Гладун Анатолий Деомидович
Доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей физики (заведующий кафедрой в 1998 – 2010 гг.) Московского физико-технического института (МФТИ). Главный редактор журнала.

Геометрия Лобачевского и кинематика Эйнштейна

В мои студенческие годы в Москву приезжал крупнейший физик-теоретик XX века Поль Андриен Морис Дирак (1902 – 1984). Я был почти на всех его лекциях. После одной из лекций в аудитории Московского государственного университета на доске осталась меловая надпись: «Physical laws should have mathematical beauty» (Физические законы должны обладать математической красотой). С тех пор я не раз убеждался в том, что неотъемлемой частью настоящей физической или математической теории является её красота. Великие физические эксперименты также необычайно красивы. Говорят, что нашему замечательному авиаконструктору А.Н. Туполеву принадлежат слова: «Летать может только красивый самолёт». Не зря, по-видимому, говорят, что красота – это страшная сила.

В данной статье я хочу поделиться с читателем своим восхищением красотой двух жемчужин человеческой мысли, связанных с именами двух гениев, принадлежащих всему человечеству, – Николаю Ивановичу Лобачевскому (1792 – 1856) и Альберту Эйнштейну (1879 – 1955). Самое удивительное состоит в том, что эти жемчужины представляют собой разные выражения одного и того же.

Н.И. Лобачевский решил проблему пятого постулата Евклида (постулата о параллельных линиях), над которой безуспешно трудились многие поколения математиков. Евклид, один из великих геометров древности, жил приблизительно от 330 до 275 года до нашей эры. Составленные им «Начала» разделены на 13 книг, из которых 5, 7, 8, 9 и 10 посвящены теории пропорций и арифметике, остальные являются геометрическими. Теория параллельных изложена в первой книге.

Первой книге предпосланы 23 определения. Вслед за определениями Евклид приводит постулаты и аксиомы, т. е. утверждения, принимаемые без доказательства.

Постулаты Евклида:

I. Требуется, чтобы от каждой точки ко всякой другой точке можно было провести прямую линию.

II. И чтобы каждую прямую можно было неопределённо продолжить.

III. И чтобы из любого центра можно было описать окружность любым радиусом.

VI. И чтобы все прямые углы были равны.

V. И чтобы всякий раз, когда прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, эти прямые пересекались бы с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых (рис. 1).

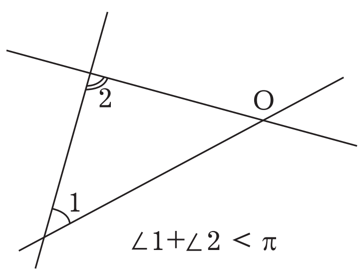

Рис. 1. Пятый постулат Евклида

Далее Евклид излагает теоремы геометрии, располагая их в порядке логической зависимости так, чтобы каждое предложение можно было доказать на основании предыдущих предложений, постулатов и аксиом.

От Платона до Канта среди философов и математиков существовало мнение о том, что постулат или аксиома, положенные в основу науки, должны обладать признаком очевидности. Первые четыре постулата Евклида всем представлялись очевидными. Однако этого нельзя было сказать о пятом постулате. Укрепилось твёрдое убеждение в том, что пятый постулат – это не постулат, а теорема, которую Евклид не сумел доказать. Так возникла проблема пятого постулата. Её пытались решить в течение двух тысяч лет крупнейшие геометры Греции и Византии, Востока и Запада. На рубеже девятнадцатого столетия, когда число неудачных попыток особенно увеличилось, математиков охватило чувство, близкое к отчаянию. Вот что писал в то время Фаркаш Больаи (Bolyai) своему сыну Яношу: «Молю тебя, не делай только и ты попыток одолеть теорию параллельных линий. Я изучил все пути до конца; я не встретил ни одной идеи, которую я не разрабатывал. Я прошёл весь беспросветный мрак этой ночи, и всякий свет, всякую радость жизни я в ней погасил. Этот беспросветный мрак может потопить тысячи ньютоновских башен. Он никогда не рассеется, и никогда несчастный род человеческий не будет владеть чем-либо совершенным даже в геометрии. Это большая и вечная рана в моей душе».

В то время, однако, когда писались эти строки, проблема была уже близка к своему разрешению. С разных сторон, независимо друг от друга к ней подошли К. Гаусс (1777 – 1855), Ф. Швейкарт (1780 – 1859), Н. Лобачевский (1792 – 1856) и Янош Больаи (1802 – 1860). Решение оказалось не тем, которое искали на протяжении веков. Пятый постулат Евклида нельзя доказать: он недоказуем. Евклид был прав, включив его в число своих постулатов. Первым и важнейшим подтверждением его недоказуемости было создание геометрии, отличной от геометрии Евклида. Необходимо отметить, что только один Лобачевский последовательно и до конца жизни продолжал разрабатывать неевклидову геометрию (он называл её воображаемой геометрией) и первый опубликовал её в печати.

Поучителен путь, по которому Лобачевский шёл к своей геометрии. Вот что писал он в 1835 году в своих «Новых началах геометрии» [1]: «Всем известно, что в геометрии теория параллельных до сих пор оставалась несовершенной. Напрасное старание со времён Евклида, в продолжение двух тысяч лет, заставило меня подозревать, что в самих понятиях ещё не заключается той истины, которую хотели доказывать и которую проверить, подобно другим физическим законам, могут лишь опыты, каковы, например, астрономические наблюдения. В справедливости моей догадки, будучи наконец убеждён и почитая затруднительный вопрос решённым вполне, писал об этом я рассуждение в 1826 году».

