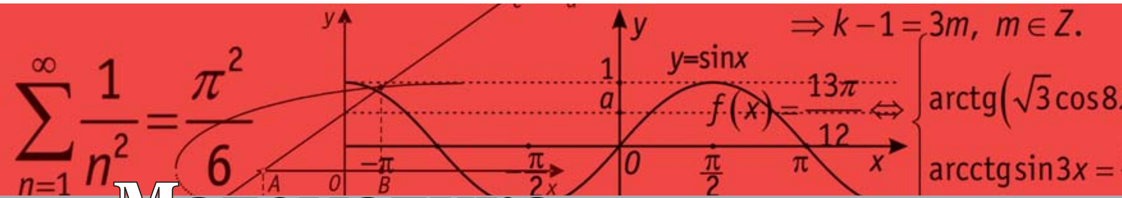

Пиголкина Татьяна Сергеевна
Выпускница МФТИ. Доцент,
заслуженный работник высшей школы,
заслуженный преподаватель МФТИ.

Геометрия ЕГЭ-2018

Задачи ЕГЭ этого года оказались достаточно разнообразными и по тематике, и по уровню сложности. В статье приведены решения десяти задач, начиная с основной волны 1-го июня и заканчивая резервными задачами 25 июня. Решения задач можно было бы записать короче, но автору хотелось сделать их ясными и понятными.

Задача 1. Биссектриса угла D параллелограмма $ABCD$ пересекает продолжение стороны AB в точке F (точка B между A и F). В треугольник ADF вписана окружность, которая касается стороны AD в точке E, а стороны AF в точке K (рис. 1).

а) Найти длину отрезка FD, если $AD = 9$, $KE = 4$ и $AE < ED$.

б) Найти AB, если дополнительно известно, что окружность касается стороны BC параллелограмма $ABCD$.

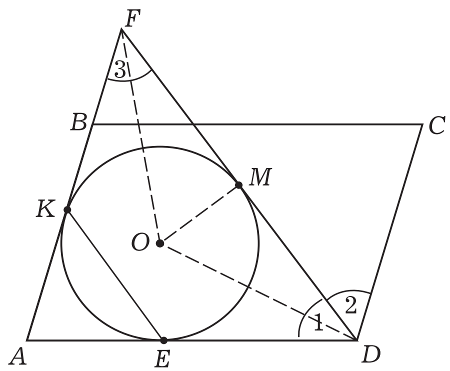

Рис. 1

Решение. *а*) DF – биссектриса угла ADC, $\angle 1 = \angle 2$. Прямая DF пересекает параллельные прямые DC и AB, накрест лежащие углы равны: $\angle 2 = \angle 3$, следовательно, $\angle 3 = \angle 1$, треугольник DAF равнобедренный, $AD = AF$.

Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник, касается основания в его середине. Действительно, если O – центр окружности, то FO и DO – биссектрисы равных углов, $\angle DFO = \angle FDO$; радиус OM перпендикулярен касательной, значит, OM – высота и медиана равнобедренного треугольника DOF, $FM = DM$. Пусть

$FM = x$, тогда $DM = x$ и по свойству касательных $FK = x$, $DE = x$ и $AK = AE$.

Равнобедренные треугольники EAK и DAF с общим углом при вершине A подобны, следовательно,

$$\frac{AE}{AD} = \frac{KE}{FD} \Leftrightarrow \frac{9-x}{9} = \frac{4}{2x} \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 9x + 18 = 0 \Rightarrow (x-6)(x-3) = 0.$$

По условию $AE < ED$, т.е. $9 - x < x$ $\Rightarrow x > 4{,}5$. Итак $x = 6$, $FD = 2x = 12$.

б) Окружность касается стороны BC параллелограмма (рис. 2). Четырёхугольник $ABND$ – трапеция, в которую вписана окружность, значит, суммы противолежащих сторон равны: $BN + AD = AB + ND$.

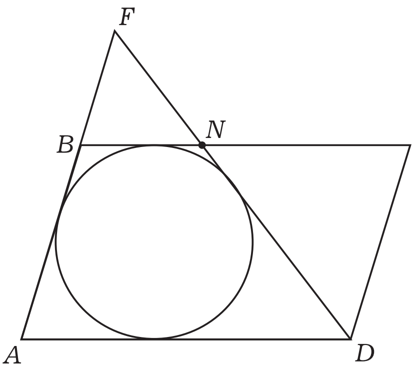

Рис. 2

Из $BN \parallel AD$ следует, что $\Delta FBN \sim \Delta FAD$. Пусть $BN = y$. Из подобия следует $\frac{BN}{AD} = \frac{FB}{AF} = \frac{FN}{FD} \Leftrightarrow$ $\frac{y}{9} = \frac{FB}{9} = \frac{FN}{12} \Rightarrow$ $FB = y$, $FN = \frac{4}{3}y$, тогда $AB = 9 - y$ и $ND = 12 - \frac{4}{3}y$.

