Прокофьев Александр Александрович
*Доктор педагогических наук,
заведующий кафедрой высшей математики
№1 НИУ МИЭТ,
учитель математики ГОУ Лицей №1557
г. Зеленограда.*

Корянов Анатолий Георгиевич
*Методист по математике
городского информационно-методического
Центра (БГИМЦ) г. Брянска,
учитель математики
МОУ Лицей №27 г. Брянска.*

Геометрические прогрессии в задачах ЕГЭ уровня С6

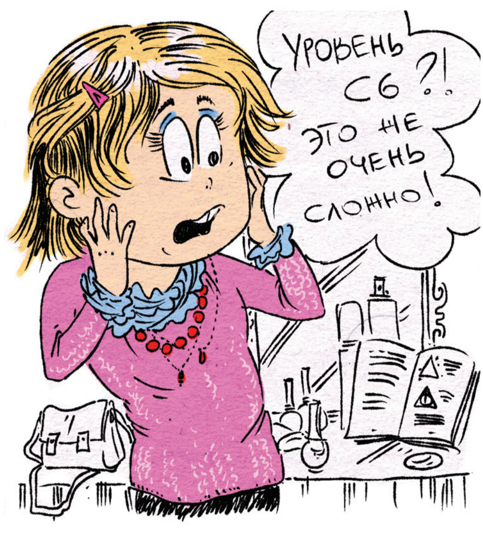
В статье на иллюстративном материале, почерпнутом из заданий ЕГЭ, диагностических и тренировочных работ, олимпиад, демонстрируются приёмы решения задач уровня С6 на геометрические прогрессии.

С 2010 года вариант ЕГЭ по математике содержит задания С6, которые близки к олимпиадным задачам. В задачах этого уровня выделим задачи на геометрическую прогрессию, характерной особенностью которых является как исследование свойств прогрессии (например, формула суммы её членов), так и их сочетание с олимпиадными идеями (например, делимость целых чисел).

Для решения задач нам потребуются следующие определения и формулы.

• *Геометрическая прогрессия* – числовая последовательность $\{b_n\}$, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число q, не равное нулю: $b_{n+1} = b_n \cdot q$, $b_1 \neq 0$, $q \neq 0$, $n \in N$.

• Число q называют *знаменателем* геометрической прогрессии, число b_1 – *первым членом*, а b_n – *n-м членом* (*или общим членом*).



• Геометрическую прогрессию называют *возрастающей*, если $b_{n+1} > b_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$; *убывающей*, если $b_{n+1} < b_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$; *постоянной*, если $b_{n+1} = b_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

• Формула n-го (общего) члена геометрической прогрессии:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1};$$

и в общем виде

$$b_n = b_m \cdot q^{n-m}, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

• Формула знаменателя геометрической прогрессии:

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n};$$

и в общем виде

$$q^{n-m} = \frac{b_n}{b_m}.$$

• Каждый член геометрической прогрессии, начиная со второго, возведённый в квадрат, равен произведению предшествующего и последующего членов, то есть

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

(*характеристическое свойство геометрической прогрессии*);
и в общем виде

$$b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}, \ 1 \le k \le n-1,$$
$$n, \ k \in \mathbb{N},$$

• Для любых натуральных k, l, m, n имеет место формула

$$b_k \cdot b_l = b_m \cdot b_n,$$

если

$$k + l = m + n.$$

• Формулы суммы n первых членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1} \quad \text{и} \quad S_n = \frac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}.$$

• Формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $(0 < |q| < 1)$:

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Здесь мы привели расширенный список формул, необходимый для решения задач олимпиадного уровня.

Общий член прогрессии

Рассмотрим несколько задач, в которых требуется определить значения некоторых членов прогрессии или ответить на вопрос о принадлежности их к определённому типу чисел (целые, натуральные) при условии, что не заданы явно значения b_1, q, n (первого члена, знаменателя и номера члена), а в решении используется формула общего члена.

К задачам этого типа можно также отнести те, в которых члены последовательности заданы рекуррентно, но в ходе решения оказывается возможным использование формул для геометрической прогрессии.

