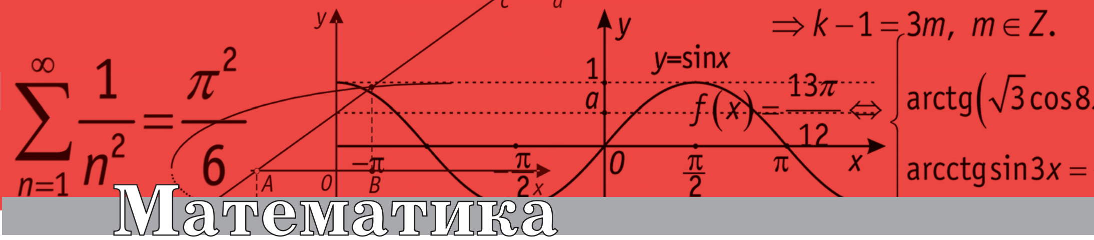




**Колесникова Софья Ильинична**
*Старший преподаватель кафедры высшей математики Московского физико-технического института (МФТИ), специалист ЗФТШ при МФТИ, редактор журнала «Потенциал». Автор пособий «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ» и «Решение сложных задач ЕГЭ».*

# ЕГЭ. Графики, параметры Часть 2

**Разные задачи**

Продолжим решение задач с параметрами из тренировочных вариантов ЕГЭ и различных олимпиад. Задачи разные, и решаются они разными методами. Но общее – одно: для решения любой из приведённых задач привлечены графики элементарных функций. Правда, иногда приходится привлекать производную.

**Задача 1.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \left|2x^2+y^2-1\right|+y^2+4y=0, \\ y=\dfrac{1}{2}x+a \end{cases}$$

имеет два или три решения

**Решение**

Преобразуем уравнение системы:

$$\left|2x^2+y^2-1\right|+y^2+4y=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y^2-4y\ge 0 \Leftrightarrow y^2+4y\le 0, \\ \left[\begin{array}{l} 2x^2+y^2-1=-y^2-4y, \\ 2x^2+y^2-1=y^2+4y \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y\in[-4;0], \\ \left[\begin{array}{l} x^2+(y+1)^2=1{,}5, \\ 4y=2x^2-1 \end{array}\right. \end{cases}$$

Задачу будем решать графически. Построим эскиз части окружности $x^2+(y+1)^2=1{,}5$ на промежутке $y\in[-4;0]$ – рис. 1.

Найдём точки пересечения с осью Ox: $y=0: x^2+1=1{,}5 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{0{,}5}$.

Построим на промежутке $y\in[-4;0]$ эскиз параболы $4y=2x^2-1$.

Найдём точки пересечения с осью Ox: $y=0 \Leftrightarrow 2x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{0{,}5}$.

Видно, что они одни и те же у параболы и окружности – рис.1

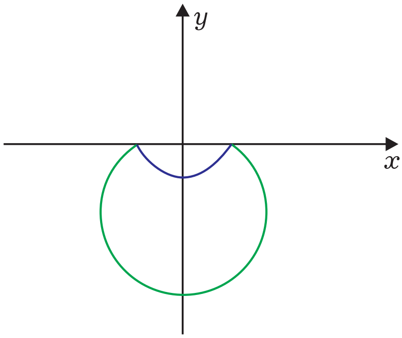



*Рис. 1*

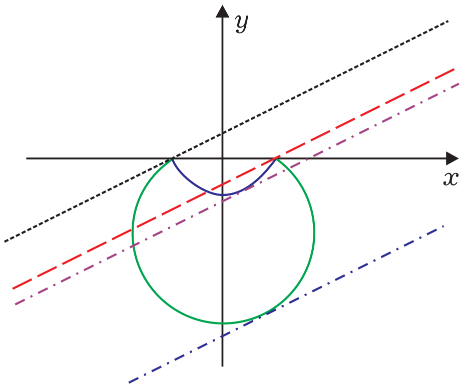



*Рис. 2*

Через точки пересечения кривых с осью Ох проведём прямые $y=\frac{x}{2}+a$:

$$0=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}+a \Leftrightarrow a=\mp\frac{\sqrt{2}}{4}$$ – рис.2.

Найдём $a$, при котором прямая $y=\frac{x}{2}+a$, касается окружности – тогда они имеют одну общую точку, т. е. дискриминант соответствующего квадратного уравнения равен 0.

