

Вавилов Валерий Васильевич

Профессор кафедры математики школы имени А.Н. Колмогорова СУНЦ МГУ имени М.В. Ломоносова. Заслуженный преподаватель и лауреат Ломоносовской премии МГУ. Автор 38 книг, более 30 статей научного, методического и научно-популярного характера.



Геометрическая алгебра

В статье содержатся решения различных алгебраических задач с привлечением соображений геометрического характера. Некоторые из задач, конечно, допускают и чисто алгебраические решения, но они, как правило, приводят к значительным вычислениям.

1. Найти все виды целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе:

$$\begin{cases} 3x^2 - 8xy - y^2 = 18, \\ x^2 + y^2 - 2x + 8y + 16 = 0. \end{cases}$$

Решение. Выделив полные квадраты, запишем второе уравнение в виде

$$(x-1)^2 + (y+4)^2 = 1.$$

Это уравнение задаёт окружность единичного радиуса (рис. 1) с центром в точке $(1; -4)$. На этой окружности есть всего четыре точки с целыми координатами:

$(0; -4)$, $(2; -4)$, $(1; -3)$, $(1; -5)$.

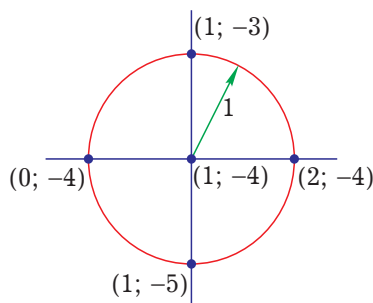


Рис. 1

Координаты первых двух из этих точек не удовлетворяют первому уравнению системы, что легко установить непосредственной проверкой.

Ответ. $(1; -3)$, $(1; -5)$.

2. Найти все значения x , для каждого из которых неравенство

$$(2-x)a^2 + (x^2 - 2x + 3)a - 3x \geq 0$$

выполняется для любого значения a из промежутка $[-3; 0]$.

Решение. Возможны несколько путей решения этой задачи. Во-первых, можно использовать так называемый метод парабол (как при решении задач на расположение корней квадратного трёхчлена), причём по любой из переменных. Но это приведёт к рассмотрению нескольких случаев.

Другой подход состоит в нахождении сначала всех точек $(x; a)$ в плоскости Oxa , координаты которых удовлетворяют данному неравенству.

Заметим, что при $a = x$ многочлен в левой части обращается в нуль:

$$\begin{aligned} (2-x)x^2 + (x^2 - 2x + 3)x - 3x &= \\ = 2x^2 - x^3 + x^3 - 2x^2 + 3x - 3x &= 0. \end{aligned}$$

Поэтому, производя «деление уголком», получим, что данное неравенство можно написать в виде

$$(a-x)((2-x)a+3) \geq 0.$$

Прямая $a = x$ и гипербола $(2-x)a+3=0$ делят плоскость на шесть частей, но только три из них состоят из точек, координаты которых удовлетворяют данному неравенству (см. рис. 2); в этом можно убедиться, выбрав по одной точке в каждой части. Из полученного рисунка видно, что искомым значением x является только $x = -1$.

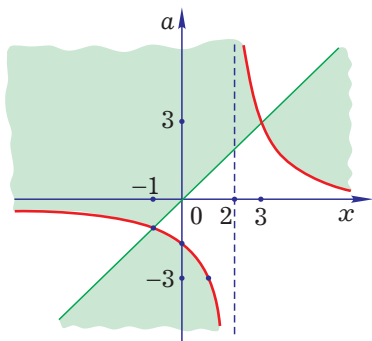


Рис. 2

3. Найти: а) наибольшее значение выражения

$$A(x; y) = |y| \cdot \sqrt{1-x^2} + \sqrt{16-y^2} \cdot |x|;$$

б) наименьшее значение выражения

$$B(x; y) = |x| + |y| + \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}.$$

Решение. а) Рассмотрим векторы

$$\vec{p}(|y|; \sqrt{16-y^2}), \quad \vec{q}(\sqrt{1-x^2}; |x|).$$

Тогда $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 1$ и

$$A(x; y) = \vec{p} \cdot \vec{q} = |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \cos \alpha = 4 \cos \alpha \leq 4.$$

Так как $A(1; 0) = 4$, то искомого наибольшее значение равно 4.

б) Для точки $P = P(x; y)$ выражение $B(x; y)$ представляет собой длину трёхзвенной ломаной $NPMO$ (рис. 3),

соединяющей точки $N = (1; 3)$ и $O = (0; 0)$. Действительно,

$$PM = |y|, \quad MO = |x|,$$

$$PN = \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}.$$

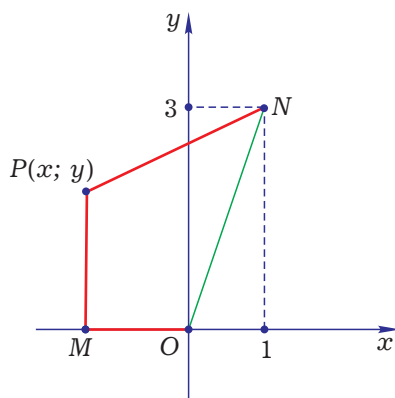


Рис. 3

Кратчайшее расстояние между точками O и N равно

$$ON = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}.$$

Поэтому $B(x; y) \geq \sqrt{10}$. Но $B(0; 0) = \sqrt{10}$, и, следовательно, искомого наименьшее значение равно $\sqrt{10}$.

