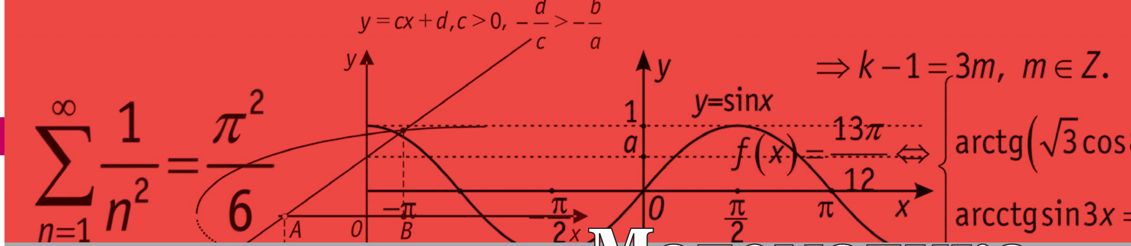

Орлянский Олег Юрьевич
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической физики Днепропетровского национального универститета им. О. Гончара.

Гиперболические синус и косинус в алгебре

В статье приводятся примеры преобразования радикалов с помощью гиперболических синуса и косинуса.

I. В основе предлагаемого метода лежат две идеи.

Первая идея связана со следующим свойством показательной функции:

$$\left(f(x)\right)^n = f(nx). \qquad (1)$$

Вторая идея заключается в представлении функции в виде суммы чётной и нечётной частей:

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}. \qquad (2)$$

В качестве основания показательной функции возьмём число e (для наших целей подошло бы и любое другое, например, 2 или 10). Формула (2) принимает вид:

$$e^x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} + \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \\ = \mathrm{ch}x + \mathrm{sh}x, \qquad (3)$$

где $\mathrm{ch}x = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ – чётная часть функции e^x, которая носит название гиперболического косинуса, а $\mathrm{sh}x = \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ – нечётная часть, называемая гиперболическим синусом. Заметим, что в числителе $\mathrm{ch}x$ стоит сумма двух положительных взаимно обратных величин – поэтому $\mathrm{ch}x \ge 1$ при любых значениях x. В отличие от $\mathrm{ch}x$ функция $\mathrm{sh}x$ принимает все значения из промежутка $(-\infty; +\infty)$. Названия функций $\mathrm{ch}x$ и $\mathrm{sh}x$ совершенно оправданы. Не вдаваясь в причины их родства с тригонометрическими косинусом и синусом, приведём аналог основного тригонометрического тождества для гиперболических функций, в справедливости которого легко убедиться непосредственной подстановкой:

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1. \qquad (4)$$

Отсюда, в частности, следует, что точки с координатами $y = \mathrm{ch}x$, $z = \mathrm{sh}x$ лежат на ветви гиперболы $y^2 - z^2 = 1$.

Формула (1) для функции e^x имеет вид $e^{nx} = \left(e^x\right)^n$. Запишем экспоненты через гиперболические косинусы и синусы:

$$e^{nx} = \mathrm{ch}nx + \mathrm{sh}nx = \left(e^x\right)^n =$$
$$= \left(\mathrm{ch}x + \mathrm{sh}x\right)^n. \qquad (5)$$

Видно, что это аналог формулы Муавра. Заметим, что

$$\mathrm{ch}nx - \mathrm{sh}nx = \mathrm{ch}\left(-nx\right) + \mathrm{sh}\left(-nx\right) =$$
$$= \left(\mathrm{ch}\left(-x\right) + \mathrm{sh}\left(-x\right)\right)^n = \left(\mathrm{ch}x - \mathrm{sh}x\right)^n.$$

Теперь можно найти связь между $\mathrm{ch}nx$ и $\mathrm{ch}x$, $\mathrm{sh}nx$ и $\mathrm{sh}x$.

$$\begin{cases} \mathrm{ch}nx + \mathrm{sh}nx = \left(\mathrm{ch}x + \mathrm{sh}x\right)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \left(\mathrm{sh}x\right)^k \left(\mathrm{ch}x\right)^{n-k}, \\ \mathrm{ch}nx - \mathrm{sh}nx = \left(\mathrm{ch}x - \mathrm{sh}x\right)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \left(-1\right)^k \left(\mathrm{sh}x\right)^k \left(\mathrm{ch}x\right)^{n-k}, \Leftrightarrow \\ \mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{ch}nx = \dfrac{\left(\mathrm{ch}x + \mathrm{sh}x\right)^n + \left(\mathrm{ch}x - \mathrm{sh}x\right)^n}{2}, \\ \mathrm{sh}nx = \dfrac{\left(\mathrm{ch}x + \mathrm{sh}x\right)^n - \left(\mathrm{ch}x - \mathrm{sh}x\right)^n}{2}, \\ \mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1. \end{cases}$$