Из равенства сумм противолежащих сторон

$$y + 9 = (9 - y) + \left(12 - \frac{4}{3}y\right)$$

получаем $\frac{10}{3}y = 12$, $y = 3{,}6$. Отсюда находим $AB = 9 - y = 5{,}4$.

Ответ. $FD = 12$, $AB = 5{,}4$.

Задача 2. Две окружности ω_1 и ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Продолжение диаметра CA пересекает окружность ω_2 в точке D, а продолжение хорды CB пересекает окружность ω_2 в точке E (рис. 3).

а) Доказать, что $\Delta CBD \sim \Delta O_1AO_2$.

б) Найти длину хорды AD, если $R_2 = 4R_1$, $AB = 2$ и угол DAE равен углу BAC.

Решение. *а*) Угол ABC прямой, опирается на диаметр AC, следовательно, $\angle ABE = 90°$ и AE – диаметр окружности ω_2.

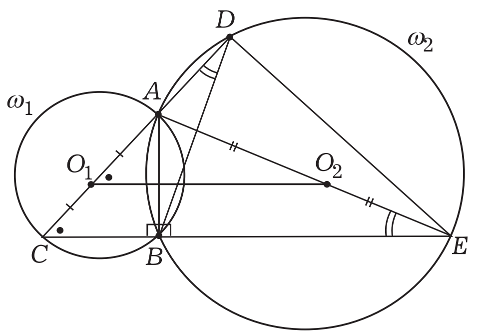

Рис. 3

Вписанные углы ADB и AEB опираются на одну дугу, они равны. Далее, отрезок O_1O_2 – средняя линия треугольника CAE. По теореме о средней линии $O_1O_2 \parallel CE$, поэтому $\angle AO_2O_1 = \angle AEC$ и $\angle AO_1O_2 = \angle ACE$, что равносильно $\angle AO_1O_2 = \angle ACB$ и $\angle AO_2O_1 = \angle AEB = \angle ADB$. По двум углам $\Delta CBD \sim \Delta O_1AO_2$, ч.т.д.

б) Пусть $\angle BAC = \varphi$, тогда по условию б) $\angle DAE = \varphi$. Из прямоугольного треугольника ABC следует $AB = 2R_1 \cdot \cos\varphi$, так как $AB=2$, то $2 = 2R_1 \cos\varphi \Leftrightarrow R_1 \cos\varphi = 1$.

Угол ADE опирается на диаметр AE, $\angle DAE = \varphi$. Из прямоугольного треугольника ADE выражаем

$$AD = AE\cos\varphi \Leftrightarrow AD = 2R_2 \cos\varphi \Leftrightarrow$$

$$AD = 8R_1 \cos\varphi = 8, \text{ так как } R_1 \cos\varphi = 1.$$

Ответ. 8.

Задача 3. Окружность касается стороны AB прямоугольника $ABCD$ в точке M, касается продолжения стороны CB за точку B и пересекает продолжение стороны DA за точку A в точках Q и P (P между Q и A). Точка Q лежит на прямой CM (рис. 4).

а) Доказать, что $\angle AMP = \angle BCM$.

б) Найти сторону AD, если известно, что $BM = 17$, $AB = 25$.

Решение. а) Из параллельности прямых BC и QD следует, что накрест лежащие углы BCQ и CQD равны, значит, равны углы BCM и MQA.

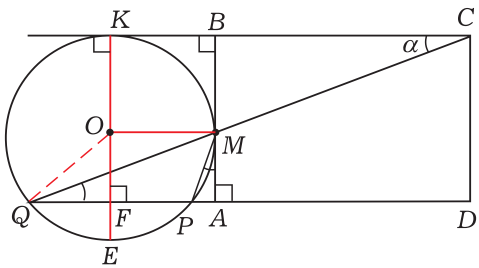

Рис. 4

Угол AMP между касательной MA и хордой MP измеряется половиной угловой меры дуги MP и потому равен вписанному углу MQP. Таким образом, имеем равенство

$\angle AMP = \angle MQP = \angle MQA = \angle BCM$, ч.т.д.

б) Имеем $BM = 17$, $AM = 8$.

Окружность вписана в прямой угол KBM (K – точка касания прямой BC). Если O – центр окружности, то $OK \perp KB$, $OM \perp BM$, $OK = OM$, следовательно, $OKBM$ – квадрат. Если $BM = 17$, то радиус окружности $R = OK = 17$ и $KB = BM = OM = 17$.

Пусть диаметр KF пересекает хорду QP в точке F, тогда $OF \perp QP$, $QF = FP$, $FOMA$ – прямоугольник, поэтому $OF = MA$, $OM = FA = R$. Из прямоугольного треугольника OFQ находим $QF = \sqrt{OQ^2 - OF^2} = \sqrt{R^2 - MA^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$. Итак, $BM = BK = 17$, $QA = QF + FA = QF + KB = 15 + 17 = 32$.

Далее, $\Delta BCM \sim \Delta AQM$,

$$\frac{BC}{QA} = \frac{BM}{AM} \Rightarrow BC = 32 \cdot \frac{17}{8} = 68.$$

Ответ. 68.