Эти слова Лобачевского ясно говорят о его воззрении на пространство. Оно противоположно кантовскому, пользовавшемуся тогда величайшим почётом. Учение Канта рассматривает пространство как некую форму субъективного созерцания, необходимо предшествующую всякому опыту; точка зрения Лобачевского возвращает геометрию в область опытных наук. Постулат Евклида для него произволен, он не может быть ни доказан, ни допущен. Он должен быть проверен опытом и наблюдением. Сложной и абстрактной природе пятого постулата должен соответствовать глубоко продуманный эксперимент. Но всякий эксперимент описывается в рамках определённой теории, в данном случае на основе геометрической базы. Если за эту базу принять геометрию Евклида, то можно оказаться в порочном круге. Следовательно, для проверки евклидовой геометрии необходимо разработать другую геометрию, которая основана не на утверждении пятого постулата Евклида, а на его отрицании. Эту геометрию и разработал Лобачевский.

При жизни, однако, он не встретил отклика на свои идеи. Они казались современным ему геометрам парадоксальными и вызывали лишь злую иронию. На Западе К. Гаусс и Больаи, оценившие их значение, по разным причинам не высказались публично. Молчание Гаусса объясняется, по-видимому, тем, что он предвидел дурную реакцию на столь неожиданные идеи. Ведь почти всем новая геометрия показалась тогда абсурдной. В атмосфере непонимания Больаи тяжело заболел и не смог продолжать работу. Один Лобачевский до конца дней своих мужественно отстаивал идеи и права новой геометрии.

Ситуация изменилась лишь десять лет после его смерти. Опубликование переписки Гаусса привлекло внимание к проблемам неевклидовой геометрии. Идеи Лобачевского, получив всеобщее признание, оказали огромное влияние на развитие математики. К столетию со дня рождения Лобачевского сомнений в справедливости его геометрии уже не было. Имя его стало в один ряд с именами Архимеда, Ньютона и других основоположников науки.

Плоскость Лобачевского

Каждому, изучавшему элементарную планиметрию, должна быть понятна фундаментальная роль пятого постулата Евклида. На нём основаны теория параллельных линий и все связанные с ней разделы: подобие фигур, тригонометрия и т. д. Попытки доказать пятый постулат не были бесплодными. В частности, было найдено много предложений, эквивалентных пятому постулату. Приведём без доказательства несколько таких предложений.

1. Две параллельные прямые при пересечении их третьей образуют равные соответственные углы.

2. Сумма внутренних углов треугольника равна двум прямым.

3. Существуют треугольники с произвольно большой площадью.

4. Существуют подобные треугольники.

5. Сторона правильного вписанного шестиугольника равна радиусу.

6. Через любую точку внутри угла можно провести секущую, пересекающую обе стороны угла.

7. Теорема Я. Больаи (1775 – 1856). Если через любые три точки можно провести окружность, то справедлив постулат Евклида о параллельных.

Многовековые попытки доказать пятый постулат Евклида привели также к открытию целого ряда теорем так называемой абсолютной геометрии, то есть геометрии, не зависящей от пятого постулата. Вот, например, некоторые теоремы, содержащиеся в произведениях патера Д. Саккери (1667 – 1773) и французского математика А.М. Лежандра (1752 – 1833).

Теоремы Лежандра – Саккери:

1. *Сумма углов любого треугольника не может быть больше двух прямых.*

2. *Если в данном треугольнике сумма углов равна двум прямым, то и во всяком треугольнике сумма углов равна двум прямым.*

3. *Если сумма углов в каком-либо треугольнике меньше двух прямых, то она меньше двух прямых в любом треугольнике.*

Введём в рассмотрение плоскость Лобачевского. Назовём плоскостью Лобачевского плоскость, на которой прямые не подчиняются пятому постулату. Здесь имеет место постулат Лобачевского, который мы сформулируем следующим образом.

Через точку A вне прямой a в плоскости, определяемой точкой A и прямой a, проходят по крайней мере две прямые c и b, не имеющие общей точки с прямой a.

Какова сумма углов треугольника, расположенного в плоскости Лобачевского? Можно видеть, что эта сумма меньше двух прямых.

В самом деле, если бы эта сумма равнялась $2d$, где d – величина прямого угла, $d=\pi/2$, то отсюда вытекал бы постулат Евклида о параллельных, но мы имеем дело с плоскостью Лобачевского, и предложение о том, что сумма углов треугольника равна $2d$, ведёт к противоречию. А так как на плоскости Лобачевского, так же как и на плоскости Евклида, сумма углов треугольника больше двух прямых быть не может, то, следовательно, она меньше $2d$.

Можно доказать, кроме того, что сумма углов треугольника на плоскости Лобачевского в разных треугольниках, вообще говоря, разная. Другими словами, эта сумма при переходе от треугольника к треугольнику меняется, так как если бы эта сумма была одинаковой во всех треугольниках, то отсюда бы вытекало наличие пятого постулата Евклида.

