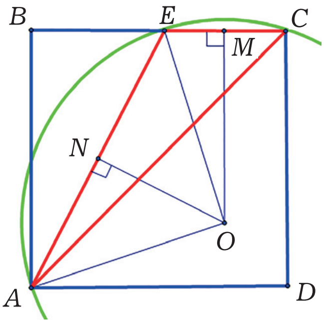
а) Докажите, что $\angle AOE = 90^\circ$.

б) Найдите $BO : OD$.

Решение.

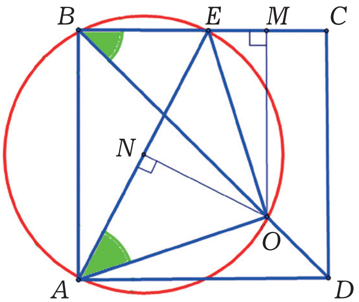


а) Из условия следует, что точка O является центром окружности, описанной около треугольника AEC, поэтому центральный угол AOE в два раза больше, чем вписанный угол ACE, опирающийся на ту же дугу AE. Но $\angle ACE = 45^\circ$, поэтому $\angle AOE = 90^\circ$.



б) Сначала докажем, что точка O лежит на диагонали BD квадрата $ABCD$. В этом случае $\angle OBE = 45^\circ$. Из этого будет следовать подобие прямоугольных треугольников OBM и DBC, из которого мы найдём нужное отношение $BO : OD$.

Дмитрий Гущин здесь использует при доказательстве следующую идею: в треугольнике AEC BD является серединным перпендикуляром к AC, но серединный перпендикуляр к диагонали AC нам известен, это перпендикулярная к ней диагональ BD. Здорово!



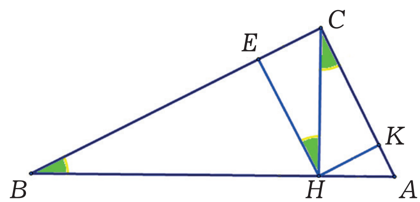
Я же этого не заметил и действовал так: углы ABE и AOE – прямые, следовательно, точки A, B, E и O лежат на одной окружности. Поэтому, $\angle OBE = \angle OAE = 45^\circ$. Неплохо, но мне кажется, что у Гущина лучше. Далее из подобия прямоугольных треугольников OBM и DBC следует, что $\frac{BO}{BD} = \frac{BM}{BC} = \frac{3}{4}$, поэтому $BO{:}OD = 3{:}1$.

6. На гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC опустили высоту CH. Из точки H на катеты опустили перпендикуляры HK и HE.

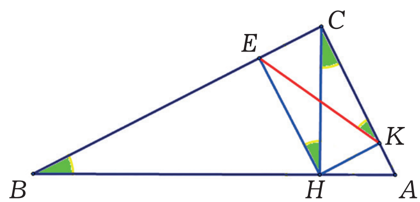
а) Докажите, что точки A, B, K и E лежат на одной окружности.

б) Найдите радиус этой окружности, если $AB = 12$, $CH = 5$.

Решение. а) Пусть для определённости точка E лежит на катете BC, а точка K – на катете BC. Четырёхугольник $CKHE$ – прямоугольник. Пусть $\angle ABC = \alpha$. Тогда $\angle ABC = \angle ACH = \angle CHE = \alpha$.



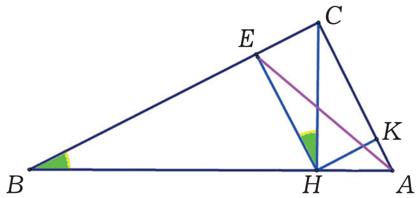
Проведём EK – вторую диагональ прямоугольника. Тогда и $\angle CKE = \alpha$.



Следовательно, $\angle EKA = 180^\circ - \angle CKE = 180^\circ - \alpha$. Но тогда $\angle ABC + \angle EKA = 180^\circ$. Следовательно, точки A, B, K и E лежат на одной окружности.

б) Для нахождения радиуса этой окружности воспользуемся теоремой синусов: $AE = 2R \cdot \sin\alpha$. Отрезок

AE – гипотенуза треугольника ACE



Из прямоугольных треугольников ACB и CEH соответственно находим, что $AC = AB \cdot \sin\alpha = 12 \cdot \sin\alpha$ и $EC = CH \cdot \sin a = 5 \cdot \sin\alpha$. По теореме Пифагора $AE^2 = AC^2 + EC^2$, следовательно, $AE = 13 \cdot \sin\alpha = 2R \cdot \sin\alpha$. Отсюда находим, что $R = \frac{13}{2}$. Ответ: $R = \frac{13}{2}$.

