Пукас Юрий Остапович
Закончил в 1974 году физфак МГУ, работал в Королёве, принимал участие в программе «Союз – Аполлон», с 1978 по 2004 гг. работал в ФИАЭ им. Курчатова. Участник всех Творческих конкурсов учителей, учитель математики.

Готовимся к ЕГЭ – 2020 Параметры. МЭЙНСТРИМ

Есть задачи, в которых главное – это найти идею решения, после чего добраться до ответа совсем не трудно. А бывают другие ситуации, когда идея решения и пути её реализации достаточно очевидны, стандартны, хорошо изучены в школе, но для получения ответа требуется кропотливая техническая работа и большая концентрации внимания, что по силам далеко не каждому. На мой взгляд, задачи с параметрами четырёх последних сезонов ЕГЭ именно такие. Имеются в виду те задачи, что встретились в вариантах основных летних экзаменов, начиная с 2016 года.

Наиболее интересные задачи с параметрами предшествующих сезонов разобраны в книге $[1]$. О задачах 2016 и 2017 годов говорилось в статьях $[2,3,4]$, есть они и в сборнике $[5]$.

Разговор об иррациональных уравнениях с параметром, что были предложены 6 июня 2016 года на ЕГЭ по математике, мы начнём с трёх очень простых уравнений, вроде тех, что могут встретиться под №5 в первой части профильного ЕГЭ по математике. Да и так ли порой велика разница между простыми и сложными задачами?

1. Решите уравнение $\sqrt{4+4x}=-1-x.$ (Социологический факультет МГУ, 1997).

После возведения в квадрат и преобразований получаем квадратное уравнение $x^2-2x-3=0$. Его корни: $x_1=3$ и $x_2=-1$. Их надо проверить, так как при возведении в квадрат могут появиться посторонние корни. Подстановкой в исходное уравнение легко убеждаемся, что первый корень не подходит.

Ответ: $x=-1$.

2. Решите уравнение $\sqrt{2x+6}+\sqrt{3}(x-1)=0$. (Институт стран Азии и Африки МГУ, 1997.)

Приводим уравнение к стандартному виду: $\sqrt{2x+6}=-\sqrt{3}(x-1)$, а затем возводим обе части в квадрат, получая после преобразований квадратное уравнение $3x^2-8x-3=0$. Здесь проверять найденные корни ($x_1=3$ и $x_2=-\frac{1}{3}$) подстановкой в исходное уравнение уже сложнее. Для первого корня получаем $\sqrt{12}+2\sqrt{3}\neq 0$, а для второго всё сходится: $\sqrt{\frac{16}{3}}-\frac{4\sqrt{3}}{3}=0$.

Ответ: $x=-\frac{1}{3}$.

Сейчас мы узнаем, как в подобных уравнениях можно упростить проверку корней.

3. Решите уравнение

$$\sqrt{8x^2-40x+50}=7-3x.$$

(Химфак МГУ, 1997.)

Возведя в квадрат обе части, после преобразований получаем квадратное уравнение $x^2-2x-1=0$; $x_{1,2} = 1\pm\sqrt{2}$. Проверять эти корни подстановкой в исходное уравнение не очень приятное занятие, но есть более простой путь. Дело в том, что уравнение $\sqrt{f(x)}=g(x)$ равносильно системе:

$$\sqrt{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=(g(x))^2, \\ g(x)\geq 0; \end{cases}$$

поэтому проверять найденные корни мы будем в условии $7-3x\geq 0$, а не в исходном уравнении! В результате этой проверки убеждаемся, что корнем исходного уравнения является меньший корень квадратного уравнения.

Ответ: $1-\sqrt{2}$.

Обратим внимание на ошибочность утверждения, что уравнение $\sqrt{f(x)}=g(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x)=(g(x))^2, \\ f(x)\geq 0; \end{cases}$$

так как для всех корней уравнения $f(x)=(g(x))^2$ условие $f(x)\geq 0$ выполняется автоматически, ведь для них $f(x)=(g(x))^2\geq 0$, а посторонние корни так и не будут выявлены! Их выявит проверка условия $g(x)\geq 0$.

К успеху на ЕГЭ – 2016 вело чёткое понимание этой простой схемы и аккуратность в её пошаговой реализации.

4. Найдите все значения параметра ***a***, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x^4-x^2+4a^2}=x^2-x+2a$ имеет ровно три различных решения.

Здесь у возведения в квадрат хорошие перспективы: можно заметить, что сокращаются x^4 и $4a^4$, и у полученного уравнения обязательно будет корень $x=0$, который удовлетворит исходному уравнению для всех $a\geq 0$. Начинаем действовать!

$$\begin{cases} x^2-x+2a\geq 0, \\ x^4-x^2+4a^2=\left(x^2-x+2a\right)^2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2-x+2a\geq 0, \\ 2x^3-x^2(4a+2)+4ax=0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2-x+2a\geq 0, \\ x(x^2-x(2a+1)+2a)=0. \end{cases}$$

Все три корня уравнения-следствия находятся в явном виде: $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2a.$

Найденные корни теперь надо проверить в условии $x^2-x+2a\geq 0.$ Это означает, что мы должны выяснить, при каких значениях параметра данное неравенство выполняется при подстановке в него найденных корней: по очереди подставляем корни в условие и затем решаем относительно параметра получившиеся неравенства.