Пример 1. *Известно, что первый, десятый и сотый члены геометрической прогрессии являются натуральными числами. Верно ли, что 99-й член этой прогрессии также является натуральным числом?*

Решение. Если знаменатель прогрессии – натуральное число, то $b_{99} = b_1 q^{98}$ является натуральным числом.

Однако в общем случае утверждение неверно. Например, рассмотрим геометрическую прогрессию, у которой

$$b_1 = 1, \ q = 2^{\frac{1}{9}},$$

тогда

$$b_n = 2^{\frac{n-1}{9}}.$$

Получаем, что $b_{10} = 2$, $b_{100} = 2^{11}$, но $b_{99} = 2^{\frac{98}{9}}$ не является натуральным числом.

Ответ. В общем случае неверно.

Пример 2. («Ломоносов-2010») *Числа 54 и 128 являются членами геометрической прогрессии. Найдите все натуральные числа, которые могут встретиться в этой прогрессии.*

Решение. Заметим, что $54 = 2 \cdot 3^3$ и $128 = 2^7$. Знаменатель прогрессии $q \neq 1$, так как $54 \neq 128$.

Исключим знаменатель q из двух равенств

$$\begin{cases} 128 = 2^7 = 2 \cdot 3^3 \cdot q^n, \\ N = 2 \cdot 3^3 \cdot q^m, \end{cases} m,\ n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0.$$

$$\begin{cases} q^n = \dfrac{2^6}{3^3}, \\ q^m = \dfrac{N}{2 \cdot 3^3}. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} q^{m \cdot n} = \left(\dfrac{2^6}{3^3}\right)^m, \\ q^{m \cdot n} = \left(\dfrac{N}{2 \cdot 3^3}\right)^n. \end{cases}$$

$$\left(\frac{N}{2 \cdot 3^3}\right)^n = \left(\frac{2^6}{3^3}\right)^m;$$

$$N^n = 2^{6m+n} \cdot 3^{3n-3m};$$

$$N = 2^{\frac{6m+n}{n}} \cdot 3^{\frac{3n-3m}{n}}.$$

Пусть

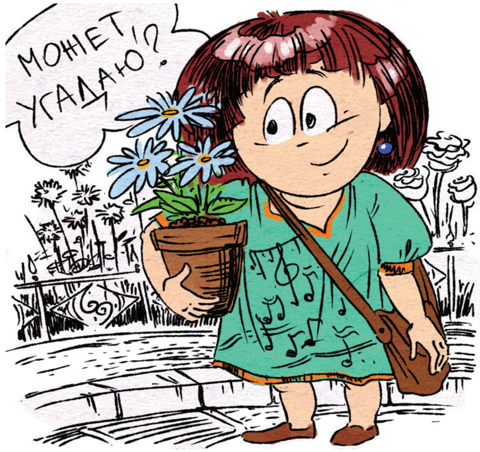
$$\frac{6m+n}{n} = x, \quad \frac{3n-3m}{n} = y.$$

$$\begin{cases} 6m + n = xn, \\ 3n - 3m = yn, \end{cases} x,\ y \in \mathbb{Z},\ x \geq 0, y \geq 0, \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xn = 6m + n, \\ 2yn = 6n - 6m \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{7-x}{2}.$$

Отсюда следует, что x должно быть целым и нечётным, $x \leq 7$. Рассматривая значения 1, 3, 5, 7 для x, получим значения 54, 72, 96, 128 для N соответственно.

Ответ: 54, 72, 96, 128.



Пример 3. (Московская межвузовская олимпиада, 2009) *Пусть* $f(x) = \dfrac{x}{3} + 2$. *Найдите значение функции* $\underbrace{f(\ldots f(f}_{2009\text{ раз}}(x))\ldots)$ *в точке* $x = 4$.

Решение. Установим вид функции $\underbrace{f(\ldots f(f}_{n\text{ раз}}(x))\ldots)$ для первых трёх натуральных значений n.

При $n = 1$: $f(x) = 2 + \dfrac{x}{3}$.