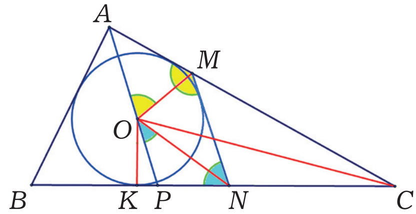
7. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC в точке K. К этой окружности проведена касательная, параллельная биссектрисе AP треугольника и пересекающая стороны AC и BC в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что $\angle MOC = \angle NOK$.

б) Найдите периметр треугольника ABC, если отношение площадей трапеции $AMNP$ и треугольника ABC равно $2:7$, $MN = 2$, $AM + PN = 6$.

Решение. Сразу разобраться в том, что дано, не так-то просто. Есть вписанная в теугольник окружность, одна из точек касания выделена. Есть параллельные прямые, расстояние между которыми – радиус вписанной окружности. Дано отношение площадей, а просят найти периметр. Площадь, периметр, радиус вписанной окружности, это хорошо узнаваемое сочетание терминов наверняка пригодится в пункте б). Может с него и начать?

б) Биссектрисы OM и ON отсекают от трапеции равнобедренные треугольники OAM и OPN. Это хорошо знакомо с восьмого класса, и часто встречалось в задачах.



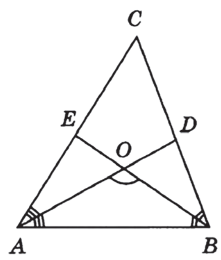
Но в решении это надо пояснить. Отрезок OM – биссектриса угла AMN, но $\angle OMN = \angle AOM$, как накрест лежащие. Следовательно, треугольник OAM равнобедренный и $OA = AM$, аналогично $OP = PN$. Но тогда получается, что основание трапеции AP равно сумме боковых сторон: $AP = AM + PN = 6$. Теперь из отношения площадей трапеции $AMNP$ и ABC треугольника найдём периметр треугольника ABC: $\frac{S_{AMNP}}{S_{ABC}} =$

$$= \frac{(AP + MN) \cdot r}{P_{ABC} \cdot r} = \frac{8 \cdot r}{P_{ABC} \cdot r} = \frac{2}{7} \Rightarrow P_{ABC} = 28.$$

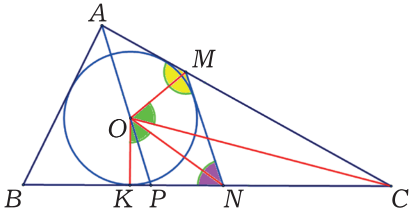
а) Теперь докажем, что $\angle MOC = \angle NOK$.

Среди задач №6 нередко встречается вот такая:

$\boxed{6}$ В треугольнике ABC угол C равен 36°, биссектрисы AD и BE пересекаются в точке O. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.



Ответ в ней легко получить (и запомнить): $\angle AOB = 90^\circ + \frac{\angle ACB}{2}$. Оказывается, так же легко вычисляется угол, образованный биссектрисами внешних углов треугольника.



В нашем случае, это $\angle MON$, образованный биссектрисами OM и ON внешних углов треугольника MCN. Пусть $\angle MCN = \beta$, тогда $\angle MON = 90° - \dfrac{\beta}{2}$. Но в прямоугольном треугольнике CKO этому же равен угол KOC: $\angle KOC = \angle MON = 90° - \dfrac{\beta}{2}$. Следовательно, $\angle MOC = \angle MON - \angle NOC = \angle KOC - \angle NOC = \angle NOK$. Что и требовлось доказать. А в пункте б) **ответ**: $P_{ABC} = 28$.

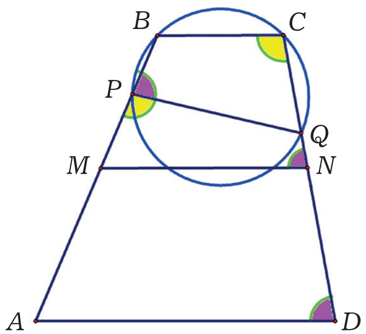
Условия трёх следующих задач отличаются лишь в вопросах пункта б)

8.1. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Точки M и N являются серединами сторон AB и CD соответственно. Окружность, проходящая через точки B и C, пересекает отрезки BM и CN соответственно в точках P и Q (отличных от концов отрезков).