Например,

$$\mathrm{ch}nx = \sum_{m=0}^{[n/2]} C_n^{2m} \left(\mathrm{sh}x\right)^{2m} \left(\mathrm{ch}x\right)^{n-2m} =$$
$$= \sum_{m=0}^{[n/2]} C_n^{2m} \left(\mathrm{ch}^2 x - 1\right)^m \left(\mathrm{ch}x\right)^{n-2m}. \qquad (6)$$

Заметили связь с формулой для $\cos nx$? Аналогичную связь можно получить и между $\mathrm{sh}nx$ и $\mathrm{sh}x$.

Пример 1. Упростите выражение

$$\left(2,5\sqrt{5} + 5,5\right)^{-0,8}.$$

► Разделим и умножим выражение в скобках на корень из разности квадратов: $\sqrt{\left(2,5\sqrt{5}\right)^2 - \left(5,5\right)^2} = 1$. Так как

$$\left(2,5\sqrt{5}+5,5\right)^{-0,8}=\left(2,5\sqrt{5}-5,5\right)^{\frac{4}{5}},$$

то положим

$\mathrm{ch}\alpha=2,5\sqrt{5},\ \ \mathrm{sh}\alpha=-5,5.$

Тогда $\left(2,5\sqrt{5}+5,5\right)^{-0,8}=\left(2,5\sqrt{5}-5,5\right)^{\frac{4}{5}}=$

$$=\left(\mathrm{ch}\alpha+\mathrm{sh}\alpha\right)^{\frac{4}{5}}=\left(e^{\alpha}\right)^{0,8}=e^{0,8\alpha}=$$

$$=\mathrm{ch}\left(0,8\alpha\right)+\mathrm{sh}\left(0,8\alpha\right),$$

$$\mathrm{sh}\left(0,8\alpha\right)=-\sqrt{\mathrm{ch}^2 0,8\alpha-1}.$$

Возведём обе части в пятую степень, чтобы перейти к целым показателям степеней:

$$\left(\mathrm{ch}\alpha+\mathrm{sh}\alpha\right)^4=\left(2,5\sqrt{5}-5,5\right)^4=$$

$$=\left(\mathrm{ch}\left(0,8\alpha\right)+\mathrm{sh}\left(0,8\alpha\right)\right)^5.$$

Симметризуем уравнение:

$$\frac{\left(\mathrm{ch}\alpha+\mathrm{sh}\alpha\right)^4+\left(\mathrm{ch}\alpha-\mathrm{sh}\alpha\right)^4}{2}=\frac{\left(\mathrm{ch}\left(0,8\alpha\right)+\mathrm{sh}\left(0,8\alpha\right)\right)^5+\left(\mathrm{ch}\left(0,8\alpha\right)-\mathrm{sh}\left(0,8\alpha\right)\right)^5}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{ch}^4\alpha+6\mathrm{ch}^2\alpha\mathrm{sh}^2\alpha+\mathrm{sh}^4\alpha=\mathrm{ch}^5\left(0,8\alpha\right)+10\mathrm{ch}^3\left(0,8\alpha\right)\mathrm{sh}^2\left(0,8\alpha\right)+5\mathrm{ch}\left(0,8\alpha\right)\mathrm{sh}^4\left(0,8\alpha\right).$$

Подставим $\mathrm{ch}\alpha=2,5\sqrt{5},\ \ \mathrm{sh}\alpha=-5,5$ и сделаем замену $y=\mathrm{ch}\left(0,8\alpha\right)$:

$$\left(\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)^4+6\left(\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)^2\left(\frac{11}{2}\right)^2+\left(\frac{11}{2}\right)^4=$$

$$=y^5+10y^3\left(y^2-1\right)+5y\left(y^2-1\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{15127}{2}=y^5+10y^3(y^2-1)+5y(y^2-1)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 32y^5-40y^3+10y=15127.$$

Получили уравнение с целочисленными коэффициентами относительно $z=2y$:

$$z^5-5z^3+5z-15127=0.$$

Уравнение имеет единственный положительный корень. Наименьший отличный от единицы делитель 15127 – число 7, которое и является корнем уравнения. Тогда $z=7=2y$,

$$y=\mathrm{ch}\left(0,8\alpha\right)=7/2>1,$$

$$\mathrm{sh}\left(0,8\alpha\right)=-\sqrt{\mathrm{ch}^2\left(0,8\alpha\right)-1}=-3\sqrt{5}/2$$