При $n = 2$:

$$f(f(x)) = 2 + \frac{2 + \frac{x}{3}}{3} = 2 + \frac{2}{3} + \frac{x}{3^2}.$$

При $n = 3$:

$$f(f(f(x))) = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{x}{3^3}.$$

Возникает предположение, что

$$\underbrace{f(\ldots f(f}_{n\text{ раз}}(x))\ldots) =$$

$$= \left(2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{2}{3^{n-1}}\right) + \frac{x}{3^n}.$$

Докажем это утверждение методом математической индукции.

При $n = 1$, согласно условию задачи:

$$f(x) = 2 + \frac{x}{3}.$$

Утверждение истинно.

Пусть при $n = k$ утверждение истинно, и функция имеет вид

$$\underbrace{f(\ldots f(f}_{k\text{ раз}}(x))\ldots) =$$

$$= \left(2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{2}{3^{k-1}}\right) + \frac{x}{3^k}.$$

Докажем, что при $n = k + 1$

$$\underbrace{f(\ldots f(f}_{(k+1)\text{ раз}}(x))\ldots) =$$

$$= \left(2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{2}{3^k}\right) + \frac{x}{3^{k+1}}.$$

Действительно,

$$\underbrace{f(\ldots f(f}_{(k+1)\text{ раз}}(x))\ldots) = f\left(\underbrace{f(\ldots f(f}_{k\text{ раз}}(x))\ldots)\right) =$$

$$= 2 + \frac{\left(2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{2}{3^{k-1}}\right) + \frac{x}{3^k}}{3} =$$

$$= \left(2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{2}{3^k}\right) + \frac{x}{3^{k+1}}.$$

Что и требовалось доказать.

Следовательно, при $n = 2009$:

$$\underbrace{f(\ldots f(f}_{2009\text{ раз}}(x))\ldots) =$$

$$= \left(2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{2}{3^{2008}}\right) + \frac{x}{3^{2009}} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{3^{2009}}}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{x}{3^{2009}},$$

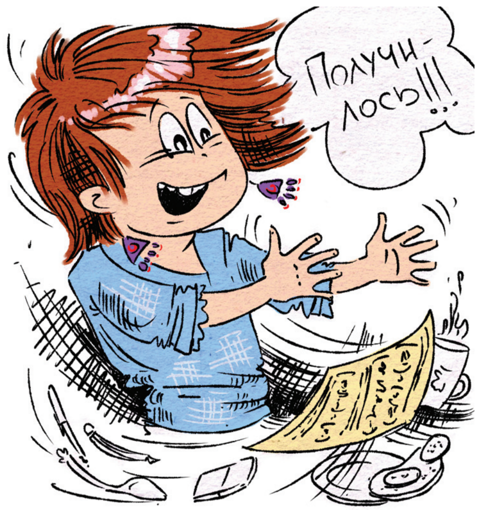
или

$$\underbrace{f(\ldots f(f}_{2009\text{ раз}}(x))\ldots) = 3 + \frac{x-3}{3^{2009}}.$$

Подставляя в последнее соотношение $x = 4$, получим ответ:

$$\underbrace{f(\ldots f(f}_{2009\text{ раз}}(4))\ldots) = 3 + \frac{1}{3^{2009}}.$$

Ответ. $3 + 3^{-2009}$.



Знаменатель прогрессии

При решении задач на геометрическую прогрессию, состоящую из целых чисел, могут оказаться полезными следующие факты.

1. В геометрической прогрессии, состоящей из целых чисел, знаменатель q является рациональным числом.

Это следует из формулы

$$b_k = b_{k-1} \cdot q.$$

Отсюда

$$q = \frac{b_k}{b_{k-1}} -$$

рациональное число, поскольку b_k, b_{k-1} – целые числа. Следовательно, знаменатель q можно представить в виде несократимой дроби $q = \frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

2. В конечной геометрической прогрессии $b_1, b_2, \ldots, b_k$ со знаменателем $q = \frac{m}{n}$, где дробь $\frac{m}{n}$ несократима, из того, что

$$b_k = b_1 \cdot q^{k-1} = b_1 \cdot \frac{m^{k-1}}{n^{k-1}},$$

следует, что b_1 делится на n^{k-1}, то есть существует такое целое число a, что $b_1 = a \cdot n^{k-1}$. Тогда все члены прогрессии имеют вид

$$b_1 = a \cdot n^{k-1}, \ \ b_2 = b_1 \cdot \frac{m}{n} = a \cdot n^{k-2} \cdot m,$$

$$\ldots, \ b_{k-1} = b_1 \cdot \frac{m^{k-2}}{n^{k-2}} = a \cdot n \cdot m^{k-2},$$

$$b_k = b_1 \cdot \frac{m^{k-1}}{n^{k-1}} = a \cdot m^{k-1}.$$

3. В бесконечной геометрической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, знаменатель является натуральным числом.