На плоскости Лобачевского справедлива следующая теорема: *если три угла одного треугольника равны соответственно трём углам другого, то такие треугольники равны.*

Если бы такие треугольники не были равными, то они были бы подобными, что означает справедливость пятого постулата Евклида, который на плоскости Лобачевского не выполняется. Полученное противоречие доказывает теорему. Отметим ещё одно предложение геометрии Лобачевского.

Каждый отрезок геометрии Лобачевского однозначно определяет угол.

В этом легко убедиться, построив равносторонний треугольник, стороны которого равны данному отрезку; такой треугольник будет также и равноугольным. Угол такого треугольника и будет вполне определённым и единственным углом, который определяет данный отрезок. Если взять другой отрезок, не равный первому, и точно так же построить равносторонний треугольник, то угол этого последнего треугольника не может равняться углу первого треугольника, так как это противоречило бы только что установленному новому принципу равенства треугольников. Каждый равносторонний треугольник имеет свою собственную величину угла. Два неравных треугольника имеют неравные углы. В геометрии Лобачевского нет подобных треугольников, но взамен имеется интересная зависимость между отрезками и углами. Это напоминает геометрию на сфере. Напрашивается аналогия со сферической тригонометрией.

Сферическая тригонометрия

Рассмотрим шар радиуса r. На поверхности шара кратчайшее расстояние между двумя точками измеряется вдоль окружности большого круга, то есть окружности, плоскость которой проходит через центр шара. Вершины сферического треугольника являются точками пересечения трёх лучей, выходящих из центра шара, и сферической поверхности. Стороны a, b, c сферического треугольника измеряются углам $\alpha = a/r$, $\beta = b/r$, $\gamma = c/r$, между лучами, которые меньше π. Углы A, B, C сферического треугольника, противолежащие сторонам a, b, c соответственно, представляют собой, по определению, меньшие, чем углы между плоскостями, определяемыми данными лучами (рис. 2).

Сферическая тригонометрия занимается изучением соотношений между сторонами и углами сферических треугольников (например, на поверхности Земли или на небесной сфере).

Приведём без доказательств несколько формул сферической тригонометрии. Теорема синусов:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A} = \frac{\sin\beta}{\sin B} = \frac{\sin\gamma}{\sin C}.$$

Теорема косинусов для сторон:

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A. \quad (2)$$

Теорема косинусов для углов:

$$\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos\alpha. \quad (3)$$

Если $r \to \infty$, то приведённые формулы переходят в известные соотношения плоской тригонометрии.

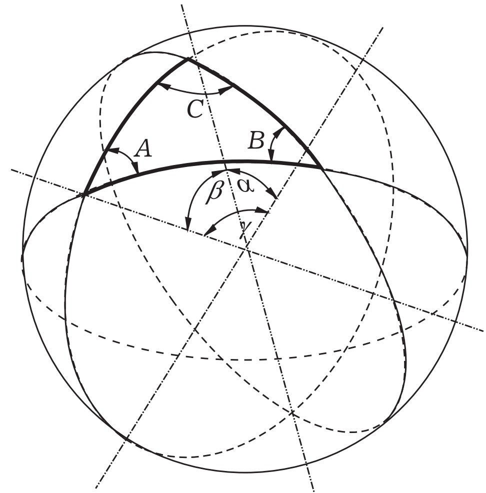

Рис. 2. Углы и стороны сферического треугольника

Формулы гиперболической тригонометрии

Воспользуемся далее теоремой Лобачевского, которая утверждает, что *геометрия плоскости Лобачевского совпадает с геометрией на сфере мнимого радиуса*. Заметим, что

$$i\sin\frac{x}{i} = \operatorname{sh}x, \quad \cos\frac{x}{i} = \operatorname{ch}x,$$

где i – мнимая единица.

Рассмотрим формулу (2). Заменяя r на ik, находим:

$$\operatorname{ch}\frac{a}{k} = \operatorname{ch}\frac{b}{k}\operatorname{ch}\frac{c}{k} - \operatorname{sh}\frac{b}{k}\operatorname{sh}\frac{c}{k}\cos A. \quad (4)$$

Если $k \to \infty$, то

$$\operatorname{ch}\frac{a}{k} \approx 1 + \frac{a^2}{2k^2}, \quad \operatorname{sh}\frac{b}{k} \approx \frac{b}{k}.$$

Соотношение (4) при $k \to \infty$, обращается в

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$

т. е. основную формулу тригонометрии на евклидовой плоскости.

Покажем, что на плоскости Лобачевского сумма углов треугольника меньше π. Возьмём для простоты равносторонний треугольник. Полагая в (1) $a = b = c$ и заменяя r на ik, имеем:

$$\cos A = \frac{\operatorname{ch}^2 \frac{a}{k} - \operatorname{ch}\frac{a}{k}}{\operatorname{sh}^2 \frac{a}{k}} =$$

$$= \frac{\operatorname{ch}\frac{a}{k}\left(\operatorname{ch}\frac{a}{k} - 1\right)}{\left(\operatorname{ch}\frac{a}{k}+1\right)\left(\operatorname{ch}\frac{a}{k}-1\right)} = \frac{\operatorname{ch}\frac{a}{k}}{1+\operatorname{ch}\frac{a}{k}}.$$

Поскольку

$$\operatorname{ch}\frac{a}{k} = 1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{a}{k}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{a}{k}\right)^2 + \ldots, \quad \text{то}$$

$$\cos A = \frac{1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{a}{k}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{a}{k}\right)^4 + \ldots}{2 + \frac{1}{2!}\left(\frac{a}{k}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{a}{k}\right)^4 + \ldots}.$$

Эта дробь, очевидно, больше 1/2, т. е. $A < \pi/3$. Следовательно, сумма углов треугольника меньше π. Величину $\delta = \pi - A - B - C$ называют гиперболическим недостатком. Характерным свойством формул гиперболической тригонометрии является их двойственность – симметрия между углами и сторонами. Математическое выражение этой симметрии можно видеть в теореме о параллельных.