Корни $x_1=0$ и $x_2=1$ удовлетворяют условию $x^2-x+2a\geq 0$ при всех $a\geq 0$; корень $x_3=2a$ – при любых значениях a.

Однако корни могут совпадать. Если $a=0$, то $x_1=x_3$. Если же $a=0{,}5$, то $x_2=x_3$. Учитывая всё это, находим, при каких значениях параметра $\boldsymbol{a}$ исходное уравнение имеет ровно три различных решения. **Ответ:** $(0;0{,}5);(0{,}5;\infty)$.

5. Найдите все значения параметра $\boldsymbol{a}$, при каждом из которых уравнение $\sqrt{37x^2-12ax+9}=2x^2-2ax+3$ имеет ровно три различных решения.

И здесь у возведения в квадрат хорошие перспективы: сокращаются 9 и $-12ax$, подмечаем также, что при любых значениях a обязательно будет решение $x=0$. Но есть и другой путь. Понимая общую схему решения подобных уравнений, можно действовать интереснее, подмечая в условии конкретные интересные детали.

Обозначив $2x^2-2ax+3=t$, получаем уравнение $\sqrt{6t+25x^2-9}=t$, равносильное системе

$$\begin{cases} t^2-6t+9=25x^2, \\ t\geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-3=\pm 5x, \\ t\geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2x^2-2ax=5x, \\ 2x^2-2ax=-5x; \end{array}\right. \\ 2x^2-2ax+3\geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=0, \\ x_2=a+\dfrac{5}{2}, \\ x_3=a-\dfrac{5}{2}; \end{array}\right.$$

Корень $x_1=0$ удовлетворяет условию $2x^2-2ax+3\geq 0$ при любых значениях a; корень $x_2=a+\frac{5}{2}$ при всех $a\geq -3{,}1$; корень $x_3=a-\frac{5}{2}$ при всех $a\leq 3{,}1$.

По условию задачи все корни должны быть различными. Понятно, что $x_2\neq x_3$, но надо ещё исключить случаи, когда или x_2, или x_3 равны x_1, то есть нулю. Корни совпадают, если $a=\pm\frac{5}{2}$. Исключая эти значения, получаем окончательный ответ.

Ответ: $[-3{,}1;-2{,}5)$; $(-2{,}5;2{,}5)$; $(2{,}5;3{,}1]$.

Так как многие задания с параметром из вариантов летнего ЕГЭ – 2017 (02.06.2017) были подробно разобраны в статье [4], ограничимся здесь рассмотрением лишь двух уравнений.

6. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $\ln(4x-1)\cdot\sqrt{x^2-6x+6a-a^2}=0$ имеет ровно один корень на отрезке $[0;3]$.

Хорошо понимая, как решать подобное уравнение будь вместо параметра любое конкретное число, будем действовать так: сначала найдём корни, а затем исследуем вопрос об их принадлежности отрезку $[0;3]$.

Рассмотрим два случая:

$$\begin{cases}4x-1=1,\\ x^2-6x+6a-a^2\ge 0\end{cases} \quad \text{и}$$

$$\begin{cases}x^2-6x+6a-a^2=0,\\ 4x-1>0.\end{cases}$$

В первом случае получаем:

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{2},\\ -11+24a-4a^2\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{1}{2}\le a\le\dfrac{11}{2}.\end{cases}$$

Второй случай:

$$\begin{cases}(x-3)^2=(a-3)^2,\\ 4x-1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_2=a,\\ a>\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

$$\text{и} \begin{cases}x_3=6-a,\\ a<\dfrac{23}{4}.\end{cases}$$

Понятно, что корень $x_1=\dfrac{1}{2}$ принадлежит отрезку $[0;3]$, если $\dfrac{1}{2}\le a\le\dfrac{11}{2}$. Исследовав вопрос о принадлежности данному отрезку корней x_2 и x_3, в итоге получаем:

$$\begin{cases}x_2=a\\ \dfrac{1}{4}<a\le 3\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}x_3=6-a\\ 3\le a<\dfrac{23}{4}.\end{cases}$$

Корни могут совпадать: $x_2=x_1$, если $a=\dfrac{1}{2}$, и $x_3=x_1$, если $a=\dfrac{11}{2}$. В случае, когда $x_2=x_3$, $a=3$.

Представим теперь полученные результаты в виде таблицы:

Значения параметра a	$\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2};3\right)$	3	$\left(3;\frac{11}{2}\right)$	$\frac{11}{2}$	$\left(\frac{11}{2};\frac{23}{4}\right)$
Корни уравнения	x_2	$x_1=x_2$	$x_1;x_2$	$x_1;$ $x_2=x_3$	$x_1;x_3$	$x_1=x_3$	x_3

С помощью этой таблицы мы без труда найдём, при каких значениях a уравнение имеет ровно один корень на отрезке $[0;3]$.

Ответ: $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right];\ \left[\frac{11}{2};\frac{23}{4}\right)$.

7. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{5-6x}\cdot\ln\left(4x^2-a^2\right)=\sqrt{5-6x}\ln(2x+a)$ имеет ровно один корень.

Обратите внимание на то, что в этом задании не ставится условия о принадлежности корней какому-либо отрезку. Как правило, тем летом корни искали на отрезке $[0;1]$. Как мы скоро убедимся (для решения задачи это не требуется), все возможные корни этому отрезку принадлежат. Но сначала их надо найти!