Примечание. Если решение основывать на доказанном в пункте а) равенстве углов, а также на подобии $\Delta AMP \sim \Delta AQM \sim \Delta BCM$, то такое решение содержит больше вычислений.

Задача 4. Окружность с центром O_1 касается оснований BC, AD и боковой стороны AB трапеции $ABCD$; окружность с центром O_2 касается сторон BC, CD и AD этой же трапеции. Известно, что $AB = 10$, $BC = 9$, $CD = 30$ и $AD = 39$.

а) Доказать, что отрезок O_1O_2 параллелен основаниям трапеции.

б) Найти длину отрезка O_1O_2.

Решение. а) Окружность с центром O_1, касающаяся оснований BC, AD и боковой стороны AB, не может касаться стороны CD, так как тогда окружность была бы вписана в трапецию $ABCD$, для которой должно выполняться условие $BC + AD = AB + CD$. Но это равенство для данной трапеции не выполняется:

$$BC + AD = 48, \quad AB + CD = 40.$$

Окружность с центром O_2 по той же причине не касается стороны AB. Точки O_1 и O_2 не совпадают, O_1O_2 – отрезок ненулевой длины.

Обе окружности (с центром O_1 и с центром O_2) касаются обоих оснований, т.е. касаются двух параллельных прямых BC и AD. Диаметры обеих окружностей одинаковы – равны расстоянию между прямыми BC и AD и равны высоте h трапеции $ABCD$. Радиусы их равны друг другу и равны $\frac{1}{2}h$, т.е. центры их отстоят на равном расстоянии от оснований, и потому $O_1O_2 \parallel AD$, $O_1O_2 \parallel BC$ и отрезок O_1O_2 лежит на средней линии трапеции (которая параллельна основанию и делит высоту трапеции пополам).

б) Пусть $CK \parallel AB$, тогда $ABCK$ – параллелограмм ($BC \parallel AK$, $AB \parallel KC$), $KC = 10$, $AK = 9$, тогда $KD = 30$ (рис. 5).

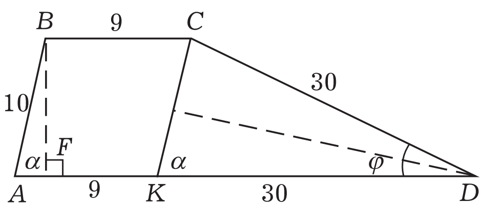

Рис. 5

Треугольник CDK равнобедренный Введём обозначения $\alpha = \angle CKD$, $\varphi = \angle CDK$. Находим

$$\cos\alpha = \frac{CK/2}{KD} = \frac{1}{6}, \qquad \sin\alpha = \frac{\sqrt{35}}{6};$$

$$\cos\varphi = \cos(180° - 2\alpha) = -\cos 2\alpha = 1 - 2\cos^2\alpha = \frac{17}{18},$$

$$\sin\varphi ... = 1 - 2\cos^2\alpha = \frac{17}{18},$$

тогда $\sin\varphi\sqrt{\left(1-\frac{17}{18}\right)\left(1+\frac{17}{18}\right)} = \sqrt{\frac{35}{18}}$.

Высота трапеции равна

$$h = BF = AB \cdot \sin\alpha = \frac{5}{3}\sqrt{35},$$

радиусы окружностей

$$R = \frac{1}{2}h = \frac{5}{6}\sqrt{35}.$$

Центры O_1 и O_2 лежат на средней линии MN трапеции (рис. 6). Пусть L и K – точки касания сторон AB и CD окружностями с центрами O_1 и O_2 соответственно. Так как $MN \parallel AD$, то $\angle BMO_1 = \alpha$ и $\angle CNO_2 = \varphi$, а

$$MN = \frac{BC + AD}{2} = 24.$$

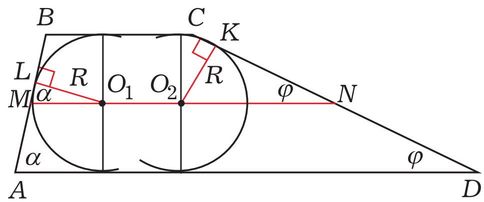

Рис. 6

Из прямоугольного треугольника MO_1L имеем

$$MO_1 = \frac{LO_1}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin\alpha}, \quad MO_1 = 5,$$

а из треугольника O_2NK находим

$$NO_2 = \frac{KO_2}{\sin\varphi} = \frac{R}{\sin\varphi}, \quad NO_2 = 15.$$

Расстояние между центрами

$$O_1O_2 = MN - (MO_1 + NO_2) =$$
$$= 24 - (5 + 15) = 4.$$

Ответ. 4.

Задача 5. На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC отложены равные отрезки $AP = CQ$.

а) Доказать, что средняя линия треугольника, параллельная основанию BC, проходим через середину отрезка PQ.