Пример 4. (Мехмат МГУ, 2003) *Первый член конечной геометрической прогрессии с целочисленным знаменателем меньше последнего, но не более чем на* 17, *а сумма её членов со второго по последний не меньше* 26. *Найдите знаменатель прогрессии.*

Решение. Пусть $b_k = b_1 q^{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n,$ – данная геометрическая прогрессия. Из условия задачи (первый член меньше последнего) следует, что $q \neq 1$. Из неравенств

$$0 < b_n - b_1 \leq 17$$

и

$$b_2 + b_3 + \ldots + b_n \geq 26$$

следует, что

$$0 < b_1(q^{n-1} - 1) \leq 17$$

и

$$\frac{b_1 q}{q-1}\left(q^{n-1} - 1\right) \geq 26.$$

Отсюда получаем

$$\frac{q}{q-1} > 0,$$

$$26 \leq \frac{q}{q-1} \cdot b_1\left(q^{n-1} - 1\right) \leq \frac{17q}{q-1}$$

и оценку

$$\frac{17q}{q-1} \geq 26.$$

Тогда $q = 2$.

Ответ. 2.

Пример 5. *Имеются* 100 *бесконечных геометрических прогрессий, каждая из которых состоит из натуральных чисел. Всегда ли можно указать натуральное число, которое не содержится ни в одной из этих прогрессий?*

Решение. Покажем, что знаменатель каждой прогрессии – натуральное число. Действительно, пусть q – знаменатель прогрессии b_1, b_2, b_3, ... , где все b_i – натуральные числа. Тогда $q = \frac{b_2}{b_1}$ – число рациональное. Пусть q – не целое, то есть $q = \frac{k}{m}$, где числа k и m – взаимно простые и $m > 1$. Тогда можно найти такую степень t, что b_1 не делится на m^t. В таком случае число

$$b_{t+1} = b_1 \cdot \frac{k^t}{m^t}$$

не является целым. Это противоречие показывает, что q – натуральное число. Тогда в каждой бесконечной геометрической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, может быть не более одного члена, являющегося простым числом (b_1 или b_2).

Таким образом, 100 геометрических прогрессий могут покрыть не более 100 простых чисел из натурального ряда. Поскольку простых чисел бесконечно много, какое-то простое число не принадлежит ни одной из прогрессий.

Ответ. Всегда.

Пример 6. (Всероссийская математическая олимпиада, 1985 – 1986 гг., 9 класс) *Целые числа a, b, c образуют геометрическую прогрессию. Может ли последняя цифра в десятичной записи числа*

$$N = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

быть равной 0, *а предпоследняя цифра при этом быть равной* 2?

Решение. Запишем члены геометрической прогрессии:

$$a, \ \ b = aq, \ \ c = aq^2,$$

где $q = \dfrac{b}{a}$ – рациональное число. Разделим числитель и знаменатель дроби на $\text{НОД}(a; b)$, получим дробь

$$q = \frac{m}{n},$$

где m, n – взаимно простые целые числа. Получаем

$$b = a \cdot \frac{m}{n}, \ \ c = a \cdot \frac{m^2}{n^2}.$$

Из последнего равенства

$$a m^2 = cn^2,$$

то есть a делится на n^2. Тогда

$$a = kn^2,$$

где $k \in \mathbb{Z}$,

$$b = kn^2 \cdot \frac{m}{n} = kmn,$$

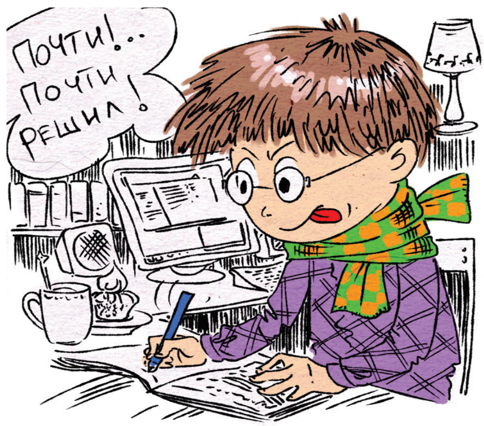
$$c = kn^2 \cdot \frac{m^2}{n^2} = km^2.$$