4. Какое наибольшее значение может принимать выражение

$$\cos x + \cos y + \cos z$$

при условии

$$\sin x + \sin y + \sin z \geq \sqrt{3}?$$

Решение. На тригонометрическом круге рассмотрим три точки

$$A = (\cos x; \sin x),$$

$$B = (\cos y; \sin y),$$

$$C = (\cos z; \sin z).$$

По условию задачи конец вектора $\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ расположен в сегменте круга радиуса 3 (рис. 4). Первая координата вектора $\vec{OP}$ равна $\cos x + \cos y + \cos z$

и потому эта величина принимает наибольшее значение тогда, когда $P = D$. Следовательно, искомого наибольшее значение равно

$$\sqrt{9-3} = \sqrt{6}.$$

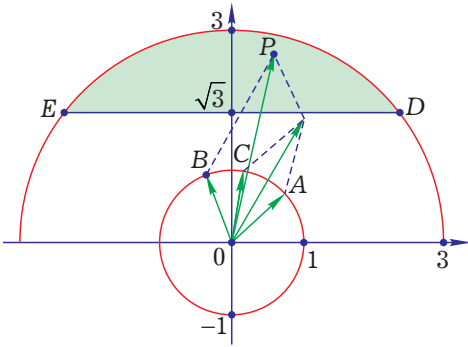


Рис. 4

5. Среди всех решений системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z^2 + v^2 = 9, \\ xv + yz \geq 6 \end{cases}$$

найти такие, при каждом из которых выражение $x + z$ принимает наибольшее значение.

Решение. Пусть $\bar{p}$ – вектор с координатами x и y , а вектор $\bar{q}$ имеет координаты $(v; z)$: $\bar{p} = x\bar{i} + y\bar{j}$, $\bar{q} = v\bar{i} + z\bar{j}$ (рис. 5). Тогда

$|\bar{p}| = \sqrt{x^2 + y^2} = 2$, $|\bar{q}| = \sqrt{v^2 + z^2} = 3$,
и по условию $\bar{p} \cdot \bar{q} = xv + yz \geq 6$.

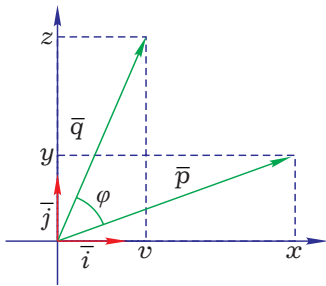


Рис. 5

С другой стороны,

$$\bar{p} \cdot \bar{q} = |\bar{p}| \cdot |\bar{q}| \cos \varphi,$$

φ – величина угла между векторами $\bar{p}$ и $\bar{q}$. Следовательно, $\cos \varphi \geq 1$ и поэтому $\varphi = 0$. Другими словами, векторы $\bar{p}$ и $\bar{q}$ сонаправлены, т. е. существует такое $t > 0$, что $\bar{q} = t \cdot \bar{p}$.

Ясно, что

$$t = \frac{|\bar{q}|}{|\bar{p}|} = \frac{3}{2}.$$

Таким образом,

$$v = \frac{3}{2}x, \quad z = \frac{3}{2}y,$$

$$x + z = x + \frac{3}{2}y = \bar{p} \cdot \bar{c},$$

где вектор $\bar{c}$ имеет координаты

$$\left(1; \frac{3}{2}\right); \quad |\bar{c}| = \sqrt{1 + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Произведение $\bar{p} \cdot \bar{c}$ принимает своё наибольшее значение, когда векторы $\bar{p}$ и $\bar{c}$ сонаправлены. Следовательно $\bar{p} = m\bar{c}$, где

$$m = \frac{|\bar{p}|}{|\bar{c}|} = \frac{4}{\sqrt{13}}.$$

Итак, искомое наибольшее значение достигается при

$$x = \frac{4}{\sqrt{13}},$$

$$y = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{13}} = \frac{6}{\sqrt{13}},$$

$$z = \frac{3}{2}y = \frac{9}{\sqrt{13}},$$

$$v = \frac{3}{2}x = \frac{6}{13},$$

и оно равно $\sqrt{13}$.

6. Числа x, y, z таковы, что

$$\begin{cases} 3x^2 + 3xy + y^2 = 75, \\ y^2 + 3z^2 = 48, \\ z^2 + zx + x^2 = 9, \\ x, y, z > 0. \end{cases}$$

Найти $xy + 2yz + 3xz$.

Решение. В основе решения задачи лежит тот факт, что выражение вида $(x, y > 0)$

$$X^2 + A \cdot X \cdot Y + Y^2$$

можно интерпретировать как квадрат длины стороны треугольника (со сторонами x, y), лежащей против угла φ так, что $A = -2 \cos \varphi$. Это

следует из теоремы косинусов для этого треугольника (рис. 6).