б) Найти длину отрезка прямой PQ, заключённого внутри окружности, вписанной в треугольник ABC, если

$$AB = AC = BC = 3\sqrt{2} \text{ и } CQ = AP = \sqrt{2}.$$

Решение. *а*) Введём обозначение $b = AC = AB$, и пусть $AP = c < \frac{b}{2}$ (если $AP > \frac{b}{2}$, то получим геометрическую картину, симметричную относительно высоты AD треугольника ABC).

Проведём среднюю линию MN и через точку Q проведём прямую, параллельную стороне AB до пересечения в точке F с прямой MN. Точку пересечения прямых PQ и MF обозначим буквой T.

Треугольник BAC равнобедренный, углы при его основании равны: $\angle 2 = \angle 1$. По построению четырёхугольник $BMFE$ – параллелограмм, его противолежащие углы равны: $\angle 3 = \angle 1$ (рис. 7).

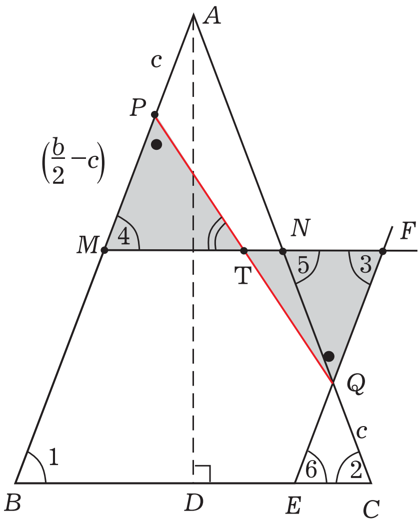

Рис. 7

Из параллельности $MF \parallel BC$ следует равенство соответственных углов $\angle 4 = \angle 1$, равенство накрест лежащих углов $\angle 5 = \angle 2$ и $\angle 6 = \angle 3$. Таким образом,

$$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 5 = \angle 6.$$

Делаем выводы: треугольник CQE равнобедренный, $QE = QC = C$; треугольник NQF также равнобедренный, $QF = QN$. Так как $NC = \frac{b}{2}$ и $QC = c$, то $QN = \frac{b}{2} - c$ и $QF = \frac{b}{2} - c$.

Рассмотрим треугольники MPT и FQT: углы при вершине T равны как вертикальные; $\angle 3 = \angle 4$ как уже было доказано, следовательно, равны друг другу и их третьи углы: $\angle MPT = \angle FQT$. Кроме того, $MP = \frac{b}{2} - c = FQ$. По стороне и двум прилежащим углам $\triangle MPT = \triangle FQT$, откуда $PT = QT$. Это и означает, что средняя линия MN $(MN \parallel BC)$ проходит через середину отрезка PQ.

б) Имеем $AB = AC = BC = a$,

$$a = 3\sqrt{2} \text{ и } CQ = AP = \sqrt{2},$$

т.е. $CQ = AP = \frac{1}{3}a$ (рис. 8).

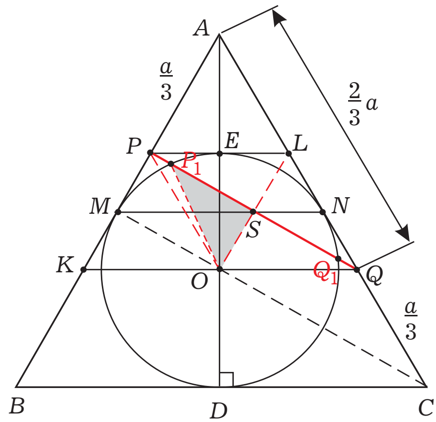

Рис. 8

Треугольник ABC равносторонний со стороной a, его высоты (они же медианы и биссектрисы) равны $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, точка их пересечения Q есть центр вписанной в треугольник окружности, радиус которой r равен

$\frac{1}{3}h$ (по свойству медиан). Выберем высоту $h = AD$, $OD = r = \frac{1}{3}h$.

Пусть $PL \parallel BC$, $\triangle PAL \sim \triangle BAC \Rightarrow$ треугольник PAL – равносторонний,

$$AP = PL = AL = \frac{1}{3}a.$$

Аналогично, если $QK \parallel CB$, то треугольник AKQ равносторонний, $AQ = KQ = AK = \frac{2}{3}$, а тогда $PK = \frac{1}{3}a$ и $BK = \frac{1}{3}a$.

Из $AP = PK = KB$ и $PL \parallel KQ \parallel BC$ следует (по теореме Фалеса), что $AE = EO = OD = r$; DE – диаметр, $PL \perp AD$ (так как $PL \parallel BC$ и $BC \perp AD$), значит, окружность касается прямой PL в точке E.

Далее, $PL \parallel OQ$, $PL = OQ = \frac{a}{3}$, следовательно, $OPLQ$ – параллелограмм, но $PL = LQ = \frac{a}{3}$, следовательно, $OPLQ$ – ромб. Его диагонали, пересекаясь, делятся пополам и перпендикулярны друг другу, $PQ \perp LO$, а середина отрезка PQ (и середина отрезка LO) есть точка T на средней линии MN, т.е. точки S и T совпадают,

$$LS = LT = OS = \frac{1}{2}LO = \frac{1}{2}LQ = \frac{a}{6}$$

(острый угол ромба равен $60°$, ΔOLQ равносторонний).