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2+4y-1=0, \\ y=\frac{1}{2}x+a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2+2\left(\frac{1}{2}x+a\right)^2+4\left(\frac{1}{2}x+a\right)-1=0 \Leftrightarrow$$

$$5x^2+4x(a+1)+4a^2+8a-2=0 \Rightarrow$$

$$\frac{D}{4}=8a^2+16a-7=0 \Leftrightarrow a=-1\pm\sqrt{\frac{15}{8}}.$$

Проводим касательную $y=\frac{x}{2}-1-\sqrt{\frac{15}{8}}$ – рис. 2.

Находим $a$ для касательной к параболе $4y=2x^2-1$:

$$\begin{cases} 4y=2x^2-1, \\ y=\frac{x}{2}+a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\left(\frac{x}{2}+a\right)=2x^2-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-2x-4a-1=0 \Rightarrow$$

$$\frac{D}{4}=1+8a+2=0 \Leftrightarrow a=-\frac{3}{8}.$$

Проводим прямую $y=\frac{x}{2}-\frac{3}{8}$ – рис. 2

На рис. 2 хорошо видно, что решений два, если

$$a\in\left(-1-\sqrt{\frac{15}{8}};-\frac{3}{8}\right)\cup\left(-\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

или три, если $a\in\left\{-\frac{3}{8};\frac{\sqrt{2}}{4}\right\}$.

Получаем **Ответ.**

$$\left(-1-\sqrt{\frac{15}{8}};-\frac{3}{8}\right]\cup\left(-\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right].$$

**Задача 2.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2+2x-a\le 0, \\ x^2-4x+6a\le 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

**Решение**.

Перепишем неравенства по-другому (чтобы параметр входил одинаково в оба неравенства):

$$\begin{cases} x^2+2x-a\le 0, \\ x^2-4x+6a\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge (x+2)x \\ 6a\le -(x-4)x. \end{cases}$$

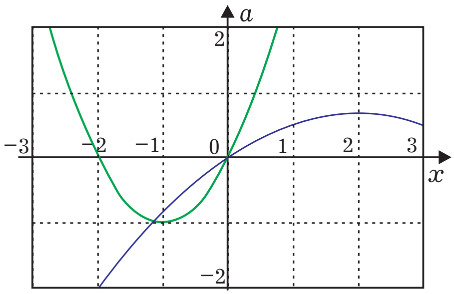



*Рис. 3*

Теперь на одном чертеже в плоскости $(x;a)$ построим эскизы кривых $a=(x+2)x$ и $a=-\frac{(x-4)x}{6}$ – рис.3

Решением системы является «лунка» между параболами.

Найдём точки пересечения:

$$x^2+2x=\frac{-x^2+4x}{6}$$

$$\Leftrightarrow 7x^2+8x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow a=0, \\ x=-\frac{8}{7} \Rightarrow a=-\frac{48}{49}. \end{array}\right.$$

Точка $\left(-\frac{8}{7};-\frac{48}{49}\right)$ находится выше вершины.

Поэтому единственное решение будет, если $a=0$ и $a=-1$ (вершина параболы).

**Ответ.** $\{-1;0\}$.

**Задача 3.** Найдите все значения параметра $a$ такие, что для любого $x$ выполняется неравенство

$$|x+1|+2|x+a|>3-2x.$$

**Решение.**

Перепишем исходное неравенство по-другому:

$$3-2x-|x+1|<2|x+a|.$$

Рассмотрим две функции:

$$y(x)=3-2x-|x+1|=\begin{cases} 4-x, & x\le -1, \\ 2-3x, & x>-1 \end{cases}$$ и

$g(x)=2|x+a|$ – рис.4

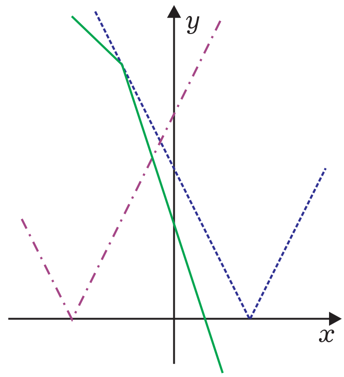



*Рис. 4*

Попробуем решить неравенство, «двигая угол» – график $g(x)=2|x+a|$. Мы должны найти такие значения параметра $a$, при которых неравенство $y(x)<g(x)$ справедливо для всех $x\in R$.

Это будет выполнено для всех «углов», расположенных правее того, который левой стороной (прямая $g=-2x-2a$) проходит через точку излома $(-1;5)$: $5=2-2a \Leftrightarrow a=-1{,}5$ – рис. 4. Значит, неравенство выполнено на всей числовой оси, если $-a>1{,}5 \Leftrightarrow a<-1{,}5$.