Значит,

$$N = (kn^2)^3 + (kmn)^3 + (km^2)^3 -$$
$$- 3kn^2 \cdot kmn \cdot km^2 = k^3(n^3 - m^3)^2.$$

Допустим, что число N оканчивается на 20, тогда число N делится на 5. Значит, хотя бы одно из чисел k или $n^3 - m^3$ делится на 5. В таком случае число $k^3(n^3 - m^3)^2$ будет делиться на 25. Так как число, делящееся на 25, может оканчиваться парами цифр 00, 25, 50, 75, то число N не может оканчиваться цифрами 20.

Ответ. Нет.



Количество членов прогрессии

Отдельную группу образуют задачи, в которых требуется ответить на вопрос о существовании в указанных границах заданного числа членов прогрессии, удовлетворяющих определённым условиям.

Пример 7. (МИОО, 2011) *Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно* 1344 *и* а) *три*; б) *четыре*; в) *пять из них образуют геометрическую прогрессию*?

Решение. Разложим число 1344 на простые множители:

$$1344 = 2^6 \cdot 3 \cdot 7.$$

а) Первому условию удовлетворяют числа 3, 7, 2, 4, 8, из которых три последних образуют геометрическую прогрессию.

б) Второму условию удовлетворяют числа 1, 2, 4, 8, 21, из которых первые четыре образуют геометрическую прогрессию.

в) Пусть также

$$1344 = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot n_5,$$

где n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 – различные натуральные числа, образующие в указанном порядке геометрическую прогрессию. Пусть q – знаменатель этой прогрессии. Тогда

$$n_2 = n_1 \cdot q, \ \ n_3 = n_1 \cdot q^2,$$

$$n_4 = n_1 \cdot q^3, \ \ n_5 = n_1 \cdot q^4.$$

Перемножив числа, получим

$$n_1{}^5 \cdot q^{10} = 1344.$$

Заметим, что q – рациональное число (иначе число $n_2 = n_1 \cdot q$ не будет натуральным). Пусть $q = \dfrac{k}{m}$, где числа $k, m \in \mathbb{N}$ и взаимно просты. Тогда из равенства

$$n_1^5 \cdot \frac{k^{10}}{m^{10}} = 1344$$

следует, что число $\dfrac{n_1^5}{m^{10}}$ – пятая степень натурального числа $a = \dfrac{n_1}{m^2}$, и число 1344 делится на a^5 и k^{10}. Хотя бы одно из этих чисел отлично от единицы. Но разложение числа 1344 не содержит множителей степени больше 6. Противоречие.

Ответ. а) Да; б) да; в) нет.

Пример 8. (МИОО, 2011) *Все члены геометрической прогрессии – различные натуральные числа, заключённые между числами* 210 *и* 350.

а) *Может ли такая прогрессия состоять из четырёх членов?*

б) *Может ли такая прогрессия состоять из пяти членов?*

Решение. а) Приведём пример геометрической прогрессии из четырёх членов: взяв

$$b_1 = 216 = 6^3 \text{ и } q = \frac{7}{6},$$

получим

$$b_2 = 6 \cdot 6 \cdot 7 = 252, \; b_3 = 6 \cdot 7 \cdot 7 = 294$$

и

$$b_4 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343.$$

б) Докажем, что прогрессии из пяти членов, удовлетворяющей условию задачи, не существует.