Радиус, перпендикулярный хорде, делит её пополам, значит, $SP_1 = SQ_1$. Из прямоугольного ΔSP_1O

$$SP_1 = \sqrt{(OP_1)^2 - (OS)^2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{6}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 - \left(\frac{a}{6}\right)^2} = \frac{a}{6}\sqrt{2}.$$

Подставляем значение $a = 3\sqrt{2}$ и получаем $P_1Q_1 = 2SP_1 = \frac{3\sqrt{2}}{3}\sqrt{2} = 2.$

Ответ. 2.

Задача 6. В треугольнике ABC угол BAC равен α, сторона BC является хордой окружности с центром в точке O радиуса R, проходящего через центр J вписанной в треугольник ABC окружности (рис. 9).

а) Доказать, что около четырёхугольника $ABOC$ можно описать окружность.

б) Известно, что в четырёхугольник $ABOC$ можно вписать окружность. Найти её радиус r, если $R = 6$ и $\alpha = 60°$.

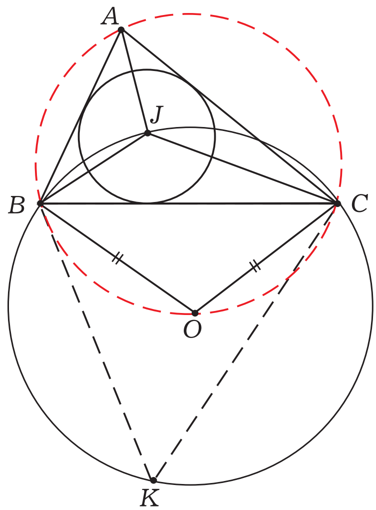

Рис. 9

Решение. *а*) Центр вписанной окружности – это точка пересечения биссектрис треугольника AJ, BJ и CJ – биссектрисы углов A, B и C. Очевидно, что $\angle AJB = 180° - \frac{1}{2}\angle A - \frac{1}{2}\angle B$, $\angle AJC = 180° - \frac{1}{2}\angle A - \frac{1}{2}\angle C$, поэтому

$$\angle BJC = 360° - \angle AJB - \angle AJC =$$
$$= \angle A + \frac{1}{2}(\angle B + \angle C).$$

Угол BJC – вписанный в окружность с центром в точке O радиуса R. Выберем точку K на этой окружности на дуге BC, не содержащей точку J. Четырёхугольник $KBJC$ вписан в окружность, следовательно, сумма $\angle BJC + \angle BKC = 180°$, откуда

$$\angle BKC = 180° - \angle A - \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) =$$
$$= \angle B + \angle C - \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C).$$

Вписанный угол BKC и центральный угол BOC опираются на одну дугу BJC, поэтому $\angle BOC = 2\angle BKC$, $\angle BOC = \angle B + \angle C$.

В четырёхугольнике $ABOC$ сумма противолежащих углов BAC и BOC равна $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, значит, около него можно описать окружность.

б) Заметим, что эта окружность описана и около треугольника ABC, которая определяется единственным образом (рис. 10). Равные хорды BO и OC стягивают равные дуги, значит, точка O – середина дуги BOC. Угол BAC опирается на дугу BOC, на половины этой дуги опираются равные углы BAO и CAO,

$$\angle BAO = \angle CAO = \frac{1}{2}\angle BAC.$$

Это означает, что AO – биссектриса угла BAC.

По условию в четырёхугольник $ABOC$ можно вписать окружность, поэтому выполняется равенство $AB + OC = AC + OB$. В данном случае $OC = OB$, поэтому $AB = AC$. Треугольник BAC равнобедренный, BC – основание, $\angle BAC = 60°$, поэтому

$$\angle ABC = \angle ACB = \angle B + \angle C = \frac{180° - 60°}{2} = 60° \Rightarrow$$

треугольник ABC равноугольный, равносторонний.

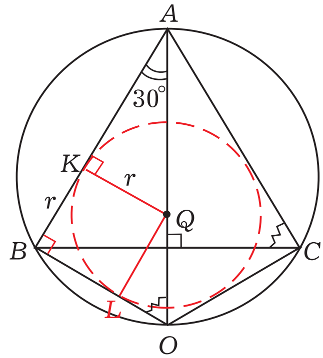

Рис. 10

Имеем:

$$\angle BAC = 60° \Rightarrow \angle BOC = 120°;$$

AO – биссектриса угла BAC $\Rightarrow$ центр Q вписанной окружности лежит на отрезке AO.

Заметим, что

$$BC = 2BO \cdot \sin 60° = 6\sqrt{3},$$
$$\angle BAO + \angle BOA = 90°,$$

значит, угол ABO прямой. Если $QK \perp AB$, $QL \perp BO$, то $BKQL$ – квадрат со стороной r, r – радиус вписанной окружности.