**Ответ.** $(-\infty;-1{,}5)$. ◀

**Задача 4.** При каких значениях параметра $a$ уравнение $\left|x^3\right|-x+a=0$ имеет единственное решение? Решить это уравнение для всех найденных значений $a$.

**Решение.**

Перепишем уравнение по-другому:
$\left|x^3\right|-x+a=0 \Leftrightarrow \left|x^3\right|-x=-a$. Теперь построим эскиз графика функции $y(x)=\left|x^3\right|-x=\left[\begin{array}{l} x\left(x^2-1\right), x\ge 0; \\ -x\left(x^2+1\right), x<0. \end{array}\right.$

– рис5

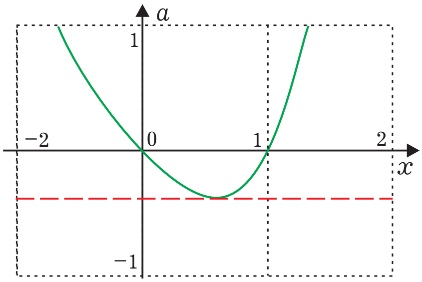



*Рис. 5*

Видно, что функция имеет минимум в области, где $x\ge 0$ и $y(x)=x^3-x$. Уравнение $\left|x^3\right|-x=-a$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $-a=y_{\min}$.
Найдем это значение. Для этого найдем производную
$y'=3x^2-1$, затем критические точки: $y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Но, так как мы рассматриваем функцию при $x\ge 0$, то $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Отсюда

$$y_{\min}=y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3\sqrt{3}}=-a \Leftrightarrow$$

$$a=\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

**Ответ.** $a=\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

**Задача 5.** Найдите наименьшее целое значение параметра $a$, при котором уравнение

$$\log_5\left(x^2+7x+a\right)-1=\log_5(2x+3)$$

не имеет решений.

**Решение.**

Заметим, что

$$\log_5\left(x^2+7x+a\right)-1=\log_5(2x+3) \Leftrightarrow$$

$$\log_5\left(x^2+7x+a\right)=\log_5(10x+15) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2+7x+a=5(2x+3), \\ 2x+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2-3x=15-a, \\ x>-\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Решим задачу графически. Построим эскиз графика параболы $y=x^2-3x\equiv x(x-3)$ – рис.6 и рассмотрим часть при $x>-\frac{3}{2}$.

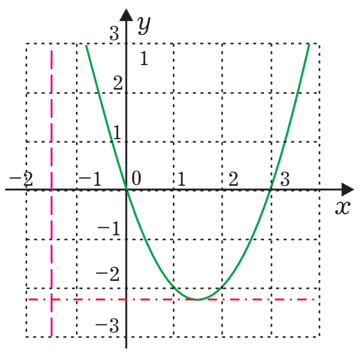



*Рис. 6*

Видно, что система, а, значит, и уравнение, не имеет решений, если $15-a$ меньше значения функции в вершине параболы, т. е. $15-a<\frac{9}{4}-\frac{9}{2}\Leftrightarrow a>17\frac{1}{4}$. Наименьшим целым значением $a$ при этом является число 18.

Обратим внимание на то, что построение графика параболы $y=x^2-3x\equiv x(x-3)$ – без свободного члена! – дает возможность при исследовании корней обойтись без параметра в дискриминанте.

**Ответ.** 18.

**Задача 6.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$7x^2+4-(a+1)\sqrt{7x^2+4}+\frac{2(a+1)^2}{a+7}=0$$

имеет ровно два корня.

**Решение** (два способа)
Сделаем замену переменных:

$$\sqrt{7x^2+4}=t\Leftrightarrow\begin{cases}7x^2+4=t^2,\\ t\geq 2\end{cases}$$

и обозначим, для удобства, $a+1=b$.
Тогда уравнение примет вид системы

$$\begin{cases}t^2-bt+\frac{2b^2}{b+6}=0\\ t>2\end{cases}\quad(1)$$

Уравнение имеет два различных корня, если система (1) имеет единственное решение.

*Первый способ*

1) Очевидно, что, если $b=0$, то уравнение системы $t(t-b)=-\frac{2b^2}{b+6}$ принимает вид $t^2=0\Leftrightarrow t=0<2\Rightarrow\varnothing$.