Приводим уравнение к виду $\sqrt{5-6x}\cdot\left(\ln\left(4x^2-a^2\right)-\ln(2x+a)\right)=0$.

Рассмотрим два случая:

$$\begin{cases}\sqrt{5-6x}=0,\\ 4x^2-a^2>0,\ \text{и}\\ 2x+a>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\ln\left(4x^2-a^2\right)=\ln(2x+a),\\ 5-6x\ge 0.\end{cases}$$

Первый случай:

$$\begin{cases}x_1=\frac{5}{6},\\ 4\cdot\frac{25}{36}-a^2>0,\\ \frac{10}{6}+a>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\frac{5}{6},\\ -\frac{5}{3}<a<\frac{5}{3}.\end{cases}$$

Второй случай:

$$\begin{cases}2x-a=1,\\ 2x+a>0,\\ 5-6x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=\frac{a+1}{2},\\ 2a+1>0,\\ 5-3(a+1)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x_2=\frac{a+1}{2},\\ -\frac{1}{2}<a\le\frac{2}{3}.\end{cases}$$ Если $a=\frac{2}{3}$, то $x_1=x_2$.

Теперь можно убедиться, что корень x_2, как и $x_1=\frac{5}{6}$, принадлежит отрезку $[0;1]$. Действительно:

$$\begin{cases}0\le\frac{a+1}{2}\le 1,\\ -\frac{1}{2}<a\le\frac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le a\le 1,\\ -\frac{1}{2}<a\le\frac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{2}<a\le\frac{2}{3}.$$

А таблица поможет нам получить ответ:

Значения параметра a	$\left(-\frac{5}{3};-\frac{1}{2}\right]$	$\left(-\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3};\frac{5}{3}\right)$
Корни уравнения	x_1	$x_1;x_2$	$x_1=x_2$	x_1

Ответ: $\left(-\frac{5}{3};-\frac{1}{2}\right];\left[\frac{2}{3};\frac{5}{3}\right)$.

Нелинейные системы уравнений – привычная вещь для школьников. И на ОГЭ (ГИА) они присутствуют. Вот два примера из известного школьного сборника [6].

8. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2+xy=6x, \\ x^2+y^2=3(x+y). \end{cases}$$

Преобразовав первое уравнение системы, получаем

$$\begin{cases} x(x+y-6)=0, \\ x^2+y^2=3(x+y). \end{cases}$$

После этого рассматриваем два случая: $x=0$ и $y=6-x$, подставляя это во второе уравнение системы.

Ответ: $(0;0)$, $(0;3)$, $(3;3)$.

9. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2=6x-|y-3|, \\ y^2=xy-9. \end{cases}$$

А эта система сложнее и интереснее. Модуль здесь, как окажется, не усложнение, а ключ к решению.

Так как $|y-3|=6x-x^2\geq 0$, получаем, что для решений системы должно выполняться условие $0\leq x\leq 6$. Но тогда из второго уравнения системы следует, что

$$0\leq\frac{y^2+9}{y}\leq 6 \Rightarrow \begin{cases} y>0, \\ y^2-6y+9\leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$y=3 \Rightarrow x=6.$

Ответ: $(6;3)$.

Заметим, что системы с параметром, которые были предложены на ЕГЭ в день защиты детей 01.06.2018, по сложности всё же ближе к разобранному здесь №**8**, а не к №**9**:

10. Найдите все значения параметра ***a***, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2-6(a-2)x-2ay+10a^2-36a+32=0, \\ y^2=x^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Решение. Надо рассмотреть два случая: $y=x$ и $y=-x$. Это приводит к двум системам:

$$\begin{cases} y=x, \\ x^2-2(2a-3)x+5a^2-18a+16=0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} y=-x, \\ x^2-2(a-3)x+5a^2-18a+16=0. \end{cases}$$

Каждая из этих систем может иметь не более двух различных решений, поэтому, чтобы в сумме получилось четыре различных решения, дискриминанты обоих квадратных уравнений, а они зависят от параметра a, должны быть больше нуля:

$$\begin{cases} (2a-3)^2-\left(5a^2-18a+16\right)>0, \\ (a-3)^2-\left(5a^2-18a+16\right)>0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a^2-6a+7<0, \\ 4a^2-12a+7<0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3-\sqrt{2}<a<3+\sqrt{2}, \\ \frac{3-\sqrt{2}}{2}<a<\frac{3+\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$3-\sqrt{2}<a<\frac{3+\sqrt{2}}{2}.$$

Ещё надо исключить те значения параметра, при которых есть решение $x=y=0$, так как это решение будет удовлетворять обоим рассматриваемым случаям. Действительно, пусть $(x_1;x_1)$ – одно из решений первой системы, и $(x_2;-x_2)$ – одно из решений второй системы. Эти решения совпадают, если

$$\begin{cases} x_1=x_2, \\ x_1=-x_2 \end{cases} \Leftrightarrow x_1=x_2=0.$$

Подставив $x=y=0$ в первое уравнение исходной системы, получим уравнение $10a^2-36a+32=0$, его корни $a_1=1{,}6$ и $a_2=2$. Эти значения надо исключить. В результате получаем **ответ**: $\left(3-\sqrt{2};1{,}6\right)$; $(1{,}6;2)$; $\left(2;\frac{3+\sqrt{2}}{2}\right)$.

