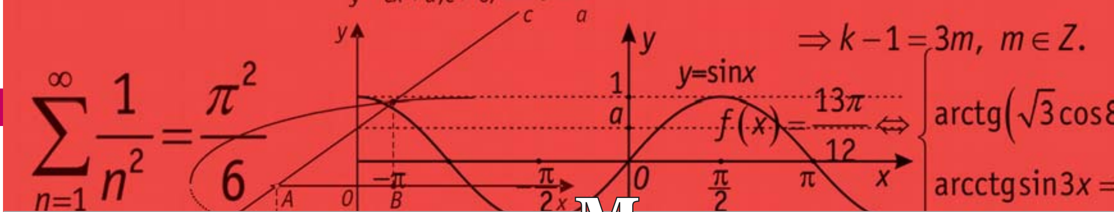

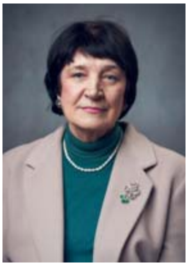

Пиголкина Татьяна Сергеевна
Выпускница МФТИ. Доцент, заслуженный работник высшей школы, заслуженный преподаватель МФТИ.

Геометрия в ЕГЭ. Задачи на доказательство

За последние два года существенно изменились задачи по геометрии на ЕГЭ. Задача теперь состоит из двух частей. В первой требуется доказать некоторое утверждение для заданной геометрической фигуры. Во второй – при конкретных числовых данных требуется решить геометрическую задачу, вычислить определённые характеристики такой фигуры. Именно первая часть задания, особенно оформление доказательных рассуждений, вызывает наибольшие трудности экзаменующихся. Здесь требуется не только хорошее знание теории, но и умение делать выводы из заданных условий, и умение работать с чертежом (рисунком) так, чтобы он помогал увидеть план доказательства, т.е. нужен определённый опыт построения доказательств. Отметим также, что вторая – вычислительная – часть задачи, становится после доказательств, как правило, короткой и ясной.

Приведём примеры подобных задач из вариантов 2016 г. ЕГЭ (профильный уровень), а также материалов ФИПИ и КИМов.

Задача 1. Две окружности разных радиусов пересекаются в точках B и D, при этом их центры лежат по разные стороны от прямой BD. Точка A лежит на меньшей окружности, прямая AB касается большей окружности; точка C лежит на большей окружности, прямая CB касается меньшей окружности. Прямая AD пересекает большую окружность в точке E.

1. Доказать, что площади треугольников ABC и ABE равны.

2. Прямые BD и AC пересекаются в точке K. Найти отношение $AK : KC$, если $AB = 5$ и $BC = 7$.

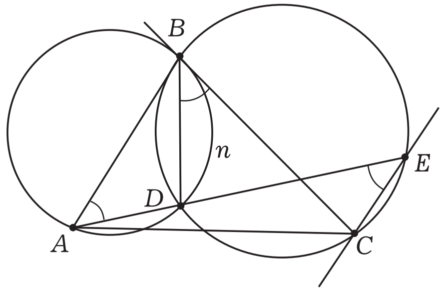

Рис. 1

Решение. 1. Треугольники ABC и ABE имеют общую сторону AB, они имеют равные площади, если их высоты к стороне AB равны. Высоты будут равны, если прямая CE параллельна прямой AB. Докажем, что это действительно так (рис. 1).

Угол AEC равен углу DEC. Действительно, вписанный угол DEC опирается на дугу DC, на ту же дугу опирается вписанный угол DBC. Вспомним, что BC – касательная к меньшей окружности, угол DBC – это угол между касательной BC и хордой BD, он измеряется половиной дуги BnD и равен вписанному углу BAD. Итак, установили, что $\angle BAE = \angle BAD = \angle DBC = \angle DEC = \angle AEC$. Доказано, что при пересечении прямых AB и CE прямой AE накрест лежащие углы равны, следовательно, прямые AB и CE – параллельные.