Рассмотрим две параллельные линии (рис. 3). Проведём через них прямую так, чтобы она составляла с нижней параллелью прямой угол. Тогда верхняя параллель составляет с ней угол, меньший прямого. Назовём этот угол *углом параллельности* и обозначим через $\Pi(x)$, где x – длина отрезка прямой между параллельными. В евклидовой геометрии, очевидно, $\Pi(x) = \pi/2$. В геометрии Лобачевского это справедливо лишь в случае, когда расстояние между параллельными мало.

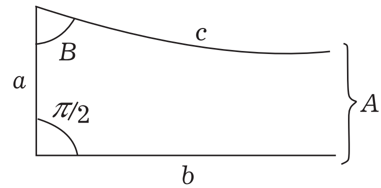

Рис. 3. К определению угла параллельности $B = \Pi(a)$

Применим к треугольнику на рис. 3 теорему косинусов для углов:

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \operatorname{ch}\frac{a}{k}.$$

Полагая $A = 0$, $C = \pi/2$, $B = \Pi(a)$, находим

$$\operatorname{ch}\frac{a}{k} = \frac{1}{\sin \Pi(a)},$$

или

$$\operatorname{th}\frac{a}{k} = \cos \Pi(\mathrm{a}). \qquad (5)$$

Отсюда получаем знаменитую формулу Лобачевского:

$$\operatorname{ch}\frac{a}{k} - \operatorname{sh}\frac{a}{k} = e^{-\frac{a}{k}} = \frac{1-\cos B}{\sin B},$$

то есть

$$\operatorname{tg}\frac{\Pi(a)}{2} = e^{-\frac{a}{k}}. \qquad (6)$$

Во времена Лобачевского гиперболические функции не употреблялись, и он пользовался вместо этого тригонометрическими функциями с аргументами $\Pi(x)$.

Рассмотрим треугольник с одним углом на бесконечности как сумму двух прямоугольных треугольников (рис. 4). Нетрудно видеть в силу (5), что

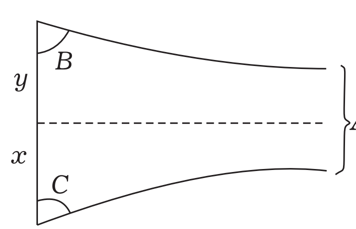

Рис. 4. Треугольник с одним углом на бесконечности как сумма двух прямоугольных треугольников

$$\text{th}(x+y)=\frac{\text{th}x-\text{th}y}{1+\text{th}x\text{th}y}=\frac{\cos C+\cos B}{1+\cos C\cos B},$$

то есть

$$\text{th}a=\frac{\cos\Pi(x)+\cos\Pi(y)}{1+\cos\Pi(x)\cos\Pi(y)}. \qquad (7)$$

Рассмотрим теперь прямоугольный треугольник (рис. 5). Так как сумма его острых углов не равна (как в евклидовой геометрии) $\pi/2$, то мы имеем пять величин: два угла A и B и три стороны a, b, c. Между любыми тремя величинами существует связь. Формулы для произвольного треугольника можно получить, разбив его на два прямоугольных.

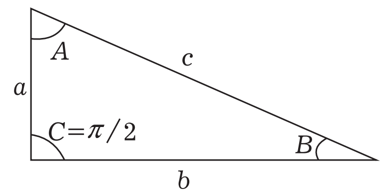

Рис. 5. Прямоугольный треугольник

Кинематика Эйнштейна

В то время, когда Лобачевский пытался найти экспериментальное подтверждение своей геометрии, шло интенсивное накопление опытных данных об электричестве и магнетизме. В шестидесятых XIX века Дж. Максвелл (1831 – 1879) подытожил этот процесс в знаменитых уравнениях электродинамики. Вскоре было замечено, что уравнения Максвелла неинвариантны относительно преобразований Галилея. Это означает, что если оставаться на позициях ньютоновской механики, то надо выделить инерциальную систему отсчёта, в которой уравнения Максвелла имеют свой оригинальный вид. Эту систему отсчёта можно было бы с полным правом назвать абсолютно покоящейся. Согласно преобразованиям Галилея скорость света зависела бы от скорости самой системы отсчёта. Этому, однако, противоречил ряд экспериментов и, в особенности, прямой опыт А. Майкельсона (1852 – 1931).

Пытаясь разрешить противоречие, Г.А. Лоренц (1853 – 1926) открыл в 1904 году преобразования, связывающие координаты частицы в двух инерциальных системах отсчёта, движущихся относительно друг друга со скоростью, сравнимой со скоростью света. При малых скоростях эти преобразования совпадают с преобразованиями Галилея. Было установлено, что уравнения Максвелла не изменяют свою форму под действием преобразований Лоренца. Это означает, что не только механические, но и электромагнитные явления не зависят от равномерного поступательного движения.