Из треугольника AKQ находим $AK = r \cdot \mathrm{ctg}\,30° = \sqrt{3} \cdot r$, тогда

$$AB = r + \sqrt{3}r = r\left(\sqrt{3} + 1\right),$$

$$r = \frac{AB}{\sqrt{3}+1} = \frac{BC}{\sqrt{3}+1} = \frac{6\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}{3-1} =$$
$$= 3\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right) = 3\left(3-\sqrt{3}\right).$$

Можно найти радиус r иначе:

$$S_{ABOC} = \frac{1}{2}AO \cdot BC \text{ (так как } AO \perp BC\text{)},$$

$$S_{ABOC} = \frac{1}{2}r(AB + AC + BO + CO),$$

и надо вычислить только AO.

Ответ. $3\left(3-\sqrt{3}\right)$.

Задача 7. Точка M лежит на стороне BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$, $AB = BM$, $DC = CM$. Биссектрисы углов ABC и BCD пересекаются в точке P, лежащей на стороне AD (рис. 11).

а) Доказать, что четырёхугольник $ABCD$ – трапеция.

б) Найти площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $BM:MC = 1:3$ и площадь четырёхугольника, ограниченного прямыми AM, MD, BP и CP, равна 18.

Решение. *а)* Проведём отрезок MP. В треугольниках ABP и MBP стороны AB и BM равны, сторона BP общая, равны углы ABP и $MBP \Rightarrow$ $\Delta ABP = \Delta MBP \Rightarrow \angle BAP = \angle BMP$.

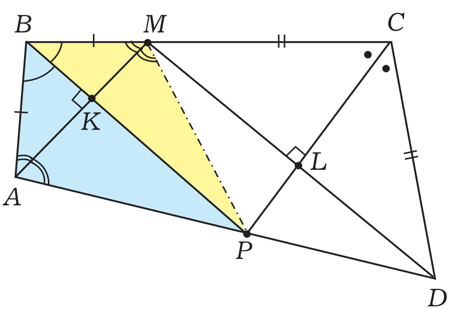

Рис. 11

Такие же рассуждения устанавливают равенство

$$\Delta DCP = \Delta MCP \Rightarrow \angle CDP = \angle CMP.$$

Сумма углов BMP и CMP равна развёрнутому, значит, и сумма равных им углов $\angle BAP + \angle CDP = 180°$, т.е. $\angle BAD + \angle CDA = 180°$. Сумма внутренних односторонних углов при пересечении прямых AB и DC прямой AD равна 180°, следовательно, $AB \parallel CD$, $ABCD$ – трапеция. Заметим, что сумма углов B и C трапеции $ABCD$ также равна 180°.

б) В равнобедренных треугольниках ABM и DCM (рис. 12) биссектрисы BK и CL являются высотами и медианами, следовательно, $AK = KM$ и $ML = LD$.

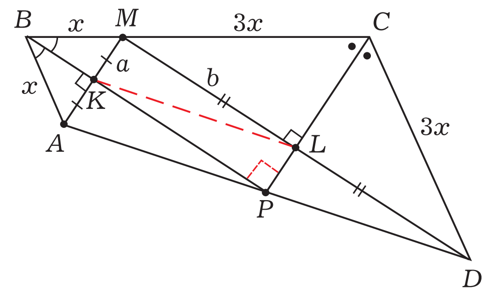

Рис. 12

Далее заметим, что

$$\angle BMK = 90° - \frac{\angle B}{2}, \quad \angle CML = 90° - \frac{\angle C}{2},$$

поэтому

$$180° - \left(90° - \frac{\angle B}{2} + 90° - \frac{c}{2}\right) = \frac{\angle B + \angle C}{2}.$$

Сумма углов B и C, т.е. углов ABC и BCD, равна 180° (сумма односторонних углов при параллельных прямых AB и DC), тогда

$$\angle AMD = \angle KML = 90°.$$

В четырёхугольнике $KMLP$ три угла прямые, значит и угол KPL равен 90°. Таким образом, четырёхугольник $KMLP$ – прямоугольник. Пусть $MK = a$, $ML = b$. Две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны, поэтому $BP \parallel MD$ и $AM \parallel PC \Rightarrow \Delta BKM \sim \Delta MCL$, и

$$\frac{MK}{CL} = \frac{BK}{ML} = \frac{BM}{CM} \Leftrightarrow \frac{a}{CL} = \frac{BK}{b} =$$

$$= \frac{x}{3x} \Rightarrow CL = 3a, \quad BK = \frac{1}{3}b.$$

Считаем площади:

$$S_{AMP} = \frac{1}{2} AM \cdot MD = \frac{1}{2} 2a \cdot 2b = 2ab = 36,$$

так как $S_{KMLP} = 18$, т.е. $ab = 18$.