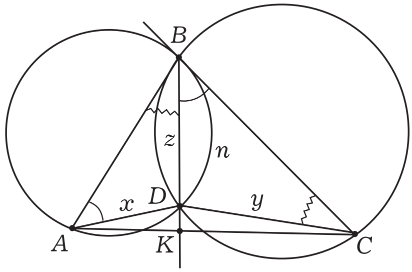

Рис. 2

2. При доказательстве в пункте 1 было установлено равенство углов BAD и CBD (рис. 2). У нас есть другая касательная – касательная BA к большей окружности. Угол ABD – угол между касательной BA и хордой BD этой окружности и равен вписанному углу BCD. По первому признаку подобия $\Delta ABD \backsim \Delta BCD$, из подобия следует (обозначения $AD = x$, $CD = y$, $BD = z$): $x/z = z/y = AB/BC$, откуда $x/z = 5/7$ и $z/y = 5/7$, тогда $x/y = x/z \cdot z/y = 25/49$. Теперь заметим, что в треугольниках ABD и CBD третьи углы BDA и BDC равны друг другу (следует из теоремы о сумме углов треугольника). Смежные им углы ADK и CDK также равны друг другу, следовательно, DK – биссектриса треугольника ADC. По теореме о биссектрисе треугольника $AK/KC = AD/CD$, т.е. $AK/KC = x/y = 25/49$.

Ответ. 25/49.

Задача 2. Окружность, вписанная в остроугольный треугольник ABC, касается сторон AB и BC в точках E и F (рис. 3).

1. Доказать, что центр окружности, вписанной в треугольник BEF, лежит на окружности, вписанной в треугольник ABC.

2. Найти расстояние между центрами этих окружностей, если $AB = BC$, $BE = 15$, $EF = 10$ и $S_{BEF} : S_{ABC} = 4:9$.

Решение. 1. Пусть O – центр окружности, вписанной в треугольник ABC, тогда BO – биссектриса угла ABC, $OE \perp AB$, $OF \perp BC$, и по свойству касательных $BE = BF$, т.е. треугольник BEF – равнобедренный, BK – его высота и медиана.

Пусть $\varphi = \frac{1}{2}\angle ABC$, M – точка пересечения биссектрисы BO и меньшей дуги EF и K – точка пересечения биссектрисы BO и отрезка EF. Очевидно, что $\angle BOF = 90^\circ - \varphi$ и $\angle OFK = \varphi$.

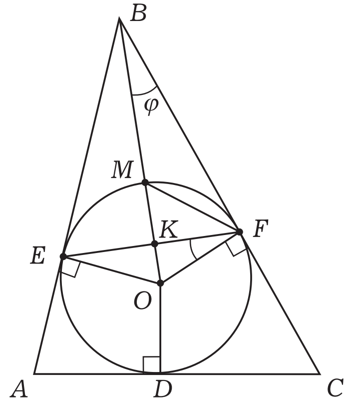

Рис. 3

Центр окружности, вписанной в треугольник BEF, – это точка пересечения биссектрисы BO и биссектрисы угла BFE. Если мы докажем, что биссектриса угла BFE пересекает окружность в точке M, то это и будет означать, что центр лежит на окружности, вписанной в треугольник ABC.

Рассмотрим треугольник MOF. Он равнобедренный ($OM = OF$), угол MOF равен углу BOF, т.е. $\angle MOF = 90^\circ - \varphi$, поэтому $\angle OFK = \varphi$ и

$$\angle OFM = \angle OMF = \frac{1}{2}\left(180^\circ - \left(90^\circ - \varphi\right)\right) =$$

$= 45^\circ + \frac{\varphi}{2}$. Тогда $\angle KFM = \angle OFM - \angle OFK =$ $= \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) - \varphi = 45^\circ - \frac{\varphi}{2}$. Сравним его с половиной угла BFE:

$$\angle BFE = \frac{1}{2}\left(180^\circ - 2\varphi\right) = 90^\circ - \varphi,$$

$\frac{1}{2}\angle BFE = 45^\circ - \frac{\varphi}{2} = \angle KFM$. Это означает, что FM – биссектриса угла BFE и точка M – центр окружности, вписанной в треугольник BEF.