Однако, открыв свои знаменитые преобразования, Лоренц полностью не осознал их значение. Следующий решительный шаг в построении теории относительности, идя различными путями, независимо друг от друга, сделали в 1905 году А. Эйнштейн (1879 – 1955) и А. Пуанкаре (1854 – 1912). Первый – с помощью анализа на основе мысленных экспериментов, опирающихся на всю совокупность данных физического опыта; второй – на основе исследований свойств симметрии физических законов электродинамики. Так возникла кинематика Эйнштейна, кинематика специальной теории относительности.

Идеи Лоренца, Эйнштейна и Пуанкаре подытожил в 1905 году Г. Минковский (1864 – 1909), введя понятие пространственно-временного мира. Минковский завершил построение специальной теории относительности, придав ей адекватную математическую форму.

По определению Минковского точка с заданными координатами, рассматриваемая в данный момент времени, есть мировая точка, а многообразие всех точек есть пространственно-временной мир, или просто мир. Представление Ньютона о пространстве и времени Минковский выразил в виде своеобразной геометрии мира. Переход к новым представлениям о пространстве и времени приводит к другой геометрии мира. Преобразования Лоренца и преобразования Галилея имеют такое же отношение к миру, какое имеют повороты к обычному пространству.

Если в пространстве скоростей геометрию Евклида заменить пространством Лобачевского, то преобразования Галилея заменятся на преобразования Лоренца. Другими словами, четырёхмерная группа Лоренца и группа движений в трёхмерной геометрии Лобачевского изоморфны. Так исторический ход науки связал кинематику теории относительности с многовековой проблемой параллельных.

Убедимся в этом на конкретных примерах. Пусть инерциальная система отсчёта S' движется относительно инерциальной системы отсчёта S со скоростью V вдоль оси Ox. Переход от координат события x, y, z, t к координатам x', y', z', t' того же события осуществляет преобразование Лоренца:

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + Vt'), \\ y &= y', \\ z &= z', \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{Vx}{c^2}\right), \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Преобразование (8) является поворотом в плоскости (tx); координаты y и z при этом не меняются. Его можно записать в виде

$$\begin{aligned} x &= x'\operatorname{ch}\psi + ct\operatorname{sh}\psi, \\ ct &= x'\operatorname{sh}\psi + ct'\operatorname{ch}\psi, \end{aligned} \tag{9}$$

где ψ – «угол поворота», $\operatorname{th}\psi = V/c$. Нетрудно убедиться непосредственной проверкой в том, что

$$(ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - x'^2.$$

Формулы (9) отличаются от обычных формул преобразования при повороте осей координат заменой тригонометрических функций гиперболическими. В этом проявляется отличие псевдоевклидовой геометрии от евклидовой.

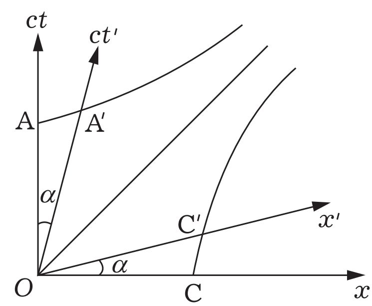

Рис. 6. Координата движущегося наблюдателя чертит прямую ct'

Минковский развил следующее представление о пространстве и времени. В системе координат неподвижного наблюдателя (ct, x) определённому событию соответствует точка в пространстве (ct, x). Эволюция этого события в пространстве (ct, x) чертит определённую линию. Координата подвижного наблюдателя, движущегося с постоянной скоростью V (рис. 6), чертит прямую ct' такую, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{V}{c}.$$

Рассмотрим в плоском мире (ct, x) гиперболу $(ct^2) - x^2 = 1$. Если принять в качестве масштабных единиц отрезки OA' и $OC' = OA'$ в системе (ct, x) и отрезки OA и $OC = OA$ в системе (ct', x'), то в новых осях (ct', x') уравнение той же гиперболы будет $(ct')^2 - x'^2 = 1$, где x' – луч, сопряжённый с ct'.

Рассмотрим теперь трёхмерный мир (плоское пространство плюс время). Концы единичных (масштабных) векторов образуют при $t > 0$ верхнюю полость двуполостного гиперболоида

$$(ct)^2 - x^2 - y^2 = 1.$$

Отобразим коническим отображением (центр проектирования в начале координат) плоскость гиперболоида ($t > 0$) на плоскость П, ортогональную к оси ct (рис. 7).

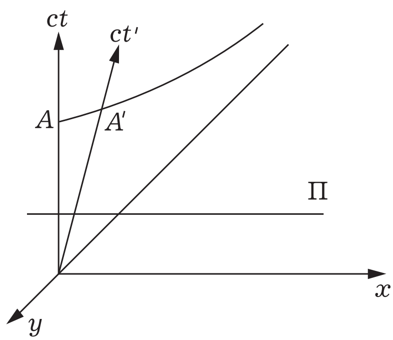

Рис. 7. Отображение плоскости гиперболоида на плоскость, ортогональную оси ct.