Предположим, такая возрастающая последовательность есть, и пусть её первый член есть b_1 и знаменатель $q = \dfrac{m}{k}$, где m и k – взаимно простые натуральные числа. Тогда прогрессия имеет вид

$$210 < b_1 < b_1 q < \ldots < b_1 q^4 < 350.$$

Так как

$$b_1 q^4 = \frac{b_1}{k^4} \cdot m^4,$$

m и k – взаимно просты, то b_1 делится на k^4, а значит, $m^4 < 350$, откуда $m \le 4$. Имеем $q > 1$, $k < m$, но k – натуральное число, поэтому $k \le m - 1 \le 3$. Отсюда

$$q = \frac{m}{k} \ge \frac{m}{m-1} = 1 + \frac{1}{m-1} \ge 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

Поэтому

$$b_1 q^4 \ge b_1 \cdot \frac{4^4}{3^4} > 210 \cdot \frac{256}{81} > 350,$$

что противоречит требованию задачи.

Ответ. а) Да; б) нет.

Пример 9. (Соросовская олимпиада, 1996/1997) *При каком наибольшем натуральном значении n найдётся n семизначных чисел, являющихся последовательными членами одной геометрической прогрессии?*

Решение. Не нарушая общности, будем считать, что числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$ образуют возрастающую геометрическую прогрессию. Так как все члены прогрессии – целые числа, то её знаменатель q – число рациональное, то есть

$$q = \frac{m}{p} > 1, \quad m, p \in \mathbb{N}, \quad \text{и} \quad \frac{m}{p} \; –$$

несократимая дробь.

Приведём пример прогрессии с 11 членами. Возьмем $q = \dfrac{5}{4}$, а первый член

$$b_1 = 4^{10} = 1048576 > 10^6.$$

Тогда

$$b_2 = 4^9 \cdot 5, \; b_3 = 4^8 \cdot 5^2, \; \ldots,$$

$$b_{11} = 5^{10} = 9765625 < 10^7.$$

Допустим, что существует требуемая геометрическая прогрессия с 12 членами, тогда

$$b_{12} = b_1 \frac{m^{11}}{p^{11}},$$

b_1 делится на p^{11} и $b_{12} \geq m^{11}$. Если $m \geq 5$, то получим

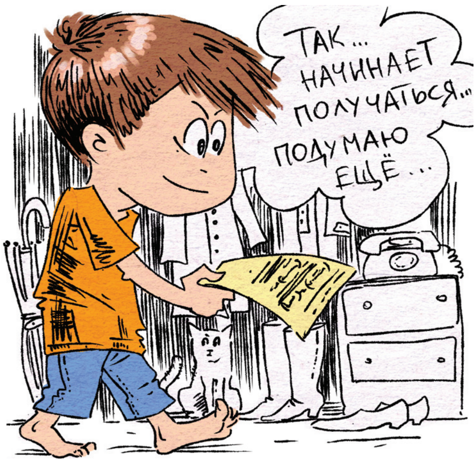
$$b_{12} \geq 5^{11} > 10^7.$$

Значит, $m \leq 4$ и наименьшее значение $q = \frac{4}{3}$. Получаем

$$b_{12} = b_1 \left(\frac{4}{3}\right)^{11} > 10b_1 > 10^7,$$

что противоречит условию.

Ответ. 11.



Суммирование членов прогрессии

Рассмотрим набор задач олимпиадного характера, при решении которых используются формулы суммы первых n членов конечной геометрической прогрессии или всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Пример 10. *Дана бесконечная последовательность, в которой первый член равен 1, а каждый последующий в два раза меньше предыдущего. Можно ли из данной последовательности выделить бесконечную геометрическую прогрессию, сумма членов которой равна* $\frac{1}{7}$?

Решение. Заметим, что число $\frac{1}{7}$ можно представить следующим образом:

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{8-1} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{8}} = 2^{-3} \cdot \frac{1}{1-2^{-3}}.$$

Если мы рассмотрим бесконечно убывающую прогрессию с первым членом $b_1 = 2^{-3}$ и знаменателем $q = 2^{-3}$, то её сумма как раз и будет равна $S = b_1 \cdot \frac{1}{1-q} = 2^{-3} \cdot \frac{1}{1-2^{-3}}$.