2. Теперь по условию треугольник ABC равнобедренный, $AB = BC$, $EF \parallel AC$, биссектриса BD – медиана и высота (рис. 4).

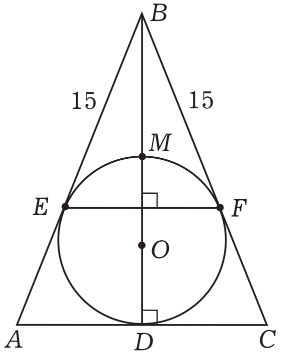

Рис. 4

Расстояние OM равно радиусу r вписанной в треугольник ABC окружности. Также известно, что $BF = 15$, $EF = 10$, $S_{BEF} : S_{ABC} = 4:9$.

$\triangle BEF \backsim \triangle BAC$, площади подобных треугольников относятся, как квадраты их сходственных сторон, значит, $\left(\frac{EF}{AC}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow AC = \frac{3}{2}EF = 15.$

По свойству касательных $AE = AD = DC = FC$, $AE = 7{,}5$ и $AB = BC = 22{,}5$.

Для треугольника ABC находим $p = 30$, $S = \sqrt{30 \cdot \frac{15}{2} \cdot \frac{15}{2} \cdot 15} = \frac{225}{\sqrt{2}}$ и искомое расстояние $OM = r = \frac{S}{p} = \frac{15\sqrt{2}}{4}$.

Можно упростить вычисления в пункте 2. Найти ρ, S и r_0 для треугольника

$$ABC\left(p = 20, S = 50\sqrt{2}, r_0 = \frac{5}{2}\sqrt{2}\right).$$

В подобных треугольниках все линейные элементы относятся как сходственные стороны, поэтому искомый радиус $r = \frac{3}{2}r_0 = \frac{15\sqrt{2}}{4}$.

Ответ. $\frac{15\sqrt{2}}{4}$.

Задача 3. Дан прямоугольный треугольник ABC. На катетах AC и BC, как на диаметрах, построены окружности, они пересекаются ещё в точке H. Точка D лежит на меньшей дуге BH, отрезок CD пересекает другую окружность в точке E.

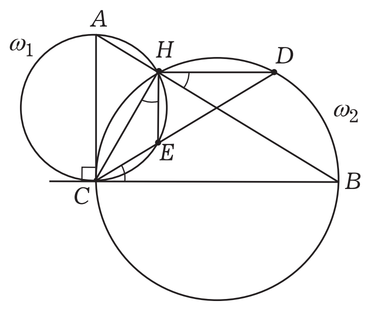

Рис. 5

1. Доказать, что $DH \perp HE$.

2. Найти длину отрезка DE, если $AH = 1$, $BH = 3$ и точка D – середина дуги BH.

Решение. 1. Пусть ω_1 – окружность с диаметром AC, а ω_2 – другая окружность (рис. 5). Угол CHA опирается на диаметр AC, он прямой, значит, CH – высота прямоугольного треугольника ABC. Окружность ω_1 касается прямой BC, поэтому угол DCE – это угол между её касательной BC и хордой CE, и он равен вписанному углу CHE. В окружности ω_2 угол BCD (он совпадает с углом BCE) опирается на дугу BD, на неё же опирается и угол BHD, поэтому $\angle BHD = \angle BCE = \angle CHE$. Отметим равные углы на рисунке. Видим, что

$$\angle DHE = \angle DHB + \angle BHE = \\ = \angle CHE + \angle BHE = \angle CHB = 90^\circ,$$

что и означает $DH \perp HE$.