Послесловие к задаче 10. Выделяя полные квадраты, можно показать, что первое уравнение системы – это уравнение окружности радиуса 2 и с центром в точке $(3a-6;a)$: $\left(x-(3a-6)\right)^2+(y-a)^2=4$. Второе уравнение задаёт пару прямых $y=x$ и $y=-x$, пересекающихся в точке $(0;0)$. Если окружность проходит через эту точку, то исходная система имеет не больше трёх различных решений. Понятно, что в решении не надо рисовать эту окружность, но можно такими рассуждениями пояснить ситуацию.

Вместе с результатами ученики получают сканы своих работ, обсуждают решения на форумах перед апелляцией. Так мы узнаём условия заданий. Вот эта система предлагалась москвичам:

11. Найдите все значения параметра ***a***, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y=(a+2)x^2+2ax+a-2=0, \\ y^2=x^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Мы уже с вами знаем, что здесь надо действовать бесхитростно, как с обычной школьной системой. Но ученики, получив вариант, этого в большинстве своём заранее не знали, поэтому были безуспешные попытки графического рассмотрения взаимного расположения параболы и двух прямых. Первое уравнение системы у них ассоциировалось не с квадратным уравнением, а с графиком параболы. Мы же, действуя, как в номере **10**, без проблем быстро получим **ответ**: $\left(-\frac{17}{4};-2\right)$; $(-2;2)$; $\left(2;\frac{17}{4}\right)$.

12. Найдите все значения параметра ***a***, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} ax^2+ay^2-(2a-5)x+2ay+1=0, \\ x^2+y=xy+x \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Решение. Второе уравнение системы приводим к виду $(x-1)(x-y)=0$, после чего рассматриваем два случая: $x=1$ и $x=y$. После преобразований получаем две системы:

$$\begin{cases} x=1, \\ ay^2+2ay-a+6=0 \end{cases}$$

и $$\begin{cases} y=x, \\ 2ax^2+5x+1=0. \end{cases}$$

В отличие от предыдущих двух задач, здесь сначала надо рассмотреть случай, когда $a=0$, то есть, когда вторые уравнения этих двух систем не квадратные. Убеждаемся, что если $a=0$ исходная система имеет только одно решение $x=y=-0{,}2$ и идём дальше.

Каждая из этих систем может иметь не более двух различных решений, поэтому, чтобы в сумме получилось четыре различных решения, дискриминанты обоих квадратных уравнений, а они зависят от параметра a, должны быть больше нуля:

$$\begin{cases} a^2+a(a-6)>0, \\ 25-8a>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(a-3)>0, \\ a<\dfrac{25}{8} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{aligned} &a<0, \\ &3<a<\frac{25}{8}. \end{aligned}\right.$$

Ещё надо исключить те значения параметра, при которых есть совпадающие решения, то есть решения, удовлетворяющие обоим рассматриваемым случаям. Пусть $(1;y_1)$ – одно из решений первой системы, и $(x_2;x_2)$ – одно из решений второй системы. Эти решения совпадают, если $y_1=x_2=1$, то есть общее решение, это пара чисел $(1;1)$. Она является решением исходной системы, если $2a+6=0$, то есть при $a=-3$. Исключая это значение параметра, получаем **ответ**: $(-\infty;-3)$; $(-3;0)$; $\left(3;\dfrac{25}{8}\right)$.

13. Найдите все значения параметра $\boldsymbol{a}$, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^4+y^2=2a-7, \\ x^2+y=|a-3| \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Решение. В этой системе модуль притягивает взгляд. Нас отвлекают, предлагают с ним повозиться. Но мы уже знаем, как надо действовать. А действовать надо стандартно:

$$\begin{cases} y=|a-3|-x^2, \\ x^4+\left(|a-3|-x^2\right)^2=2a-7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y=|a-3|-x^2, \\ 2x^4-2x^2|a-3|+a^2-8a+16=0. \end{cases}$$

Исходная система имеет ровно четыре различных решения тогда и только тогда, когда четыре различных корня имеет биквадратное уравнение

$$2x^4-2x^2|a-3|+a^2-8a+16=0\,.$$

Для этого надо, чтобы квадратное уравнение

$$2t^2-2t|a-3|+a^2-8a+16=0$$

имело два различных положительных корня.

Для этого положительными должны быть дискриминант, свободный член и $|a-3|$:

$$\begin{cases} \left(|a-3|\right)^2-2\left(a^2-8a+16\right)>0, \\ a^2-8a+16>0, \\ |a-3|>0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a^2-10a+23<0, \\ a\neq 4, \\ a\neq 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 5-\sqrt{2}<a<5+\sqrt{2}, \\ a\neq 4 \end{cases} \Rightarrow$$

Ответ: $\left(5-\sqrt{2};4\right)$; $\left(4;5+\sqrt{2}\right)$.