Плоскость Лобачевского преобразуется при этом на внутренность окружности (рис. 8), которая является отображением асимптотического кругового конуса. Образы точек будем обозначать теми же буквами. «Прямые», проходящие через точку A, будут евклидовыми прямыми. Остальные – прямыми, «ортогональными» к основной окружности, которую будем называть абсолютом.

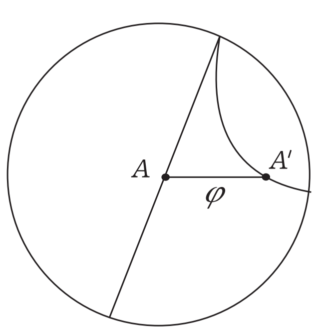

Рис. 8. Внутренность круга – плоскость Лобачевского

Рассмотрим параметрическое уравнение гиперболы:

$$ct = \operatorname{ch}\varphi,\ x = \operatorname{sh}\varphi,$$

где φ – длина в смысле Лобачевского. Можно убедиться в том, что φ есть удвоенная заштрихованная площадь, представленная на рис. 9.

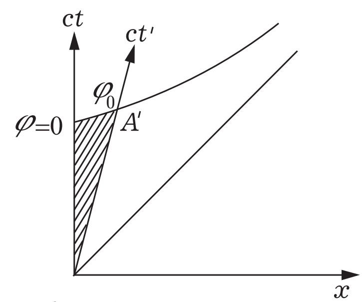

Рис. 9. Удвоенная заштрихованная площадь характеризует длину в плоскости Лобачевского

Пусть для неподвижного наблюдателя $\varphi = 0$, для подвижного наблюдателя $\varphi = \varphi_0$. Имеем:

$$ct = \operatorname{ch}\varphi, \quad x = \operatorname{sh}\varphi;$$

$$\begin{aligned} ct' &= \operatorname{ch}(\varphi - \varphi_0) = \operatorname{ch}\varphi \operatorname{ch}\varphi_0 - \operatorname{sh}\varphi \operatorname{sh}\varphi_0 = \\ &= ct\operatorname{ch}\varphi_0 - x\operatorname{sh}\varphi_0, \qquad (10) \\ x' &= \operatorname{sh}(\varphi - \varphi_0) = \operatorname{sh}\varphi \operatorname{ch}\varphi_0 - \operatorname{ch}\varphi \operatorname{sh}\varphi_0 = \\ &= x\operatorname{ch}\varphi_0 - ct\operatorname{sh}\varphi_0. \end{aligned}$$

Координаты точки A'

$$ct_0 = \operatorname{ch}\varphi_0,\ x_0 = \operatorname{sh}\varphi_0,$$

поэтому

$$\frac{x_0}{ct_0} = \operatorname{th}\varphi_0 = \frac{V}{c}.$$

Формулы (10) принимают при этом вид преобразований Лоренца:

$$t' = \gamma\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right),$$

$$x = \gamma(x - Vt).$$

Пусть **A** – неподвижная система отсчёта, **B** – система, движущаяся в **A** в указанном направлении, **C** – система, движущаяся в **B** под углом B к направлению движения **A** относительно **B**. Тогда в плоскости Лобачевского получается треугольник ABC со сторонами ξ, η, ζ (рис. 10).

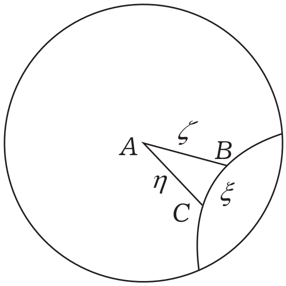

Рис. 10. Треугольник в плоскости Лобачевского

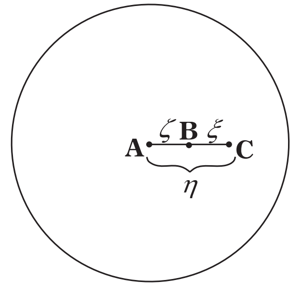

Рис. 11 К выводу релятивистского закона сложения скоростей

Поскольку $\operatorname{cth}\zeta$ – скорость движения системы **B** относительно системы **A**, $\operatorname{cth}\xi$ – скорость системы **C** относительно системы **B**, $\operatorname{cth}\eta$ – скорость системы **C** относительно **A**, то в силу теоремы косинусов имеем:

$$\operatorname{ch}\eta = \operatorname{ch}\xi\operatorname{ch}\zeta - \operatorname{ch}\xi\operatorname{sh}\zeta\cos B.$$

Эта формула выражает релятивистский закон сложения скоростей.

Рассмотрим частный случай, когда направления движения систем **B** и **C** совпадают (рис. 11).

Угол B равен нулю, если движение **B** относительно **A** и движение **C** относительно **B** происходят в разные стороны; угол B равен π, если **B** относительно **A** и **C** относительно **B** движутся в одинаковых направлениях. Очевидно, что

$$\operatorname{th}\eta = \operatorname{th}(\zeta \pm \xi) = \frac{\operatorname{th}\zeta \pm \operatorname{th}\xi}{1 \pm \operatorname{th}\zeta\operatorname{th}\xi},$$

или

$$V_{\text{CA}} = \frac{V_{\text{BA}} \pm V_{\text{CB}}}{1 \pm V_{\text{BA}}V_{\text{CB}} / c^2}.$$

Столкновение частиц

Пусть упруго сталкиваются два одинаковых упругих шара, один из которых до столкновения покоился. Законы сохранения импульса и энергии в нерелятивистской механике дают:

$$\begin{aligned} \vec{p}_2 &= \vec{p}_1' + \vec{p}_2', \\ p_2^2 &= p_1'^2 + p_2'^2. \end{aligned} \qquad (11)$$

Первое уравнение (11) означает, что три вектора образуют треугольник. Второе есть не что иное, как теорема Пифагора. Отсюда следует, что угол между импульсами разлетающихся частиц прямой. Это хорошо известное свойство упругих столкновений. Существенно, однако, другое: решение задачи механики в этом примере свелось к использованию теоремы евклидовой геометрии.