Соответственно, её члены будут задаваться формулой

$$b_k = b_1 \cdot q^{k-1} = 2^{-3} \cdot (2^{-3})^{k-1} = 2^{-3k}.$$

Заметим, что все члены этой прогрессии входят в данный в условии задачи набор чисел.

Ответ. $b_k = 2^{-3k}$, $k \in \mathbb{N}$.

Пример 11. *Найдите все целые значения* m *и* k *такие, что*

$$3^m + 3^{2m} + 3^{3m} + \ldots + 3^{km} = 2010.$$

Решение. Согласно условию задачи $k \in \mathbb{N}$.

1. Если $m = 0$, то каждое слагаемое в левой части данного равенства равно 1. Тогда данное равенство возможно только при $k = 2010$.

2. Если $m \leq -1$, то левая часть уравнения не превосходит суммы конечной геометрической прогрессии с первым членом 3^{-1} и знаменателем 3^{-1}, которая, в свою очередь, меньше суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии с теми же первым членом и знаменателем:

$$3^m + 3^{2m} + \ldots + 3^{km} \leq 3^{-1} + 3^{-2} + \ldots +$$
$$+ \ldots + 3^{-k} < 3^{-1} + 3^{-2} + \ldots +$$
$$+ \ldots + 3^{-k} + 3^{-k-1} + \ldots = \frac{3^{-1}}{1-3^{-1}} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, при $m \le -1$ уравнение не имеет решений.

3. Если $m \ge 1$, то по формуле суммы конечной геометрической прогрессии с первым членом 3^m и знаменателем 3^m получаем:

$$3^m + 3^{2m} + ... + 3^{km} = 3^m \cdot \frac{3^{km} - 1}{3^m - 1}.$$

Подставляя полученное выражение для суммы в уравнение, имеем:

$$3^m \cdot \frac{3^{km} - 1}{3^m - 1} = 2010 \Leftrightarrow$$

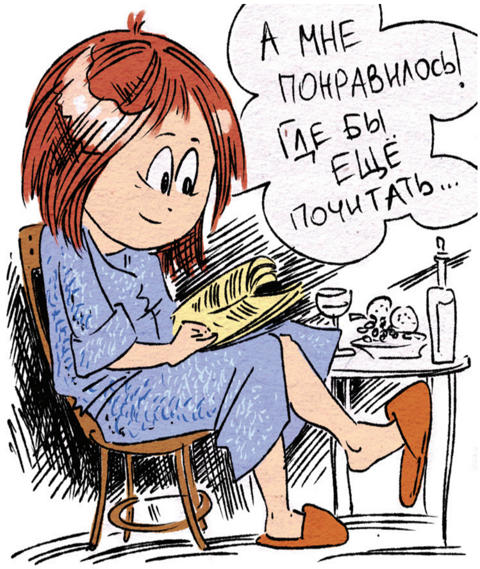
$$\Leftrightarrow 3^m \cdot (3^{km} - 1) = 2010 \cdot (3^m - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^m \cdot (3^{km} - 1) = 3 \cdot 670 \cdot (3^m - 1).$$

Так как числа 670, $3^m - 1$ и $3^{km} - 1$ на 3 не делятся, то равенство возможно только, если $m = 1$ и $3^k - 1 = 670 \cdot 2$. Однако из последнего равенства получаем $3^k = 1341$, что невозможно ни при каком натуральном значении k, так как

$$729 = 3^6 < 1341 < 3^7 = 2187.$$

Ответ. $m = 0$, $k = 2010$.



Задачи для самостоятельного решения

1. Могут ли числа 2, 3, 5 быть членами (не обязательно соседними) одной геометрической прогрессии?

2. Найдите все тройки натуральных чисел $\{a, b, c\}$ такие, что числа a, b и c образуют геометрическую прогрессию и $a + b + c = 111$.

3. (МГУ, ВМК, 1994) Найдите

$$\underbrace{\left(f\ldots\left(f(f(6))\right)\ldots\right)}_{n \text{ раз}}, \text{ где } f(x) = \frac{x}{5} + 4.$$

4. (Всероссийская математическая олимпиада 1994 – 1995 гг., 11 класс) Могут ли числа 1, 2, 3, ..., 100 быть членами двенадцати геометрических прогрессий?