Построим параболы $y=t(t-b)$ для $b>0$ и $b<0$ – рис. 7-8

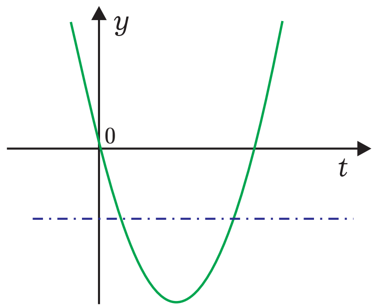



*Рис. 7.* $b>0$

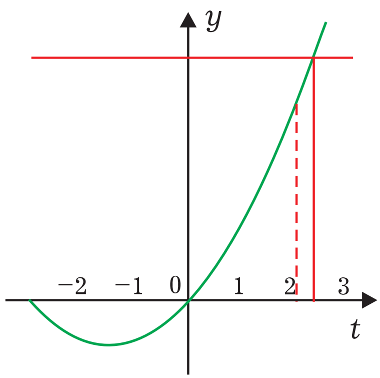



*Рис. 8.* $b<0$

На рис 7, 8 видно, что решение $t>2$ единственно, если, независимо от того, где расположена вершина параболы по отношению к $t=2$, выполнено условие:

$$y(2)<-\frac{2b^2}{b+6}\Leftrightarrow 2(2-b)<-\frac{2b^2}{b+6}\Leftrightarrow$$

$$\frac{b-3}{b+6}>0\Leftrightarrow b\in(-\infty;-6)\cup(3;+\infty)$$

Получаем, что $a\in(-\infty;-7)\cup(2;+\infty)$.

**Ответ.** $a\in(-\infty;-7)\cup(2;+\infty)$

*Второй способ*

1) Очевидно, что, если $b=0$, то уравнение $t^2-bt+\frac{2b^2}{b+6}=0$ принимает вид $t^2=0 \Leftrightarrow t=0<2 \Rightarrow \varnothing$.

2) Пусть теперь $b\neq 0$.

Рассмотрим квадратный трёхчлен $y(t)=t^2-bt+\frac{2b^2}{b+6}$ – ветви вверх.

Тогда уравнение имеет единственное решение, большее 2, если парабола пересекает ось Ох правее $t=2$ и только один раз (рис. 9), т. е.:

$$y(2)=4-2b+\frac{2b^2}{b+6}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-b}{b+6}<0 \Leftrightarrow b\in(-\infty;-6)\cup(3;+\infty) \Rightarrow$$

$$a\in(-\infty;-7)\cup(2;+\infty).$$

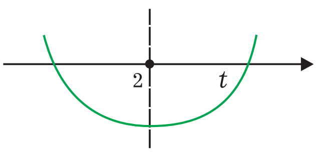



*Рис. 9*

**Ответ.** $(-\infty;-7)\cup(2;+\infty)$.

**Задача 8.** Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x-8}=-ax+3a+2$ имеет единственное решение.

**Решение** (три способа).

*Первый способ*

Пусть $\sqrt{x-8}=t, t\geq 0$, тогда $x=t^2+8$ и уравнение примет вид системы $\begin{cases} t\geq 0, \\ at^2+t+5a-2=0 \end{cases}$.(*)

Теперь задача состоит в том, чтобы найти все $a$, при которых система (*) имеет единственное решение.

1) Очевидно, что сначала надо рассмотреть случай, когда $a=0$.

Тогда $\begin{cases} t\geq 0, \\ t-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=2$ – решение единственно и $t>0$.

Остальные решения будем искать графически.

Для этого перепишем систему в виде

$$\begin{cases} t\geq 0, \\ a\neq 0, \\ at^2+t+5a-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\geq 0, \\ a\neq 0 \\ \left(t+\frac{1}{a}\right)t=\frac{2-5a}{a} \end{cases}$$

и будем строить параболу $y=t\left(t+\frac{1}{a}\right)$ при различных значениях $a\neq 0$.

2) Пусть $a>0$ – рис.10. Тогда, как видно, решение $t\geq 0$ единственно, если выполнены условия:

$$\begin{cases} a>0, \\ \frac{2-5a}{a}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<a\leq\frac{2}{5}$$

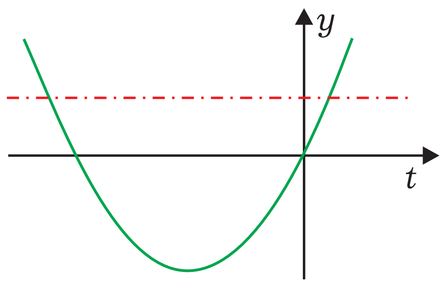



*Рис. 10* $a>0$

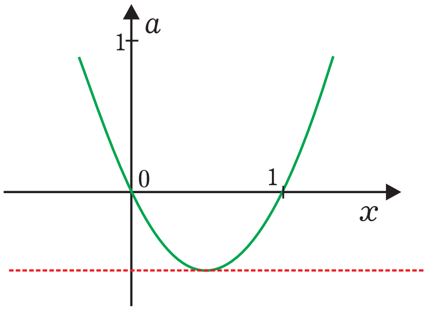



*Рис. 11* $a<0$

3) Пусть теперь $a<0 \Rightarrow \frac{2-5a}{a}<0$ – рис.11

Видно, что решение единственно, если прямая $y=\frac{2-5a}{a}$ касается параболы, т. е. проходит через её вершину:

$$\begin{cases} a<0, \\ y\left(-\frac{1}{2a}\right)=\frac{2-5a}{a} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a<0, \\ -\frac{1}{2a}\left(-\frac{1}{2a}+\frac{1}{a}\right)=\frac{2-5a}{a} \Leftrightarrow \\ 20a^2-8a-1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a=-\frac{1}{10}$$

Объединяя случаи 1) – 3), получаем

**Ответ.** $\left\{-\frac{1}{10}\right\}\cup\left[0;\frac{2}{5}\right]$.

*Второй способ*

Пусть $\sqrt{x-8}=t, t\geq 0$, тогда $x=t^2+8$ и уравнение примет вид $at^2+t+5a-2=0$.

Теперь задача состоит в том, чтобы найти все $a$, при которых уравнение имеет единственное неотрицательное решение.

1) Очевидно, что сначала надо рассмотреть случай, когда $a=0$. Тогда $\begin{cases} t\geq 0, \\ t-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=2$ – решение единственно и $t>0$.

2) $a\neq 0 \Rightarrow at^2+t+5a-2=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow t^2+\frac{t}{a}+5-\frac{2}{a}=0$

Рассмотрим параболу

$y(t)=t^2+\frac{t}{a}+5-\frac{2}{a}$ – ветви вверх.

а) $a>0 \Rightarrow x_{верш}=-\frac{1}{2a}<0$.

Существует единственное решение – рис. 12, если

$$y(0)\leq 0 \Leftrightarrow 5a-2\leq 0 \Leftrightarrow a\leq\frac{2}{5}$$

б) $a<0 \Rightarrow x_{верш}=-\frac{1}{2a}>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y(0)=5-\frac{2}{a}>0$ – рис. 13

Видно, что решение уравнения $t^2+\frac{t}{a}+5-\frac{2}{a}=0$ единственно, если парабола касается оси Ох (рис. 14):

$$D=0 \Leftrightarrow 20a^2-8a-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\frac{1}{2}, \\ a=-\frac{1}{10} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=-\frac{1}{10}$$

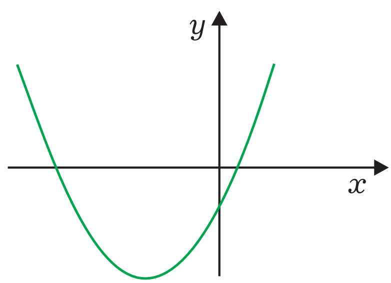



*Рис. 12*

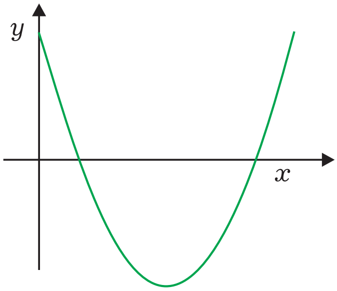



*Рис. 13*

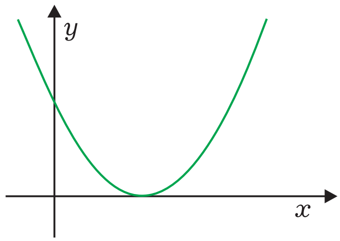



*Рис. 14*

Объединяя случаи 1) и 2) а, б, получаем

**Ответ.** $\left\{-\frac{1}{10}\right\} \cup \left[0;\frac{2}{5}\right]$.

*Третий способ* (с производной)

Построим полупараболу – рис. 15. Затем проведём прямые $y=2$ и $y=-a(x-3)+2$ через точку $(8;0)$. Видно, что они и все прямые между ними пересекают полупараболу в одной точке.