а) Докажите, что точки M, N, P и Q лежат на одной окружности.

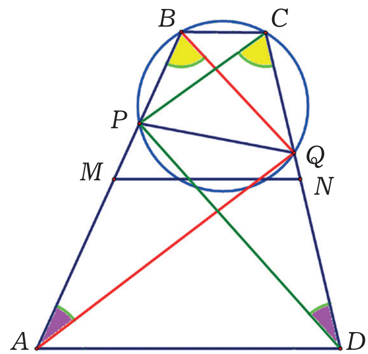
б) Найдите QN, если отрезки CP и DP перпендикулярны, $AB = 26$, $BC = 4{,}5$, $CD = 25$, $AD = 21{,}5$.

Решение. а) Средняя линии MN трапеции $ABCD$ параллельна её основаниям, поэтому $\angle MNC = \angle ADC$ и $\angle BCD + \angle MNC = \angle BCD + \angle ADC = 180°$.

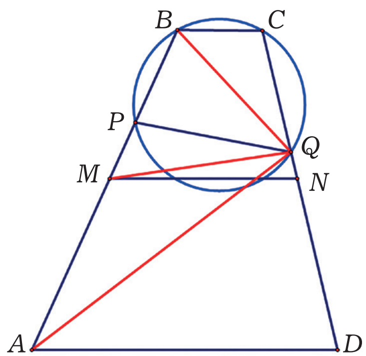


Но ведь и $\angle BCD + \angle BPQ = 180°$, так как точки B, C, Q и P лежат на одной окружности. Отсюда следует, что $\angle BPQ = \angle MNC = \angle ADC$, и что $\angle APQ = \angle BCD$. Но тогда $\angle APQ + \angle MNC = \angle APQ + \angle ADC = 180°$. Получается, что мы доказали не только то, что точки M, N, Q и P лежат на одной окружности, но и то, что и точки A, D, Q, P лежат на одной окружности. Это нам пригодится в пункте б).

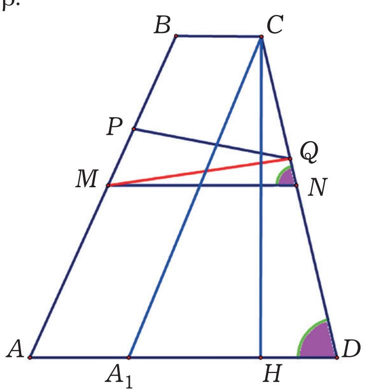
б) Нам дано, что $\angle CPQ = 90°$, докажем, что и $\angle BQA = 90°$.



В прямоугольном треугольнике CPQ $\angle PCQ + \angle PDQ = 90°$, но $\angle PCQ = \angle PBQ$ и $\angle PDQ = \angle PAQ$, так как они опираются на одни и те же дуги в окружностях, описанных около четырёхугольников $PBCQ$ и $PADQ$ соответственно. Следовательно, $\angle PBQ + \angle PAQ = 90°$, следовательно, треугольник BQA – прямоугольный. Как раз он нам и нужен. Соединим точки Q и M. Отрезок QM – это медиана, проведённая из вершины прямого угла к гипотенузе AB, поэтому $QM=\frac{AB}{2}=13$. Теперь всё внимание на треугольник QMN, одной из сторон которого является искомый отрезок QN. MN – это средняя линия трапеции $ABCD$, следовательно, $MN=\frac{BC+AD}{2}=13$.



Итак, треугольник NMQ – равнобедренный, так как $MN = MQ = 13$. Пусть $\angle MNC = \angle ADC = \beta$, тогда $NQ = 2 \cdot MN \cdot \cos\beta$. Найдём, чему равен $\cos\beta$.



Отложим на стороне AD отрезок $AA_1 = BC$, тогда $ABCA_1$ – параллелограмм, $AC_1 = AB = 26$. Нам известны и две другие стороны треугольника A_1CD: $A_1D = 17$, $CD = 25$. Используя теорему косинусов. Найдём, что $\cos\beta=\frac{7}{25}$. Можно действовать и иначе. Опустим перпендикуляр CH на нижнее основание AD. Обозначим $HD = x$, тогда $A_1H = 17 - x$. Из соотношения $A_1C^2 - A_1H^2 = CD^2 - HD^2$ найдём, что $x = 7$. Тогда $\cos\beta=\frac{x}{CD}=\frac{7}{25}$.