Далее,

$$S_{ABM} = \frac{1}{2} AM \cdot BK = \frac{1}{2} 2a \cdot \frac{1}{3} b = \frac{1}{3} ab = 6,$$

$$S_{CDM} = \frac{1}{2} DM \cdot CL = \frac{1}{2} 2b \cdot 3a = 3ab = 54,$$

$$S_{ABCD} = S_{AMD} + S_{ABM} + S_{CDM} =$$
$$= 36 + 6 + 54 = 96.$$

Другой способ вычисления площади: проводим через точку M высоту трапеции, используем подобие прямоугольных треугольников с гипотенузами BM и ME и устанавливаем, что площадь треугольника AMD составляет $3/8$ площади трапеции.

Ответ. 96.

Задача 8. Окружность проходит через вершины A, B и D параллелограмма $ABCD$ (рис. 13), пересекает сторону BC в точке E, а сторону CD в точке F.

а) Доказать, что отрезки AE и AF равны.

б) Найти длины отрезков AD и CF, если

$AB = 10$, $BE = 8$ и $\cos(\angle BAD) = 0{,}2$.

Решение. *а*) На хорды AE и AF опираются углы ABE и ADF; $\angle ABE = \angle ABC$, $\angle ADF = \angle ADC$, углы ABC и ADC равны как противолежащие углы параллелограмма. По формуле $a = 2R\sin\alpha$, где a – хорда окружности радиуса R, α − величина вписанного угла, опирающегося на хорду, следует, что

$$AE = 2R\sin(\angle ABE) =$$
$$= 2R\sin(\angle ADE) = AF,$$

$AE = AF$, ч.т.д.

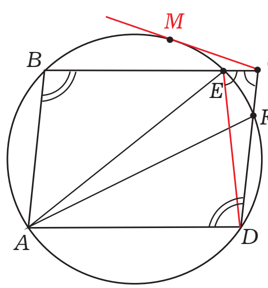

Рис. 13

б) Проведём хорду DE, четырёхугольник $ABED$ – трапеция, она вписана в окружность, следовательно, она равнобедренная, $AB = DE$. Треугольник CDE равнобедренный $(CD = AB = DE)$, $DE = CD = 10$, углы при основании CE равны, при этом $\angle ECD = \angle BCD = \angle BAD$. Находим $CE = 2CD \cdot \cos(\angle BAD) = 2 \cdot 10 \cdot \frac{2}{10} = 4$ и $AD = BC = BE + EC = 8 + 4 = 12$.

Из точки C к окружности проведены две секущие: CB, пересекающая окружность в точке E, и CD, пересекающая окружность в точке F. Пусть CM – касательная к окружности. По теореме о касательной и секущей имеем $CM^2 = CE \cdot CB$ и $CM^2 = CF \cdot CD$, откуда следует

$$CE \cdot CB = CF \cdot CD \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4 \cdot 12 = CF \cdot 10 \Leftrightarrow CF = 4{,}8.$$

Ответ: $AD = 12$, $CF = 4{,}8$.

Задача 9. Точка E – середина стороны BC квадрата $ABCD$ (рис. 14). Серединные перпендикуляры отрезков AE и CE пересекаются в точке O.

а) Доказать, что $\angle AOE = 90°$.

б) Найти отношение $BO:OD$.

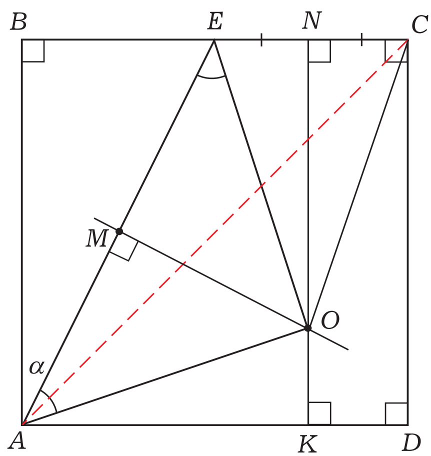

Рис. 14

Решение. *а*) Серединный перпендикуляр отрезка есть геометрическое место точек, равноудалённых от концов отрезка, поэтому $AO = OE$ и $OE = OC$. Точка O одинаково удалена от точек A, E и C, поэтому точка O – центр окружности, описанной около треугольника AEC. В этой окружности угол ACE вписанный, AC – диагональ квадрата, $\angle ACE = 45°$, а $\angle AOE$ центральный. Вершины C и O углов ACE и AOE лежат по одну сторону от прямой AE, следовательно, $\angle AOE = 2\cdot\angle ACE$, т.е. $\angle AOE = 90°$, ч.т.д.

б) Как мы только что доказали, треугольник AOE прямоугольный равнобедренный, углы при основании AE равны 45°. Пусть $\alpha = \angle BAE$ (тогда $\angle BEA = 90° - \alpha$), и пусть прямая NO пересекает сторону AD в точке K. Четырёхугольник $NCDK$ – прямоугольник, $KD = NC$.

Найдём углы прямоугольных треугольников AOK и EON.

В треугольнике AOK:

$$\angle OAK = \angle BAD - \angle BAE - \angle EAO =$$
$$= 90° - \alpha - 45° = 45° - \alpha,$$

значит, $\angle AOK = 45° + \alpha$.