Послесловие к задаче 13. А что, если пойти похожим, но другим путём:

$$\begin{cases} x^2=|a-3|-y, \\ \left(|a-3|-y\right)^2+y^2=2a-7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 = |a-3| - y, \\ 2y^2 - 2y|a-3| + a^2 - 8a + 16 = 0. \end{cases}$$

При другой подстановке получалось биквадратное уравнение, и дальнейшие действия были понятны: корни уравнения

$$2t^2 - 2t|a-3| + a^2 - 8a + 16 = 0$$

должны быть различны и положительны. А что делать сейчас? Начинаем рассуждать. Чтобы исходная система имела ровно четыре различных решения, квадратное уравнение относительно y должно иметь два различных корня, для каждого из которых должно выполняться условие: $x^2 = |a-3| - y > 0$. С различными корнями всё понятно, но как проверять условие? Эта проверка явно сложнее, чем проверка положительности корней t_1 и t_2. Вполне возможно, что на экзамене ученик, столкнувшись с этими трудностями, попробует тогда другой путь и применит подстановку $y = |a-3| - x^2$, но нам надо разобраться именно в возникшей ситуации, найти выход из этого тупика! И мы его находим.

Пусть $y_1 > y_2$. Найдя их, находим x_1^2 и x_2^2:

$$\left[\begin{array}{l} x_1^2 = |a-3| - y_1, \\ x_2^2 = |a-3| - y_2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1^2 + y_1 = |a-3|, \\ x_2^2 + y_2 = |a-3|. \end{array}\right.$$

По теореме Виета $y_1 + y_2 = |a-3|$, поэтому, если $y_2 \le 0$, то $y_1 \ge |a-3|$. Но тогда $x_1^2 \le 0$, и исходная система не будет иметь четырёх различных корней. Следовательно, проверка положительности корней y_1 и y_2 полностью заменяет проверку условия $x^2 = |a-3| - y > 0$. Всё это немного напоминает решение задачи **9**!

Можно также в какой-то счастливый момент заметить, что коэффициенты квадратных уравнений относительно y и относительно t полностью совпадают! Следовательно, набор корней y_1 и y_2 совпадает с набором корней t_1 и t_2, причём $y_1 = t_2$ и $y_2 = t_1$. Поэтому, если $y_2 \le 0$, то $t_1 \le 0$, а этого быть не должно.

14.1. Найдите все значения параметра $\boldsymbol{a}$, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (ay + ax + 4)(y + x + 3a) = 0, \\ |xy| = a \end{cases}$$

имеет ровно восемь различных решений. ([5]).

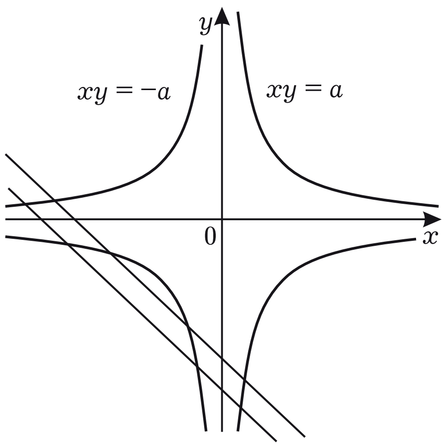
Решение. Если $a = 0$, получается система, имеющая только одно решение:

$$\begin{cases} 4(y+x) = 0, \\ xy = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0.$$

Следовательно, $a > 0$.

На координатной плоскости второе уравнение представляет собой две гиперболы: $y = \pm\frac{a}{x}$, а первое уравнение – пару параллельных прямых: $y = -x - \frac{4}{a}$ и $y = -x - 3a$.

Так как $a > 0$, эти параллельные прямые пересекают оси координат в точках с отрицательными значениями соответствующих координат. На рисунке представлена ситуация, когда исходная система имеет ровно 8 различных решений. Нам осталось найти, при каких значениях параметра $\boldsymbol{a}$ реализуется такая ситуация.



Во-первых, прямые не должны совпадать, иначе различных решений будет не больше четырёх: $-x-\frac{4}{a}\neq -x-3a \Rightarrow a^2\neq\frac{4}{3} \Rightarrow a\neq\frac{2}{\sqrt{3}}$.

В этом случае гипербола $y=-\frac{a}{x}$ пересекает каждую из прямых в двух различных точках. Что даёт четыре различных решения исходной системы. Чтобы обе прямые также пересекали и гиперболу $y=\frac{a}{x}$, каждое из двух следующих уравнений должно иметь по два различных корня: $\frac{a}{x}=-x-\frac{4}{a}$ и $\frac{a}{x}=-x-3a$. Эти уравнения сводятся к квадратным: $x^2+3ax+a=0$ и $x^2+\frac{4}{a}x+a=0$. Дискриминанты обоих уравнений должны быть положительными:

$$\begin{cases}9a^2-4a>0,\\ \frac{16}{a^2}-4a>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a(9a-4)>0,\\ a^3<4\end{cases} \Rightarrow$$

$\frac{4}{9}<a<\sqrt[3]{4}$.

С учётом того, что $a\neq\frac{2}{\sqrt{3}}$, получаем **ответ**: $\left(\frac{4}{9};\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$; $\left(\frac{2}{\sqrt{3}};\sqrt[3]{4}\right)$.

Комментарий. Задача **14.1** взята из уважаемого мною пособия [5]. В известных вариантах летнего ЕГЭ – 2018 таких задач (с гиперболами) не было, и спрашивали на экзамене только о четырёх различных решениях. Но наверняка подобные задачи претендовали на включение в экзаменационные варианты, поэтому знакомство с ними интересно и полезно. Кстати, заменив в условии второе уравнение системы $|xy|=a$ на уравнение $xy=a$ и вопрос о восьми решениях на привычный вопрос о четырёх решениях, мы уже не отличим эту задачу от тех, что были в вариантах 01.06.2018. Кстати, в нашем решении и в полученном ответе ничего менять не придётся.