и $\left(2,5\sqrt{5}+5,5\right)^{-0,8}=\left(2,5\sqrt{5}-5,5\right)^{\frac{4}{5}}=$

$$=\left(\mathrm{ch}0,8\alpha+\mathrm{sh}0,8\alpha\right)=3,5-1,5\sqrt{5}.$$

Ответ. $3,5-1,5\sqrt{5}$ ◀

II. Рассмотрим теперь выражение $\sqrt[n]{a+b}$, причём $a>0$, $a^2-b^2>0$.

Проведём преобразования, подобные тем, которые проводят в тригонометрии при введении вспомогательного угла. Умножим и разделим подкоренное выражение на $\sqrt{a^2-b^2}$. Поскольку

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2-\left(\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2\equiv 1,$$

можно положить, что

$$\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}=\mathrm{ch}\alpha,\quad \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}=\mathrm{sh}\alpha.$$

Тогда

$$\sqrt[n]{a+b} =$$
$$= \sqrt[2n]{a^2-b^2}\sqrt[n]{\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}} =$$
$$= \sqrt[2n]{a^2-b^2}\sqrt[n]{\operatorname{ch}\alpha+\operatorname{sh}\alpha} =$$
$$= \sqrt[2n]{a^2-b^2}\sqrt[n]{e^{\alpha}} =$$
$$= \sqrt[2n]{a^2-b^2}e^{\alpha/n} =$$
$$= \sqrt[2n]{a^2-b^2}\left(\operatorname{ch}\frac{\alpha}{n}+\operatorname{sh}\frac{\alpha}{n}\right),$$

то есть

$$\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[2n]{a^2-b^2}\left(\operatorname{ch}\frac{\alpha}{n}+\operatorname{sh}\frac{\alpha}{n}\right). \quad (7)$$

Задача будет решена, если мы выразим $\operatorname{ch}\frac{\alpha}{n}$ через известное значение $\operatorname{ch}\alpha$, а затем найдём и $\operatorname{sh}\frac{\alpha}{n} = \pm\sqrt{\operatorname{ch}\frac{\alpha^2}{n}-1}$, где берётся $+$, если $b>0$, и берётся $-$, если $b<0$. Для этого можно воспользоваться тождеством (6).

Именно $\operatorname{ch}\frac{\alpha}{n}$ удобно взять в качестве искомой величины, потому что про него известно, что $\operatorname{ch}\frac{\alpha}{n} \ge 1$.

Обозначив $\operatorname{ch}\frac{\alpha}{n} = y$, получаем, используя (6), относительно y алгебраическое уравнение степени n:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} = \sum_{m=0}^{[n/2]} C_n^{2m}\left(y^2-1\right)^m y^{n-2m}, \quad (8)$$

или

$$\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\left(y\pm\sqrt{y^2-1}\right)^n+\left(y\mp\sqrt{y^2-1}\right)^n\right), \quad (9)$$

в котором необходимо найти $y \ge 1$.

Таким образом, найдя корень уравнения (8) или (9), находим $\operatorname{ch}\frac{\alpha}{n}$, затем $\operatorname{sh}\frac{\alpha}{n}$. Так мы решим поставленную задачу:

$$\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[2n]{a^2-b^2}\left(y\pm\sqrt{y^2-1}\right), \quad (10)$$

где берётся $+$, если $b>0$, и берётся $-$, если $b<0$. Заметим, что

$$y = \frac{1}{2}\left(\sqrt[2n]{\frac{a+b}{a-b}}+\sqrt[2n]{\frac{a-b}{a+b}}\right) \ge 1 \quad (11)$$

обращает уравнение (10) в тождество при любом n и является единственным действительным корнем уравнения (8) или (9). Но, как видите, никаких упрощений не видно, т. к. вычислить y по формуле (11) не проще, чем найти значение заданного выражения.

На самом деле, совершенно неизвестно, всегда ли мы сможем найти решение уравнения (8), (9) или (10) и насколько при этом упростится заданное выражение.

III. Посмотрим, что получится, когда $n=2$. Из уравнения (9) тут же находим:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} = 2y^2-1.$$

Выразим

$$y=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)}$$

и подставим в формулу (9).