В треугольнике EON:

$$\angle OEN = 180° - \angle BEA - \angle AOE =$$
$$= 180° - (90° - \alpha) - 45° = 45° + \alpha,$$

тогда $\angle EON = 45° - \alpha$.

В треугольниках AOK и EON также равны гипотенузы $AO = EO$, следовательно,

$$\Delta AOK = \Delta EON \Rightarrow OK = EN.$$

Так как $EN = NC$, $NC = KD$, то прямоугольный треугольник OKD равнобедренный, $\angle ODK = 45°$. Диагональ квадрата BD образует со стороной AD угол BDA, равный 45°. Таким образом, $\angle BDA = \angle ODK$, это означает, что точка O лежит на диагонали BD.

Если сторону квадрата $ABCD$ обозначить буквой a, то

$$KD = NC = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a}{4},\ OD = \frac{a}{4}\sqrt{2},$$
$$BD = a\sqrt{2}.$$

Находим

$$\frac{BO}{OD} = \frac{BD - OD}{OD} = 3,\ BO : OD = 3 : 1.$$

Ответ. 3 : 1.

Задача 10. Около остроугольного треугольника ABC описана окружность с центром в точке O. Высота BH, проведённая к стороне AC равна отрезку BO.

а) Доказать, что $\angle ABH = \angle CBO$.

б) Найти BH, если $AB = 16$, $BC = 18$.

Решение. *а*) Пусть R – радиус окружности, описанной около треугольника ABC, $BO = R$. Равенство $BH = BO$ означает, что $BH = R$, т.е. точка H лежит на окружности с центром в точке B радиуса R.

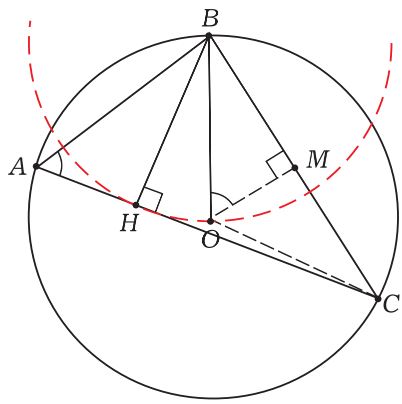

Рис. 15

Строим некоторую окружность с центром в точке O, считаем, что радиус окружности равен R. Отмечаем точку B на окружности и радиусом R проводим дугу с центром в точке B. Точка H должна лежать на этой дуге, а сторона AC касается этой дуги в точке H.

Пусть $\angle BAC = \alpha$. Треугольник ABH прямоугольный, $\angle ABH = 90° - \alpha$.

Угол BAC вписанный, по условию острый, значит, центр O и вершина A лежат по одну сторону от прямой BC, поэтому центральный угол BOC и вписанный угол BAC опираются на одну дугу, $\angle BOC = 2\angle BAC = 2\alpha$.

Треугольник BOC равнобедренный $(BO = OC = R)$, $\angle CBO = \angle BCO = \frac{1}{2}(180° - 2\alpha)$, т.е. $\angle CBO = 90° - \alpha$. (ч.т.д.). Угол ABH также равен 90°– α (ч.т.д.)

б) Пусть $AB = 16$, $BC = 18$.

В треугольнике ABH:

$$BH = R,\ AB = 16 \Rightarrow R = 16\sin\alpha.$$

В треугольнике BOC:

$$BO = OC = R,$$

если $OM \perp BC$, то $BM = MC$ и $\angle BOM = \angle COM$, т.е. $\angle BOM = \alpha$ и

$$BM = BO\sin\alpha \Rightarrow 9 = R\sin\alpha.$$

Подставляем выражения для R во второе равенство, получаем

$$9 = 16\sin^2\alpha \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{3}{4},$$

тогда

$$R = 16\sin\alpha = 12,\ BH = R = 12.$$

Ответ. 12.

Мудрые мысли Мудрые мысли Мудрые мысли

Необходимо учиться на чужих ошибках. Невозможно прожить так долго, чтобы совершить их все самостоятельно.

Х. Дж. Риковер

Глядя в прошлое – снимите шляпу, глядя в будущее – засучите рукава!

Восточная пословица

У успешных людей есть и страх, и сомнения, и тревоги. Они просто не позволили этим чувствам остановить их.

Т. Харв Экер

Величайшая слава не в том, чтобы никогда не ошибаться, но в том, чтобы уметь подняться всякий раз, когда падаешь.

Конфуций

Только наука изменит мир. Наука в широком смысле: и как расщеплять атом, и как воспитывать людей. И взрослых тоже.

Н. М. Амосов

Задача учёных заключается не только в развитии научных исследований, но и в борьбе за их использование на благо общества, на благо всех людей мира.

И. И. Артоболевский

Наука – не предмет чистого мышления, а предмет мышления, постоянно вовлекаемого в практику и постоянно подкрепляемого практикой. Вот почему наука не может изучаться в отрыве от техники.

Д. Бернал