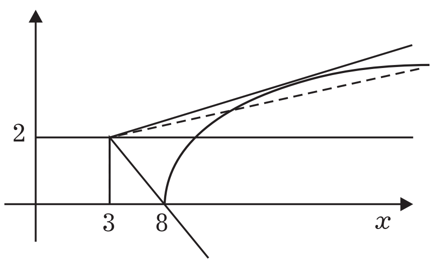



*Рис. 15*

Видно также, что ещё одна прямая пересекает полупараболу в одной точке – это касательная. Найдём значение $a$, при котором прямая $y=-a(x-3)+2$ является касательной:

$$\begin{cases} \sqrt{x-8}=-a(x-a)+2, \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-8}}=-a, \\ a<0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2a}=-a\left(8+\dfrac{1}{4a^2}-3\right)+2, \\ a<0 \end{cases} \Leftrightarrow a=-0{,}1$$

**Ответ.** $\left\{-\frac{1}{10}\right\} \cup \left[0;\frac{2}{5}\right]$.

**Задача 9.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$\log_3\left(x+\sqrt{5-a}\right)+\log_{\frac{1}{3}}(a-2-x)=\log_9 4$$

имеет решение.

**Решение.**

$$\log_3\left(x+\sqrt{5-a}\right)+\log_{\frac{1}{3}}(a-2-x)=\log_9 4 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+\sqrt{5-a}=2(a-2-x), \\ a-2-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{2a-4-\sqrt{5-a}}{3}<a-2 \Rightarrow$$

$$\sqrt{5-a}>2-a$$

Решим неравенство графически. Построим полупараболу $y(a)=\sqrt{5-a}$ и прямую $y(a)=2-a$ – рис.16

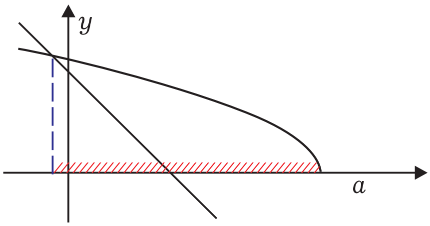



*Рис. 16*

Найдём абсциссу точки пересечения прямой и полупараболы:

$$5-a=4-4a+a^2 \Leftrightarrow a^2-3a-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$$

С рис.16 снимаем

**Ответ.** $\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2};5\right]$.

**Задача 10.** Найдите все положительные значения $a$, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(t-2a+3)^2+(y-a)^2=2{,}25,\\(t+3)^2+(y-a)^2=(a+1)^2\end{cases}$$

имеет единственное решение.

**Решение.**

Пусть $t+3=x \Leftrightarrow t=x-3$ – замена взаимно однозначна. Система примет вид

$$\begin{cases}(x-2a)^2+(y-a)^2=1{,}5^2,\\x^2+(y-a)^2=(a+1)^2\end{cases}$$

Решать будем с привлечением графиков в плоскости $(x;y)$. В системе оба уравнения представляют собой уравнения окружностей, центры которых «двигаются» по одной горизонтали $y=a>0$.

Ясно, что решение одно, если окружности касаются друг друга – рис. 17-19

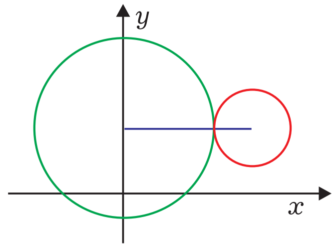



*Рис. 17*

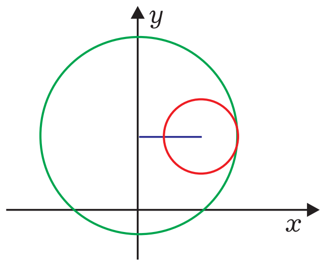



*Рис. 18*

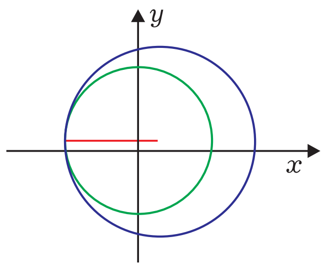



*Рис. 19*

Рассмотрим все три ситуации.

1) $a+1+1{,}5=2a \Leftrightarrow a=2{,}5$ (рис, 17)

2) $a+1-1{,}5=2a \Leftrightarrow a=-0{,}5<0 \Rightarrow \varnothing$ (рис.18)

3) $a+1+2a=1{,}5 \Leftrightarrow a=\frac{1}{6}$ (рис.19)

**Ответ.** $\left\{2{,}5;\frac{1}{6}\right\}$.

**Задача 11.** Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{a-f(x)}=0, \\ y^2+\left(a-5\cdot 10^6\right)y+25\cdot 10^{10}=0, \\ z^2+5\cdot 10^3 z+a=0 \end{cases}$$

где

$$f(x)=|x-1|+\left|x-2^2\right|+\left|x-3^2\right|+\ldots+$$
$$+\left|x-203^2\right|$$

имеет хотя бы одно решение.

**Решение**.

Исследуем сначала более простые уравнения системы.