Обратим внимание на одно важное обстоятельство. Когда мы решаем задачу методами аналитической геометрии, мы пользуемся уравнениями, заданными в какой-то определённой системе координат. Мы можем, конечно, переходить от одной системы координат к другой, но для того, чтобы написать уравнение, надо остановиться на какой-то определённой системе. Если же мы решаем обычную задачу тригонометрии, то, используя, например, формулы для треугольника, мы совершенно не интересуемся, как расположен треугольник. Нас вообще не интересует, нарисованы ли какие-то координатные оси или нет. Почему так происходит?

Не интересоваться положением треугольника в пространстве можно, потому что свойства треугольника не изменяются, если перенести его параллельно самому себе в любое другое место пространства.

В механике этому соответствует неизменность уравнений относительно перехода в другую инерциальную систему. Переход в систему координат, которая движется со скоростью $\vec{V}_0$, эквивалентен тому, что к скоростям всех точек прибавляется вектор $\vec{V}_0$.

Используя пространство скоростей и полагая $\vec{p} = m\vec{V}$, из (11) находим:

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_1' + \vec{V}_2',$$

$$V_2^2 = V_1'^2 + V_2'^2.$$

Эти уравнения можно изобразить в виде диаграммы (рис. 12). Начало координат O отвечает скорости первого шара до столкновения. Вектор $\vec{V}_2$ есть диагональ прямоугольника. Он равен сумме двух других векторов. Вместо того, чтобы говорить о скорости первого шара после столкновения в инерциальной системе отсчёта, в которой он покоился до столкновения, мы будем говорить об относительной скорости первого шара до и после столкновения. Интерпретировать чертежи на языке относительных скоростей – означает использовать терминологию тригонометрии.

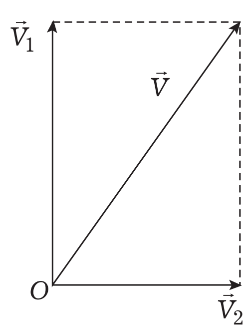

Рис.12. Скорости упругих шаров до и после столкновения

Относительная скорость при этом равна длине соответствующей стороны треугольника. Принцип относительности Галилея при такой интерпретации эквивалентен утверждению о том, что свойство геометрической фигуры не зависит от положения в пространстве скоростей.

Пример такой фигуры представлен на рис. 13.

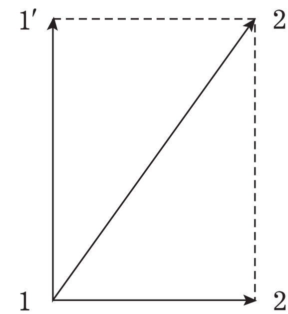

Рис. 13. Относительные скорости до и после столкновения

Ради краткости письма мы опускаем букву V и оставляем лишь индексы 1, 1′, 2, 2′. В этих обозначениях процесс столкновения записывается следующим образом: $1 + 2 \to 1' + 2'$. Следовательно, кинематическая диаграмма на рисунке 13 описывает относительные скорости частиц до и после столкновения.

Пусть сталкиваются два шара с различными массами m_1 и m_2. Тогда центр масс этих шаров лежит не посередине отрезка, соединяющего точки 1 и 2, а делит этот отрезок так, что выполняется «правило рычага»:

$$m_1 V_1 = m_2 V_2.$$

Можно заметить, что в этом случае кинематическая диаграмма превращается в равнобочную трапецию (рис. 14).

Рассмотрим задачу об упругом рассеянии релятивистских частиц. В пространстве скоростей скорости частиц до и после рассеяния расположены в вершинах равнобочной трапеции (см. рис. 14). Диагонали трапеции делят друг друга так, что отношение гиперболических синусов отрезков $1C$ и $2C$ равно отношению m_2 / m_1 масс частиц:

$$\frac{\text{sh}(1C)}{\text{sh}(2C)} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Четыре вершины и центр трапеции соответствуют одной из пяти систем координат: четыре системы покоя частиц и система центра инерции.

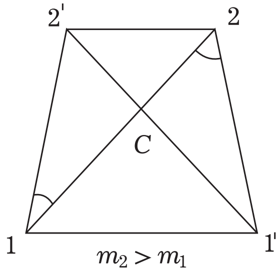

Рис. 14. Кинематическая диаграмма двух упругих шаров с различными массами

Опустим из центра C перпендикуляр на сторону $(11')$ (рис 15). В системе 1, то есть в системе, где частица 1 до столкновения покоилась, угол рассеяния отсчитывается от направления падающей частицы 2, то есть угол $(212')$, равный α_2, есть угол рассеяния; угол $(211')$, равный α_1, есть угол отдачи в этой системе.