Рассмотрим ещё две вариации на тему задачи **14.1**:

14.2. Найдите все значения параметра ***a***, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(ay+ax+4)(y+x+3a)=0,\\ |xy|=a\end{cases}$$

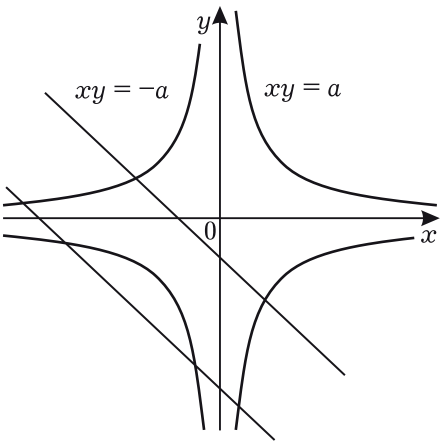
имеет ровно шесть различных решений.

Указание. Следующий рисунок иллюстрирует ситуацию, когда исходная система имеет ровно 6 различных решений.

Различия с предыдущим решениям начинаются с того момента, как получены два квадратных уравнения: $x^2+3ax+a=0$ и $x^2+\frac{4}{a}x+a=0$. Чтобы у исходной системы было ровно шесть различных решений, одно из этих уравнений должно иметь ровно два различных корня, а другое не иметь корней, поэтому дискриминанты этих уравнений должны быть противоположных знаков. Технически это лучше всего реализовать так:

$$\left(9a^2-4a\right)\left(\frac{16}{a^2}-4a\right)<0 \Rightarrow$$

$$a(9a-4)\left(a^3-4\right)>0 \Rightarrow \left(0;\frac{4}{9}\right);\ \left(\sqrt[3]{4};\infty\right).$$



То, что $a \neq \frac{2}{\sqrt{3}}$ никак не влияет на окончательный ответ, так как $\frac{4}{9}<\frac{2}{\sqrt{3}}<\sqrt[3]{4}$.

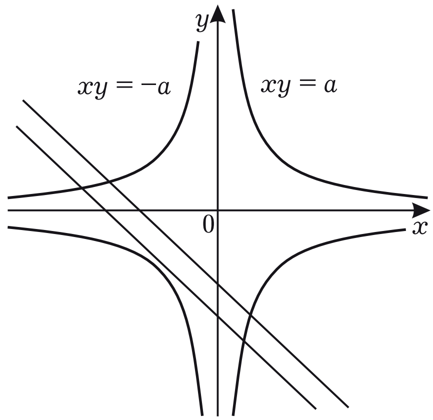
Ответ: $\left(0;\frac{4}{9}\right)$; $\left(\sqrt[3]{4};\infty\right)$.

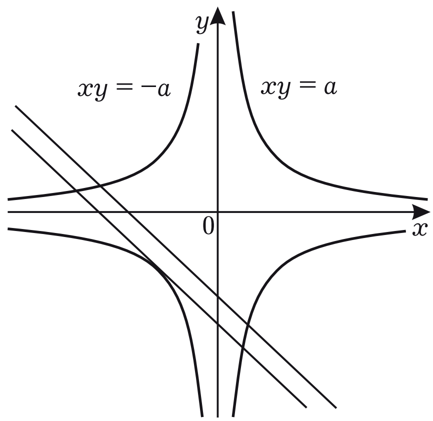
14.3. Найдите все значения параметра $\boldsymbol{a}$, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(ay+ax+4)(y+x+3a)=0,\\ |xy|=a\end{cases}$$

имеет хотя бы одно, но не более шести различных решений.

Указание. Следующие два рисунка иллюстрируют случаи, когда исходная система имеет ровно 4 и ровно 5 различных решений.





Из решения задачи **14.1** мы знаем, что при $a=0$ система имеет единственное решение $x=y=0$. Если же $a=\frac{2}{\sqrt{3}}$, то прямые совпадают и система имеет 4 различных решения. Исследовав при $a>0$ количество корней уравнений $x^2+\frac{4}{a}x+a=0$ и $x^2+3ax+a=0$, представим результаты в виде таблицы:

Значения параметра a	$\left(0;\frac{4}{9}\right)$	$\frac{4}{9}$	$\left(\frac{4}{9};\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\left(\frac{2}{\sqrt{3}};\sqrt[3]{4}\right)$	$\sqrt[3]{4}$	$\left(\sqrt[3]{4};\infty\right)$
$x^2+\frac{4}{a}x+a=0$	2	2	2	2	2	1	0
$x^2+3ax+a=0$	0	1	2	совпадают	2	2	2
Всего решений	6	7	8	4	8	7	6

Это облегчает нам получение надёжного ответа на вопрос задачи **14.3**.

Ответ: $\left[0;\frac{4}{9}\right)$; $\left\{\frac{2}{\sqrt{3}}\right\}$; $\left(\sqrt[3]{4};\infty\right)$.

И вот мы добрались до задач ЕГЭ – 2019.

Сначала посмотрим их «прототипы»:

15. Решите уравнение

$$\frac{22-4x}{(x-1)(x-3)}+3=\frac{5}{x-3}$$

(Биофак МГУ, 1985).