1) Решение уравнения

$z^2+5\cdot 10^3 z+a=1$ существует, если

$D=625\cdot 10^4-a\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a\leq 625\cdot 10^4=6{,}25\cdot 10^6$

2) Решение уравнения

$y^2+\left(a-5\cdot 10^6\right)y+25\cdot 10^{10}=0$

существует, если

$D=a^2-10^7 a+24\cdot 10^{12}\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a\in\left(-\infty;4\cdot 10^6\right]\cup\left[6\cdot 10^6;+\infty\right).$

Из 1) и 2) следует, что

$a\in\left(-\infty;4\cdot 10^6\right]\cup\left[6\cdot 10^6;6{,}25\cdot 10^6\right]$

3) Осталось выяснить, при каких $a$ уравнение $\sqrt{a-f(x)}=0 \Leftrightarrow f(x)=a$ имеет решение.

Теперь прикинем эскиз графика функции

$$y(x)=|x-1|+\left|x-2^2\right|+\left|x-3^2\right|+\ldots+$$
$$+\left|x-203^2\right|$$

График этой функции – ломаная с 203 (нечётным числом) точками излома.

Заметим, что, если $x>203^2$, то все модули раскрываются со знаком плюс при $x$, и получается прямая с тангенсом угла наклона, равном 203.

Если $202<x<203$, то появится один “минус” – сократится $x$ в сумме слагаемых

$$\left|x-202^2\right|+\left|x-203^2\right|=$$
$$=x-202^2-x+203^2=$$
$$=203^2-202^2=405$$

и тангенс наклона уменьшится на 2: он станет равен 201 и т. д. До тех пор, пока число “минусов” меньше числа “плюсов”, т. е. до $x\in\left(102^2;103^2\right)$, тангенс угла наклона прямых положительный.

Если же $x\in\left(101^2;102^2\right)$, то “минусов ”уже больше, чем “плюсов”, и тангенс наклона прямых становится отрицательным, т. е. в точке $x=102^2$ имеем минимум, равный $f\left(102^2\right)$ – рис. 20.

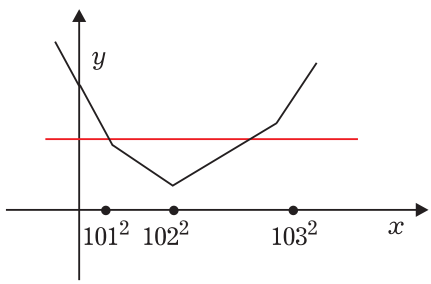



*Рис. 20*

Видно, что уравнение $f(x)=a$ будет иметь хотя бы одно решение тогда и только тогда когда $a\geq f\left(102^2\right)$.

Найдем $f\left(102^2\right)$.

$$f\left(102^2\right)=\left(102^2-1\right)+\left(102^2-2^2\right)+\left(102^2-3^3\right)+\ldots+\left(102^2-101^2\right)+0+$$

$$+\left(103^2-102^2\right)+\left(104^2-102^2\right)+\left(105^2-102^2\right)+\ldots+\left(203^2-102^2\right)=$$

$$=\left(103^2-1\right)+\left(104^2-2^2\right)+\ldots+\left(203^2-101^2\right)=$$

$$=102(104+106+108+\ldots+304)=102\cdot204\cdot101=2101608=$$

$$=2{,}101608\cdot10^6$$

Значит, $a\geq2{,}101608\cdot10^6$.

Соберем все ограничения на $a$:

$$\begin{cases}a\in\left(-\infty;4\cdot10^6\right]\cup\left[6\cdot10^6;6{,}25\cdot10^6\right],\\ a\geq2{,}101608\cdot10^6\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$a\in\left[2{,}101608\cdot10^6;4\cdot10^6\right]\cup\left[6\cdot10^6;6{,}25\cdot10^6\right]$$

**Ответ.**

$\left[2101608;4\cdot10^6\right]\cup\left[6\cdot10^6;6{,}25\cdot10^6\right]$.

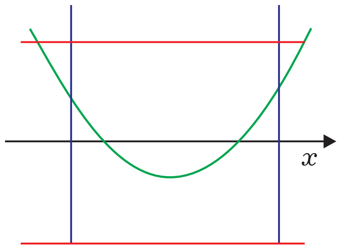



*Рис. 21* $\begin{matrix}a-6\leq4\leq a\Rightarrow\\ y_{верш}>-10\end{matrix}$

**Задача 12.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых неравенство

$$\left|x^2-8x+a+5\right|>10$$

не имеет решений на отрезке $[a-6;a]$

► Рассмотрим функцию

$$y=x^2-8x+a+5=(x-4)^2+a-11.$$

Её график – парабола с вершиной $x_{верш}=4$, $y_{верш}=a-11$.