Воспользуемся формулой

$$\text{th}(b/k) = \text{th}(c/k)\cos A,$$

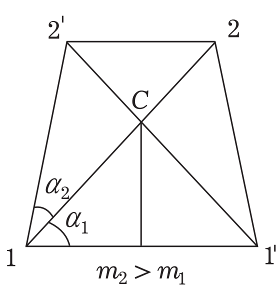

Рис. 15. Углы рассеивания и отдачи на кинематической диаграмме

справедливой для прямоугольного треугольника (рис. 15). Полагая $k = 1$, имеем:

$$\text{th}11'/2 = \text{th}1C\cos\alpha_1.$$

Вспомним далее известные соотношения релятивистской механики:

$$\frac{E}{mc^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \text{ch}\varphi;$$
$$\frac{p^2}{(mc)^2} = \text{sh}^2\varphi. \qquad (12)$$

Здесь E – энергия частицы, m – её масса, V – скорость, φ – неевклидова длина, p – абсолютная величина импульса частицы.

Отметим также, что

$$\text{th}\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \text{ch}x}{1 + \text{ch}x}}, \qquad (13)$$

если $x > 0$. В силу (12) величина $m_1c^2\text{ch}(11')$ есть энергия отдачи первой частицы в системе, где первая частица покоится. Величина $c\,\text{th}(1C)$ есть относительная скорость частицы 1 в системе центра инерции. Используя формулу (13), находим:

$$\sqrt{\frac{m_1c^2 - E_1}{m_1c^2 + E_1}} = \frac{v_{1C}}{c}\cos\alpha_1.$$

С помощью трапеции (рис. 15) можно получить и другие соотношения. Получим, например, соотношение между энергией E_0 частицы в системе центра инерции и E – энергией в лабораторной системе (системе 1). Запишем $\text{ch}(12) = \text{ch}((1C) + (C2))$. Раскрывая скобки и учитывая соотношения (12), находим

$$m_1c^2E_2 = E_{01}E_{02} + c^2p_{01}p_{02}. \qquad (14)$$

Здесь нулевым индексом отмечены величины, относящиеся к системе центра инерции. Если $m_1 = m_2 = m$, то вместо (14) имеем:

$$mc^2E_2 = E_0^2 + c^2p_0^2.$$

Поскольку $c^2p_0^2 = E_0^2 - m^2c^4$, получаем известную формулу:

$$E_0 = \sqrt{\frac{(E_2 + mc^2)mc^2}{2}}.$$

Рассмотренные примеры показывают, что гиперболическая тригонометрия является эффективным средством решения задач релятивистской механики.

Заключение

Убеждать современного читателя в справедливости законов релятивистской механики нет необходимости. Релятивистская механика является рабочим инструментом физики и техники высоких энергий. Мы хотели, однако, обратить внимание на то, что применяя аппарат релятивистской механики, мы имеем дело по существу с геометрией Лобачевского. Понимание этого обстоятельства не только приносит ощущение гармонии и красоты окружающего нас мира, но и даёт возможность практического применения неевклидовой геометрии к расчёту процессов рассеяния.

С другой стороны, существенно, что разрабатывая неевклидову геометрию, Лобачевский использовал физический стиль мышления. Он полагал геометрию эмпирической наукой. Такой подход очень близок к методологии Эйнштейна, используемой, в частности, в его классической работе «К электродинамике движущихся тел» (1905 г.) (см. [2], статья 1). Вот цитата из этой работы: «Разрабатываемая теория основывается, как и всякая другая электродинамика, на кинематике твёрдого тела, так как суждения всякой теории касаются соотношений между твёрдыми телами (координатными системами), часами и электромагнитными процессами. Недостаточное понимание этого обстоятельства является корнем тех трудностей, преодолевать которые приходится теперь электродинамике движущихся тел».

Своё глубокое понимание соотношения геометрии и реальности Эйнштейн выразил в работе «Геометрия и опыт» (1921 г.) (см. [3], статья 6). Он пишет:

«Твёрдые тела ведут себя в смысле различных возможностей взаимного расположения как тела евклидовой геометрии трёх измерений; таким образом, теоремы евклидовой геометрии содержат в себе утверждения, определяющие поведение практически твёрдых тел.

Дополненная таким утверждением геометрия становится, очевидно, естественной наукой; мы можем рассматривать её фактически как самую древнюю ветвь физики. Её утверждения покоятся существенным образом на выводах из опыта, а не только на логических заключениях. Будем в дальнейшем называть дополненную таким образом геометрию «практической геометрией» в отличие от «чисто аксиоматической геометрии». Вопрос о том, является ли практическая геометрия евклидовой или нет, приобретает совершенно ясный смысл: ответ на него может дать только опыт. Всякое измерение длины в физике точно так же, как геодезические или астрономические измерения, в этом смысле составляют предмет практической геометрии, если при этом исходить из того опытного закона, что свет распространяется по прямой линии, и именно по прямой в смысле практической геометрии.

Такому пониманию геометрии я придаю особое значение, поскольку без него я не смог бы установить теорию относительности...».

Литература

1. *Лобачевский Н.И.* Избранные сочинения по геометрии. – М.: Гостехиздат, 1956.
2. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов, том I. – М.: Наука, 1965.
3. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов, том II. – М.: Наука, 1966.