Это самое обычное школьное уравнение. Как вы думаете, сколько корней оно имеет? Очевидно, что не больше двух. Но может быть и один, а может и вообще не иметь корней.

Если привести все слагаемые к общему знаменателю, получим равносильное уравнение

$$\frac{3\left(x^2-7x+12\right)}{(x-1)(x-3)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-7x+12=0, \\ x-1\neq 0, \\ x-3\neq 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow\ x=4.$

Второй корень квадратного уравнения $x_2=3$ не подходит.

Можно действовать иначе, преобразовав уравнение так:

$$\frac{5}{x-3}-\frac{22-4x}{(x-1)(x-3)}=3 \Leftrightarrow$$

$$\frac{9(x-3)}{(x-1)(x-3)}=3 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{x-1}=3, \\ x\neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$x=4$. Иногда такой подход упрощает решение.

Ответ: $x=4$.

Усложняем ситуацию, понемногу приближаясь к тому, что встретилось 29.05.2019:

16. Решите уравнение

$$1+\frac{5a-3}{x-a}=\frac{5(2a+1)(1-a)}{(x-a)(x-3a+1)}.\ ([6]).$$

Преобразуем уравнение к виду:

$$\frac{x^2-x(2-a)-2a^2+8a-8}{(x-a)(x-3a+1)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2-x(2-a)-2a^2+8a-8=0, \\ x\neq a, \\ x\neq 3a-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = a-2, x_2 = 4-2a, \\ x \neq a, \\ x \neq 3a-1. \end{cases}$$

Теперь корни надо проверить, то есть найти, при каких значениях параметра определён каждый из них:

$$\begin{cases} x_1 = a-2 \neq a, \\ x_1 = a-2 \neq 3a-1 \end{cases} \Rightarrow a \neq -\frac{1}{2};$$

$$\begin{cases} x_2 = 4-2a \neq a, \\ x_2 = 4-2a \neq 3a-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \neq \frac{4}{3}, \\ a \neq 1. \end{cases}$$

Если $a = -\frac{1}{2}$, то $x_2 = 4-2a = 5$; если $a = \frac{4}{3}$, то $x_1 = a-2 = -\frac{2}{3}$; если $a = 1$, то $x_1 = a-2 = -1$.

Не забудем про случай, когда корни равны между собой, то есть, когда $a-2 = 4-2a \Rightarrow a = 2$. Тогда $x_1 = x_2 = 0$.

При остальных значениях параметра уравнение имеет два различных корня.

Ответ: $x = 5$ при $a = -0{,}5$; $x = -\frac{2}{3}$ при $a = \frac{4}{3}$; $x = -1$ при $a = 1$; $x = 0$ при $a = 2$; $x = a-2$, $x = 4-2a$ при $a \neq -0{,}5$, $a \neq \frac{4}{3}$, $a \neq 1$, $a \neq 2$.

А вот это уже было на экзамене:

17. Найдите все значения параметра $\boldsymbol{a}$, при которых уравнение

$$\frac{x^2-6x+a^2-4a}{x^2-a^2} = 0$$

имеет ровно два различных корня. (Уральский регион).

$$\frac{x^2-6x+a^2-4a}{x^2-a^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2-6x+a^2-4a = 0, \\ x \neq \pm a. \end{cases}$$

Чтобы исходное уравнение имело ровно два различных корня, необходимо, чтобы дискриминант уравнения $x^2-6x+a^2-4a = 0$ был строго положителен. Это выполняется при всех значениях параметра $\boldsymbol{a}$ из промежутка $\left(-2-\sqrt{13}; -2+\sqrt{13}\right)$.

Ещё надо исключить те случаи, когда один из корней числителя равен a, или $-a$.

Если $x = a$ является корнем уравнения $x^2-6x+a^2-4a = 0$, то $a^2-6a+a^2-4a = 0 \Leftrightarrow a(a-5) = 0$, откуда $a = 0$ или $a = 5$.

Если $x = -a$ является корнем уравнения $x^2-6x+a^2-4a = 0$, то $a^2+6a+a^2-4a = 0 \Leftrightarrow a(a+1) = 0$, откуда $a = 0$ или $a = -1$.

Исключая эти значения параметра $\boldsymbol{a}$ из промежутка $\left(-2-\sqrt{13}; -2+\sqrt{13}\right)$, получаем **ответ**: $\left(-2-\sqrt{13}; -1\right)$; $(-1; 0)$; $(0; 5)$; $\left(5; -2+\sqrt{13}\right)$.

А вот, что было в Москве:

18. Найдите все значения параметра $\boldsymbol{a}$, при которых уравнение

$$\frac{|4x|-x-3-a}{x^2-x-a} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Приведём решение ныне первокурсника МФТИ Павла Галманова:

№18. $$\frac{|4x|-x-3-a}{x^2-x-a} = 0.$$

Дробь равна нулю, когда числитель дроби равен нулю, а знаменатель отличен от нуля.

Рассмотрим два случая:

1) $x \geq 0$: $\quad \dfrac{4x-x-3-a}{x^2-x-a}=0. \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}3x-3-a=0\\ x^2-x-a\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{a+3}{3}\geq 0\\ \left(\dfrac{a+3}{3}\right)^2-\left(\dfrac{a+3}{3}\right)-a\neq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a\geq -3\\ a^2-6a\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow a\in[-3;0);\ (0;6);$$

$(6;+\infty)$.