Теперь вычисляем NQ.

$$NQ=2\cdot 13\cdot\frac{7}{25}=\frac{182}{25}=7{,}28.$$

Ответ: 7,28.

8.2.

б) Найдите QN, если отрезки CP и DP перпендикулярны, $AB = 17$, $BC = 1$, $CB = 15$, $AD = 9$.

Решение. Кроме отличий в численных данных, условие задачи полностью совпадает с условием только что разобранной. Отличие в решении начинается с того момента, как в пункте б) мы найдём, что $QM=\frac{AB}{2}=8{,}5$.

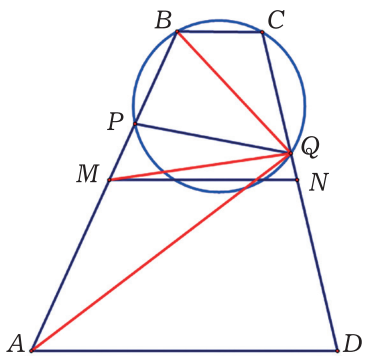
Но здесь треугольник NMQ – не равнобедренный, так как $MN = 4$. Попробуем сначала найти, чему равен $\cos\beta$, а потом уже будем думать, что делать дальше.

Рассмотрим, как и в предыдущей задаче, треугольник A_1CD. В нём $A_1B = AC = 17$. Знакомые числа! Это – пифагорова тройка: $A_1C^2 = A_1D^2 + CD^2$. Оказывается, треугольник A_1CD – прямоугольный! По теореме Пифагора находим, что $QN = 7{,}5$. Это – ответ на вопрос пункта б).

8.3.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника NPQ, если отрезки AQ и BQ перпендикулярны, $AB = 28$, $BC = 3$, $CD = 25$, $AD = 20$.

Решение. б) В пункте а) доказано, что точки M, N, P и Q лежат на одной окружности. Радиус именно этой окружности нас и просят найти, и совсем не обязательно использовать для этого треугольник NPQ. Найдём радиус окружности, описанной около треугольника MNQ.



Нам не надо здесь доказывать, что треугольник CPD – прямоугольный, это нам не понадобится. По условию треугольник AQB – прямоугольный, следовательно, его медиана $MQ = \dfrac{AB}{2} = 14$. Пусть $\angle MNC = \angle ADC = \beta$, тогда $MQ = 2 \cdot R \cdot \sin\beta$. Используя опыт предыдущих задач, найдём одним из способов, что $\sin\beta = \dfrac{84}{85}$. Далее находим, что $R = \dfrac{85}{12}$. Это – ответ на вопрос пункта б).

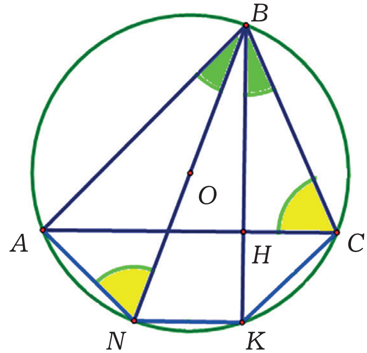
Задача, безусловно, трудная. Но её давали на досрочном экзамене. Летом же дают очень простые задачи. Вот, что решали 29.05.2019:

9. Около остроугольного треугольника ABC с различными сторонами описали окружность с диаметром BN. Высота BH пересекает эту окружность в точке K.

а) Докажите, что $AN = CK$.

б) Найдите KN, если $\angle BAC = 25^\circ$, $\angle ACB = 85^\circ$, а радиус окружности равен 20.

Решение. а) Треугольники BAN и BHC – прямоугольные, так как $\angle BAN$ опирается на диаметр BN, а $BHC = 90^\circ$ по условию. В этих треугольниках $\angle ANB = \angle BCA$, так как они опираются на одну и ту же дугу AB. Следовательно, равны и другие острые углы этих треугольников: $\angle ABN = \angle CBK$.



Равные углы опираются на равные дуги, которые, следовательно, стягивают равные хорды: $AN = CK$. Что и требовалось доказать.

б) В треугольнике ABC $\angle ABC = 180^\circ - (25^\circ + 85^\circ) = 70^\circ$. А так как $\angle ABN = \angle CBK = 5^\circ$, то $\angle NBK = 60^\circ$. По теореме синусов $KN = 2 \cdot R \cdot \sin 60^\circ = 20\sqrt{3}$. **Ответ:** $KN = 20\sqrt{3}$