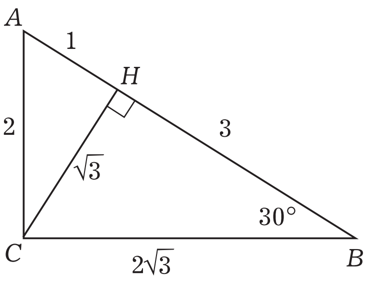

Рис. 6

2. По свойству высоты прямоугольного треугольника $CH = \sqrt{AH \cdot BH} = \sqrt{3}$, тогда $AC = 2$ и $BC = 2\sqrt{3}$. Из $AB = 2 \cdot AC$ следует $\angle CBA = 30^\circ$ и $\angle BCH = 60^\circ$. Точка D – середина дуги BH, поэтому $\angle DCH = \angle DCB = 30^\circ$ и углы DCH и CHE оказываются равны друг другу, $\angle CHE = 30^\circ$. Хорда CE окружности ω_1 находится по формуле $a = 2R\sin\alpha$: $CE = AC \cdot \sin 30^\circ = 1$. По той же формуле находится хорда CD окружности ω_2, на которую опирается угол CHD, равный 120°: $CD = BC \cdot \sin 120^\circ = 3$, тогда $DE = CD - CE = 2$.

Ответ. 2.

Задача 4. Дан прямоугольник $ABCD$. Окружность с центром в точке B радиуса BA пересекает прямую AB в точке E; прямая EC пересекает окружность в точке F, а продолжение стороны AD – в точке K.

1. Доказать, что $DK = DF$.

2. Найти длину отрезка KC, если $BF = 20$ и $DF = 21$.

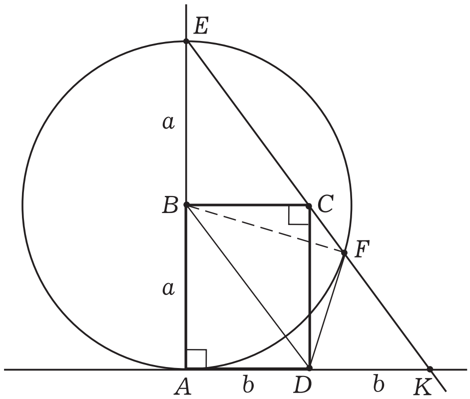

Рис. 7

Решение. 1. Пусть $AB = a$, $AD = b$ (рис. 7). Из $AB = BE$ и $BC \parallel AD$ следует, что BC – средняя линия треугольника AEK, поэтому $AK = 2 \cdot BC$ и $DK = b$.

Четырёхугольник $BCKD$ – параллелограмм, так как $BC = DK$ и $BC \parallel DK$. Другие две его стороны параллельны и равны: $BD \parallel CK$ и $BD = CK$.

Четырёхугольник $BCFD$ – трапеция $(BD \parallel CF)$, её диагональ CD равна a (т.к. $CD = AB$), другая её диагональ BF равна a как радиус окружности. Если в трапеции диагонали равны, то она равнобедренная. Докажем это.

Пусть $ABCD$ – трапеция, $DK \parallel AC$, точка K на прямой BC (рис. 8);

$AD \parallel CK$, $AD = CK \Rightarrow ACKD$ – параллелограмм, тогда $\angle 1 = \angle 2$.

Треугольник BDK – равнобедренный, $\angle 1 = \angle 3$, тогда из $BC \parallel AD$ следует $\angle 4 = \angle 3$. Итак, $\angle 2 = \angle 4$ и $\triangle ADB = \triangle DAC$ по двум сторонам и углу между ними. Из равенства треугольников следует $AB = CD$.

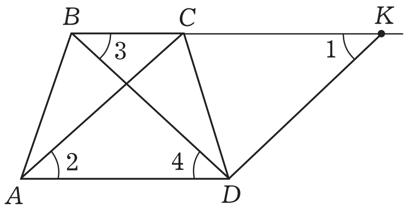

Рис. 8

Возвращаемся к задаче (рис. 7). Трапеция $BCFD$ – равнобедренная, $BC = DF$. Но $BC = b$, следовательно, $DF = b = DK$, ч.т.д.