2) $x<0$: $\quad \dfrac{-4x-x-3-a}{x^2-x-a}=0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}-5x-3-a=0\\ x^2-x-a\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{a+3}{5}<0\\ \left(-\dfrac{a+3}{5}\right)^2+\dfrac{a+3}{5}-a\neq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a>-3\\ a^2-14a+24\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}a>-3\\ (a-2)(a-12)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow a\in(-3;2);$$

$(2;12)$; $(12;+\infty)$.

Найденные корни различны, так как они разных знаков. Так как корень $x\geq 0$ существует при всех значениях параметра из множества $[-3;0)$; $(0;6)$; $(6;+\infty)$, а корень $x<0$ существует при всех значениях параметра из множества $(-3;2)$; $(2;12)$; $(12;+\infty)$, получается, что они оба существуют при $a\in(-3;0)$; $(0;2)$; $(2;6)$; $(6;12)$; $(12;+\infty)$.

Ответ: $(-3;0)$; $(0;2)$; $(2;6)$; $(6;12)$; $(12;+\infty)$.

Разобранные здесь задачи с параметрами летних экзаменов объединяет то, что они представляют собой усложнённые версии привычных школьных уравнений. По-видимому, это и есть основное направление, главная линия (***mainstream***). А вот, что иногда встречается в тренировочных работах (почувствуйте разницу):

19. Найдите все целые отрицательные значения параметра $\boldsymbol{a}$, при каждом из которых существует такое действительное число $b>a$, что неравенство

$$20b\geq 6|2a+b|+2|b-2|-|2a-b|-5\left|4a^2-b+2\right|$$

не выполнено.

Чтобы начать решать задачу, надо бы понять, что нам дано и к чему нам стремиться. Но здесь условие такое непривычно запутанное, что его содержание и смысл вопроса ускользают, и даже после нескольких прочтений не закрепляются в нашей памяти. Начнём разбираться.

В книге [1] и в статье [7] можно найти несколько уравнений и неравенств, внешне напоминающих то, что сейчас перед нами. Действуя, как в тех задачах, рассмотрим функцию $F(b)=20b-6|2a+b|-2|b-2|+$ $+|2a-b|+5\left|4a^2-b+2\right|$. Её график – ломаная линия, конкретный вид которой зависит от параметра a. Обратим внимание на то, что при любом раскрытии модулей коэффициент при переменной b будет положительным, следовательно, функция $F(b)$ монотонно возрастает. Всё это уже не раз встречалось, но как использовать в нашей задаче прежний опыт?

Условие $20b\geq 6|2a+b|+2|b-2|-$ $-|2a-b|-5\left|4a^2-b+2\right|$ равносильно условию $F(b)\geq 0$, которое не должно выполниться хотя бы для одного значения $b > a$, где a – какое-то целое отрицательное число.

Так как функция $F(b)$ монотонно возрастает, для всех $b > a$ выполняется $F(b) > F(a)$, поэтому, чтобы условие $F(b) \geq 0$ не выполнилось при $b > a$, по крайней мере необходимо, чтобы $F(a) < 0$. Поэтому для начала решим неравенство $F(a) =$

$$= 20a - 6|3a| - 2|a-2| + |a| + 5\left|4a^2 - a + 2\right| < 0,$$

а потом будем думать дальше. Раскрываем модули, учитывая, что $a < 0$. Получаем неравенство

$$20a^2 + 34a + 6 < 0 \Leftrightarrow$$

$$20\left(a + \frac{3}{2}\right)\left(a + \frac{1}{5}\right) < 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < a < -\frac{1}{5}.$$

Единственное целое число в этом промежутке, это $a = -1$. При этом значении параметра a получаем $F(b) = 20b - 8|b-2| + |b+2| + 5|b-6|$.

Теперь нам достаточно указать хотя бы одно значение $b > -1$, при котором $F(b) < 0$. Но ведь не очень сложно и просто решить это неравенство. Его решение $b < -\frac{2}{3}$, а так как нас интересуют только $b > -1$, получаем целый интервал решений:

$$-1 < b < -\frac{2}{3}.$$

Ответ: $a = -1$.

Литература

1. Лупашевская В.Ю., Пукас Ю.О. Задачи с параметрами для ЕГЭ по математике. Книжка с картинками.– М.: «Азбука-2000», 2016. – 92с.

2. Пукас Ю.О. От простого к сложному. Иррациональные уравнения с параметром на ЕГЭ – 2016 // Математика в школе.– 2016. – №9-10. – С.14 – 20.

3. Пукас Ю.О. Путь к успеху на ЕГЭ – 2016 // Потенциал МФИ.– 2017. – №4. – С.18 – 27.

4. Пукас Ю.О. Вспоминая ЕГЭ по математике. Параметры// Потенциал МФИ.– 2017. – №12. – С.17 – 27.

5. ЕГЭ-2019. Математика: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов/авт.-сост. И.Р. Высоцкий, И.В.Ященко; под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Национальное образование», 2019. – 256 с. – (ЕГЭ. ФКР – школе).

6. Галицкий М.Л., Гольдман А.М., Звавич Л.И. Сборник задач по алгебре. Учебное пособие для 8 – 9 классов с углублённым изучением математики.

7. Лупашевская В.Ю., Пукас Ю.О. Сумма модулей. // Математика в школе.– 2017. – №1. – С.9 – 15.