5. Можно ли из чисел $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{2^n}, ...$ выбрать бесконечную геометрическую прогрессию, сумма которой равна $\frac{1}{5}$?

6. (МИОО, 2011) Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 720 и а) пять, б) четыре, в) три из них образуют геометрическую прогрессию?

7. (МИОО, декабрь 2011) Все члены геометрической прогрессии – различные натуральные числа, заключённые между числами 510 и 740.

а) Может ли такая прогрессия состоять из четырёх членов?

б) Может ли такая прогрессия состоять из пяти членов?

8. Какое наибольшее количество членов может иметь геометрическая прогрессия, все члены которой – различные натуральные числа, большие 250 и меньшие 630?

9. (МИОО, 2012) В возрастающей последовательности натуральных чисел каждые три последовательных члена образуют либо арифметическую, либо геометрическую прогрессию. Первый член последовательности равен 1, а последний 2046.

а) Может ли в последовательности быть три члена?

б) Может ли в последовательности быть четыре члена?

в) Может ли в последовательности быть меньше 2046 членов?

10. («Ломоносов – 2010») Числа 128 и 250 являются членами геометрической прогрессии. Найдите все натуральные числа, которые могут встретиться в этой прогрессии.

11. Найдите все целые значения m и k такие, что

$$2^m + 2^{2m} + 2^{3m} + \ldots + 2^{km} = 2046.$$

Ответы и указания

1. Нет.

Указание. Если q – знаменатель прогрессии, то $3 = 2q^n$ и $5 = 3q^m$ для некоторых натуральных n и m. Исключая q из этих двух равенств, получаем уравнение $3^{m+n} = 2^m \cdot 5^n$. Докажите, что это уравнение не имеет решений в натуральных числах.

2. $\{1, 10, 100\}$, $\{100, 10, 1\}$, $\{27, 36, 48\}$, $\{48, 36, 27\}$, $\{37, 37, 37\}$.

Указание. См. пример 6.

3. $5 + \dfrac{1}{5^n}$.

Указание. См. пример 3.

4. Нет, не могут.

5. Нет.

Указание. Пусть

$$b_1 = \frac{1}{2^m}, \quad q = \frac{1}{2^k}$$

для некоторых натуральных m и k. Используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, составим уравнение

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{2^m\left(1 - \dfrac{1}{2^k}\right)}.$$

Отсюда получаем уравнение $2^{m-k}(2^k - 1) = 5$, которое не имеет решений в натуральных числах.

6. а) Нет, б) нет, в) да.

Указание. См. пример 7.

7. а) Да; б) нет.

Указание. См. пример 8.

8. 5.

Указание. См. пример 8.

9. а) Нет; б) нет; в) да.

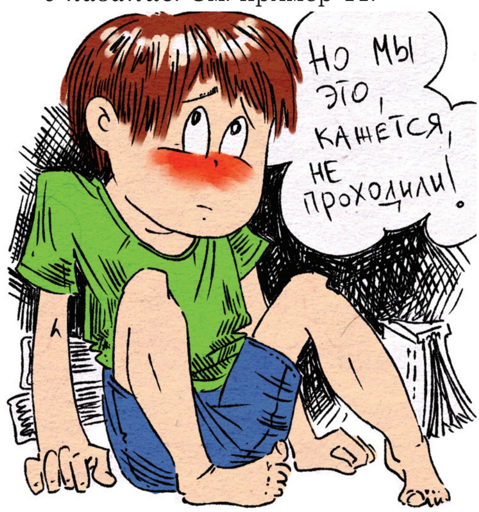
Указание. См. пример 10.

10. 128, 160, 200, 250.

Указание. См. пример 2.

11. $m = 0$, $k = 2046$ или $m = 1$, $k = 10$.

Указание. См. пример 11.



Литература

1. ЕГЭ 2013. Математика. 30 вариантов типовых тестовых заданий и 800 заданий части 2(С) / под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2013. (Серия «ЕГЭ. Типовые тестовые задания»).

2. *Пукас Ю.О.* Решаем задачи С6 по математике. Советы практика. – М.: ИЛЕКСА, 2013. (Серия: «Математика уровня С».)