2. Как было показано, $BCKD$ – параллелограмм, $KC = DB$, а DB – диагональ прямоугольника. Так как $DF = b$ и $BF = CD = a$, то

$$KC = DB = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{20^2 + 21^2} = 29.$$

Ответ. 29.

Задача 5. В прямоугольном треугольнике ABC точка D – середина катета BC, точка M – середина гипотенузы AB. Биссектриса угла BAC пересекает прямую DM в точке K.

1. Доказать, что треугольники AMK и BKC подобны.

2. Найти отношение площадей этих треугольников, если $\cos A = 7/25$.

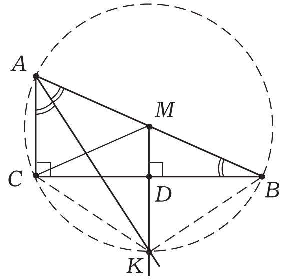

Рис. 9

Решение. 1. В прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна её половине ($CM = AM = BM$) и делит треугольник на два равнобедренных треугольника AMC и BMC (рис. 9). В равнобедренном треугольнике BMC точка D – середина основания BC, MD – медиана и, следовательно, биссектриса и высота.

Опишем около треугольника ABC окружность, AB – её диаметр (угол ACB прямой), точка M – её центр. Угол BMC – центральный, опирается на дугу BC, биссектриса MD этого угла пересечёт дугу BC в её середине, разделив её пополам. Вписанный угол BAC опирается на ту же дугу BC, его биссектриса пересечет дугу BC также в её середине. Таким образом, прямая MD и биссектриса угла BAC пересекаются в одной точке дуги BC, её середине – это и есть точка K.

Прямые MK и AC перпендикулярны прямой BC и, следовательно, параллельны друг другу. Накрест лежащие углы при секущей AK равны, $\angle MKA = \angle CAK = \frac{1}{2}A$. Треугольник MAK равнобедренный, углы при основании AK равны $\frac{1}{2}\angle A$. Треугольник BKC также равнобедренный, его стороны KB и KC стягивают равные дуги. Угол CBK при основании BC равен углу CAK (вписанные углы опираются на одну дугу). Итак, треугольники MAK и BKC равнобедренные с равными углами при основаниях (углы равны $\frac{1}{2}\angle A$), следовательно, они подобны.

2. Площади подобных треугольников относятся как квадраты их сходственных сторон, поэтому $S_{AMK} : S_{BKC} = MA^2 : BK^2$. Имеем

$MA = \frac{1}{2}AB, \quad BK = AB \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\angle A\right),$ тогда $BK^2 = AB^2 \cdot \frac{1}{2}(1-\cos A) = \left(\frac{9}{25}\right)AB^2.$

Окончательно $S_{AMK} : S_{BKC} = \frac{25}{36}.$

Ответ. $\frac{25}{36}$.

Задача 6. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали AC и BD пересекаются в точке O и взаимно перпендикулярны, при этом справедливо равенство $AO \cdot CO = BO \cdot DO$.

1. Доказать, что высота трапеции равна средней линии трапеции.

2. Найти боковые стороны трапеции, если радиус окружности, описанной около треугольника ABD, равен $3\sqrt{2}$.

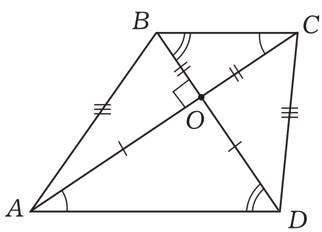

Рис. 10

Решение. 1. Пусть AD – большее основание (рис. 10). Треугольники AOD и COB подобны по двум углам, из подобия следует

$$AO/CO = DO/BO. \qquad (1)$$

Выразим отсюда AO и подставим в заданное равенство $AO \cdot CO = BO \cdot DO$, получим $CO^2 = BO^2$, $CO = BO$, тогда из (1) будет следовать $AO = DO$. Отметим равные отрезки на рисунке и сразу увидим, что треугольник AOB равен треугольнику DOC по первому признаку, и потому $AB = CD$. Это означает, что трапеция равнобедренная.