Решить задачу – это значит найти такие $a$, при которых график параболы $y=x^2-8x+a+5$ «не вылезает» из прямоугольника

$$\begin{cases}|y|\leq10,\\ a-6\leq x\leq a.\end{cases}$$

Начертим все возможные расположения параболы, которая «не вылезает» за пределы прямоугольника – рис. 21-23

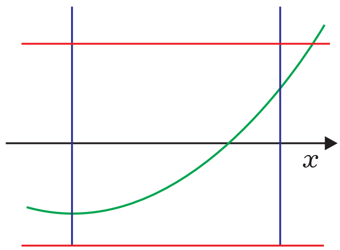



*Рис. 22* $a-6\geq4$

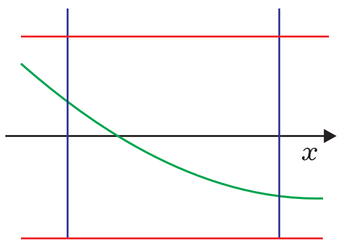



*Рис. 23* $a\leq4$

Видно, что на всех рисунках выполнены условия:

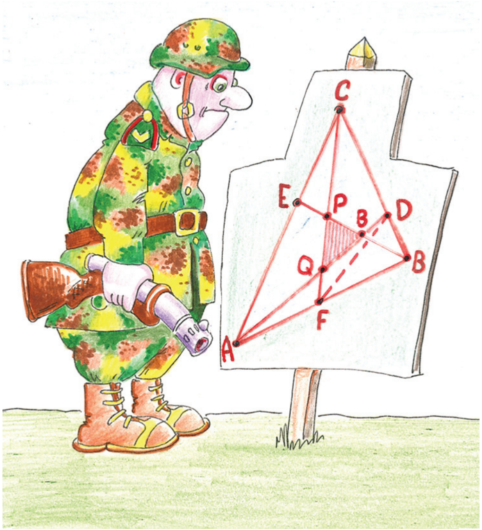
$$\begin{cases} y(a-6)\ge -10, \\ y(a)\ge -10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-19a+99\ge 0 \Leftrightarrow a\in\mathbb{R}, \\ a^2-7a+15\ge 0 \Leftrightarrow a\in\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow a\in\mathbb{R}$$

$$\begin{cases} y(a)\le 10, \\ y(a-6)\le 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-7a-5\le 0, \\ a^2-19a+79\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$a\in \begin{cases} a\in\left[\dfrac{7-\sqrt{69}}{2};\dfrac{7+\sqrt{69}}{2}\right], \\ a\in\left[\dfrac{19-\sqrt{45}}{2};\dfrac{19+\sqrt{45}}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow$$

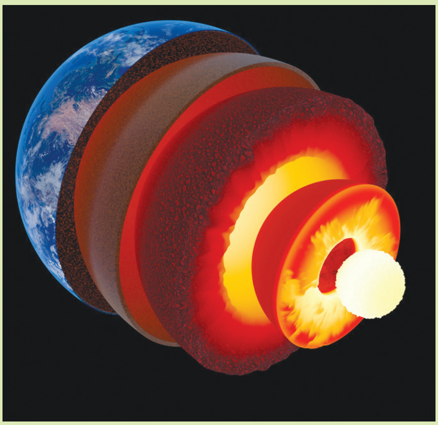
$$\Leftrightarrow a\in\left[\frac{19-\sqrt{45}}{2};\frac{7+\sqrt{69}}{2}\right] \Rightarrow a>4, a<10$$




Отсюда следует, что только рис. 21 удовлетворяет условию задачи.

**Ответ.** $\left[\dfrac{19-\sqrt{45}}{2};\dfrac{7+\sqrt{69}}{2}\right]$. ◄

## Калейдоскоп Калейдоскоп Калейдоскоп



То, что ядро Земли состоит из двух слоев, вещество которых по-разному пропускает сейсмические волны, известно давно. Но если по поводу жидкой природы внешнего ядра сомнений не было, то по поводу состояния внутреннего ядра ученые-геофизики спорят уже более 80 лет. Наконец получены убедительные доказательства того, что внутреннее ядро твердое. Но не совсем: оно обладает определенными признаками пластичности.

Схематическое изображение внутренних оболочек Земли: земной коры, верхней мантии, нижней мантии, внешнего ядра и внутреннего ядра. Рисунок с сайта pinterest.com

Автор: Владислав Стрекопытов

https://elementy.ru/novosti_nauki/433361/Vnutrennee_yadro_Zemli_deystvitelno_tverdoe_khotya_i_nemnogo_plastichnoe