Получаем знакомую формулу:

$$\sqrt{a+b}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{2}}.\quad(12)$$

(Заметим, что можно поступить и так:

$$\sqrt{a+b}\equiv\sqrt{\frac{\left(a+\sqrt{a^2-b^2}\right)+\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right)+2b\operatorname{sgn}(b)\sqrt{\left(a+\sqrt{a^2-b^2}\right)\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right)}}{2}}\equiv$$

$$\equiv\sqrt{\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{2}}\right)^2}\equiv\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2}}+\operatorname{sgn}(b)\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{2}},$$

примечание редакции.)

Пример 2. Представьте $\sqrt{2\sqrt{5}-4}$ в виде разности двух радикалов.

Ответ. $\sqrt{\sqrt{5}+1}-\sqrt{\sqrt{5}-1}$.

Пример 3. Представьте выражение $\sqrt{8+\sqrt{7}+2\sqrt{2}+2\sqrt{14}}$ в виде суммы.

Ответ. $2+\sqrt{4+\sqrt{7}}$.

IV. В случае $n=3$ получаем кубическое уравнение

$$4y^3-3y-\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}=0.\quad(13)$$

К сожалению, из формул Кардано тоже следует, что единственный вещественный корень имеет тот же вид (11) и обращает соотношение (10) в тождество:

$$y=\frac{1}{2}\left(\sqrt[6]{\frac{a+b}{a-b}}+\sqrt[6]{\frac{a-b}{a+b}}\right).\quad(14)$$

При решении кубического уравнения при конкретных *числовых* значениях a и b, когда корень вычисляется не по формуле, а «по догадке», могут получиться «приличные» выражения для y.

Пример 4. Упростите выражение

$$\sqrt[3]{9\sqrt{3}+11\sqrt{2}}.$$

Первый способ.

►Преобразуем подкоренное выражение, пытаясь свернуть его в полный «куб»:

$$\sqrt[3]{9\sqrt{3}+11\sqrt{2}}=$$

$$=\sqrt[3]{3\sqrt{3}+3\cdot3\sqrt{2}+3\cdot\sqrt{3}\cdot2+2\sqrt{2}}=$$

$$=\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^3}=\sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

Ответ. $\sqrt{3}+\sqrt{2}$. ◄

Второй способ.

►Допустим, что подкоренное выражение представимо в виде полного «куба»:

$$9\sqrt{3}+11\sqrt{2}=\left(a\sqrt{3}+b\sqrt{2}\right)^3=$$

$$=3\sqrt{3}a^3+9a^2b\sqrt{2}+6b^2a\sqrt{3}+2b^3\sqrt{2},$$

где a, b – рациональные числа. Тогда

$$\begin{cases} a^3+2b^2a=3, \\ 9a^2b+2b^3=11 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a^3+2b^2a}{9a^2b+2b^3}=\dfrac{3}{11} \Leftrightarrow \dfrac{a}{b}=1, \\ a^3+2b^2a=3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow a=b=1.$

Ответ. $\sqrt{3}+\sqrt{2}$. ◄

Третий способ.

►Теперь воспользуемся изложенной в пункте II теорией. В данном примере $a=9\sqrt{3}$, $b=11\sqrt{2}$. Из (8) находим, что $4y^3-3y-9\sqrt{3}=0$. После замены $y=\sqrt{3}z$ получаем уравнение $4z^3-z-3=0$, действительный корень которого $z=1 \Leftrightarrow y=\sqrt{3}$ и $\sqrt[3]{9\sqrt{3}+11\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{3-1}=\sqrt{3}+\sqrt{2}.$

Ответ. $\sqrt{3}+\sqrt{2}$. ◄

Пример 5. Упростите выражение

$$\sqrt{2-\sqrt{7}/2}-\sqrt{2+\sqrt{7}/2}.$$

Ответ. -1.

Пример 6. Упростите выражение

$$\sqrt[6]{13-15\sin 60^\circ}.$$

Ответ. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt[3]{4}}$.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Итог прогресса

Техника достигнет скоро такого совершенства, что человек сможет обойтись без самого себя.

Ежи Лец

Если бы

Если бы тени предметов зависели не от величины сих последних, а имели бы свой произвольный рост, то, может быть, вскоре не осталось бы на всём земном шаре ни единого светлого места.

Козьма Прутков

Роль математики

Математика – это единственный совершенный метод водить самого себя за нос.

А. Эйнштейн

Строгий приговор

Из толстых книг нельзя узнать ничего нового. Толстые книги – это кладбище, где погребены идеи прошлого.

Л. Ландау