На новом рисунке (рис. 11) трапеция равнобедренная, её диагонали взаимно перпендикулярны. Треугольники AOD и BOC прямоугольные и равнобедренные. Если точки M и K – середины оснований AD и BC соответственно, то OM – медиана и высота треугольника AOD и потому $OM = \frac{1}{2}AD$. Аналогично, в треугольнике BOC его медиана и высота $OK = \frac{1}{2}BC$. Из $AD \parallel BC$, $OK \perp BC$ и $OM \perp AD$ следует $OK \parallel OM$, т.е. точки K, O и M лежат на одной прямой $MK \perp AD$. Отрезок MK – высота трапеции, $MK = MO + OK = \frac{1}{2}(AD + BC)$. Доказано, что высота трапеции равна ее средней линии.

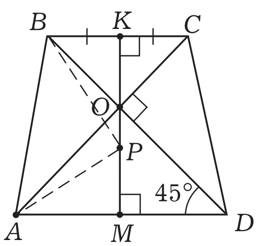

Рис. 11

2. Около треугольника ABD описана окружность радиуса $3\sqrt{2}$. Центр P описанной окружности лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AD, т.е. на отрезке MK. Угол APB – центральный, он вдвое больше вписанного угла ADB (опираются на одну дугу) и $AP = BP = 3\sqrt{2}$. Угол ADB равен острому углу ADO равнобедренного прямоугольного треугольника AOD, а он равен $45°$, поэтому $\angle APB = 90°$. Из треугольника APB находим $AB = AP \cdot \sqrt{2} = 6$. Трапеция равнобедренная, боковые стороны равны, $AB = CD = 6$.

Ответ. 6.

Задача 7. В окружность вписана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC, $\angle BAD = 60°$. В трапецию вписана ещё одна окружность.

1. Доказать, что центр описанной окружности лежит внутри трапеции.

2. Найти, во сколько раз отрезок CD больше радиуса окружности, касающейся сторон AB, AD и вписанной в трапецию окружности.

Решение. 1. Трапеция $ABCD$ – вписанная, следовательно, она равнобедренная (это следует из того, что параллельные хорды высекают равные дуги (см. рис. 12), а равные дуги стягиваются равными хордами).

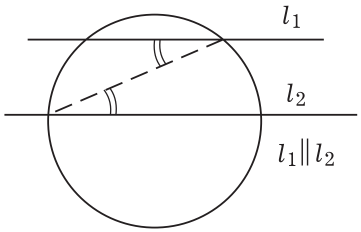

Рис. 12

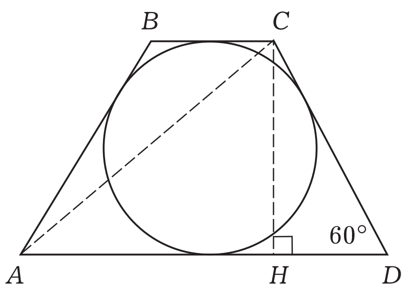

Рис. 13

Рассмотрим равнобедренную описанную трапецию $ABCD$, $AD > BC$, $\angle BAD = 60° = \angle ADC$ (рис. 13). Трапеция описанная $\Rightarrow AD + BC = AB + CD$. Трапеция равнобедренная, следовательно, $AB = CD = \frac{1}{2}(AD + BC)$. Если $CH \perp AD$, то $HD = \frac{1}{2}(AD - BC)$. Из треугольника DCH следует

$$\cos D = \frac{HD}{CD} \Leftrightarrow \frac{AD - BC}{AD + BC} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow AD = 3BC$. Обозначим $BC = b$, тогда $AD = 3b$, $AB = CD = 2b$, $HD = b$, высота трапеции $CH = \sqrt{CD^2 - HD^2} = b\sqrt{3}$.

Найдём радиус R окружности, описанной около трапеции $ABCD$. На хорду AC опирается вписанный угол ADC, равный $60°$, тогда

$$R = \frac{AC}{2\sin 60°} = \frac{AC}{\sqrt{3}}.$$

AC определим из прямоугольного треугольника ACH, в котором $AH = 2b$ и $CH = b\sqrt{3}$:

$$AC = \sqrt{4b^2 + 3b^2} = b\sqrt{7}, \text{ тогда } R = b\sqrt{\frac{7}{3}}.$$

Зададимся вопросом: из какого факта с очевидностью будет следовать, что центр описанной окружности лежит внутри трапеции?

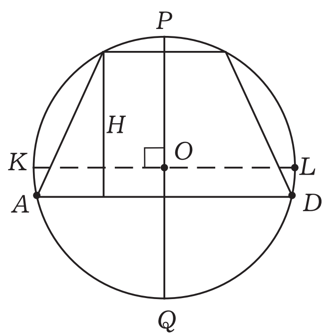

Рис. 14

Если высота трапеции H будет больше радиуса R описанной окружности $\left(H > \frac{1}{2}PQ\right)$, то трапеция не поместится в круге ни выше диаметра KL ($KL \parallel AD$), ни ниже его, т.е. центр будет лежат внутри трапеции (рис. 14). Сравним высоту трапеции $CH = b\sqrt{3}$ и радиус окружности $R = b\sqrt{\frac{7}{3}}$. Очевидно, что $\sqrt{3} > \sqrt{\frac{7}{3}}$ (так как $9 > 7$), т.е. $H > \mathrm{R}$. Следовательно, центр лежит внутри трапеции, ч.т.д.

2. Центр окружности, вписанной в угол BAD, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому точки O_1 и O_2 лежат на биссектрисе угла BAD; точка касания окружностей лежит на линии их центров (рис. 15). Имеем $r = O_1M = \frac{1}{2}CH = \frac{b\sqrt{3}}{2}$; O_2N обозначим через x, тогда $O_2O_1 = x + r$, $AM = \frac{1}{2}AD = \frac{3}{2}b$, $AN = x\sqrt{3}$ (так как $\angle O_2AN = 30°$). Если $O_2M_1 \parallel NM$, то $MM_1 = x$, $O_1M_1 = r - x$, $O_2M_1 = NM$. Из прямоугольного треугольника $O_1O_2M_1$ получим

$$NM = O_2M_1 = \sqrt{(r+x)^2 - (r-x)^2} =$$

$$= 2\sqrt{rx} = 2\sqrt{\frac{bx\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{2\sqrt{3}bx}.$$

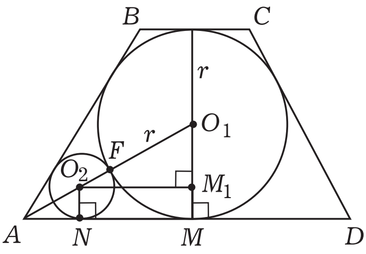

Рис. 15

Далее, $MN = AM - AN = \frac{3}{2}b - x\sqrt{3}$; имеем равенство $\frac{3}{2}b - x\sqrt{3} = \sqrt{2\sqrt{3}bx} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 5\sqrt{3}bx + \frac{9}{4}b^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} O < x < r \\ x = \frac{5 \pm 4}{6}\sqrt{3}b \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{6}b.$$

Так как $CD = 2b$, то $\frac{CD}{x} = 4\sqrt{3}$.

Ответ. $4\sqrt{3}$.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Блиц-ответы

– Вы ведь не сомневаетесь в том, что человек не может быть одновременно в двух местах?

– Может. Вот я, например, сижу на уроке и в то же время вижу себя на Луне, где так интересно!

***

– Что тебе известно об учёных Древней Греции?

– Что они все умерли.

***

– Приведи пример движения по инерции.

– Автомобиль остановился, а водитель едет дальше.

***

– Что означают числа, разделённые тире, под портретом учёного?

– Номер его телефона.

***

– Известно, что появление дробей сопровождалось необычайно широким их использованием.

– Где это?

– В 3/9 царстве, в 3/10 государстве.