Построим на плоскости три луча с общим началом O и углами между соседними лучами в 150° , 90° и 120° градусов (рис. 7).

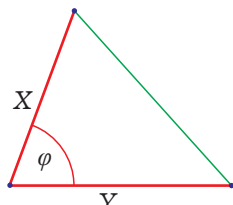


Рис. 6

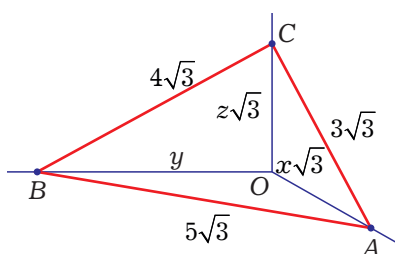


Рис. 7

Рассмотрим на этих лучах три точки A , B и C такие, что $OA = x\sqrt{3}$, $OB = y$, $OC = z\sqrt{3}$.

Таким образом, по условию задачи:

$$AB = \sqrt{75} = 5\sqrt{3},$$

$$BC = \sqrt{48} = 4\sqrt{3},$$

$$AC = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

Имеем $[T]$ – площадь треугольника T):

$$\begin{aligned} [ABC] &= [OAB] + [OAC] + [OBC] = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} xy \sin 150^\circ + \frac{3}{2} zx \cdot \sin 120^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} yz = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} (xy + 2yz + 3xz). \end{aligned}$$

Треугольник ABC – прямоугольный, т. к. $AB^2 = CB^2 + CA^2$, следовательно, $[ABC] = \frac{3}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 18$. Итак,

$$xy + 2yz + 3xz = 18 \frac{4}{\sqrt{3}} = 24\sqrt{3}.$$

7. Найти все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{(x-a)^2 + (y-a^2)^2} = \\ = |a|\sqrt{1+a^2}, \\ (x-4)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Пусть $A = (a; a^2)$ и $P(x; y)$ – такая точка, координаты которой удовлетворяют системе уравнений. Из второго уравнения системы следует, что P лежит на окружности радиуса 1 с центром в точке $(4; 0)$. Если $\Gamma_1 = OP$, $\Gamma_2 = AP$, то первое уравнение можно записать в виде (см. рис. 8)

$$\Gamma_1 = OA + \Gamma_2,$$

где $OA = \sqrt{a^2 + (a^2)^2} = |a|\sqrt{1+a^2}$.

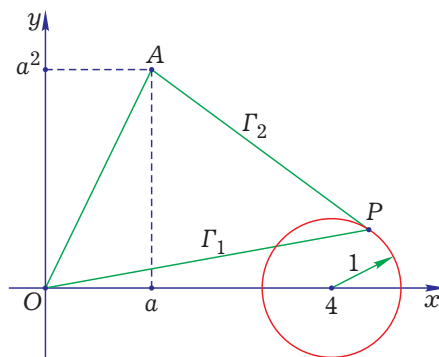


Рис. 8

Отсюда следует, что точки O , A и P лежат на прямой $y = ax$, причём точка A лежит между точками O и P . Отметим также, что при $a < 0$ система вообще не имеет решений, так как в этом случае точки O , A , P расположатся в другом порядке.

Из сказанного и условия задачи следует, что нам нужно найти такое значение a , при котором прямая

$y = ax$, $a > 0$, касается окружности $(x-4)^2 + y^2 = 1$. Имеем (см. рис. 9):

$$a = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}.$$

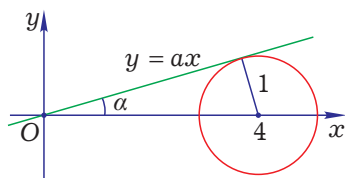


Рис. 9

8. Найти все значения параметров a и b , при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 5 = b^2 + 2x - 4y, \\ x^2 + (12 - 2a)x + y^2 = 2ay + 12a - 2a^2 - 27 \end{cases}$$

имеет два решения $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, удовлетворяющие условию

$$\frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}.$$

Решение. Выделяя полные квадраты, запишем заданную систему в виде:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 = b^2, \\ (x+(a-6))^2 + (y-a)^2 = 9; \end{cases}$$

а данное условие запишем в форме $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$. Каждое из уравнений системы задаёт окружность (рис. 10). Две окружности пересекаются в двух точках только тогда, когда

$$|R_1 - R_2| < O_1O_2 < R_1 + R_2.$$

Из условия следует, что точки $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ равноудалены от начала координат, и поэтому точка O принадлежит линии центров (O_1O_2) . Прямая (O_1O_2) имеет уравнение

$$\frac{x-1}{a-6-1} = \frac{y+2}{a+2},$$

отсюда при $x = y = 0$ получаем, что $a = 4$. При $a = 4$ получаем $O_1O_2 = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ и следующее условие для пересечения двух окружностей: $||b| - 3\sqrt{5}| < 3$.

Ответ. $a = 4$; $||b| - 3\sqrt{5}| < 3$.

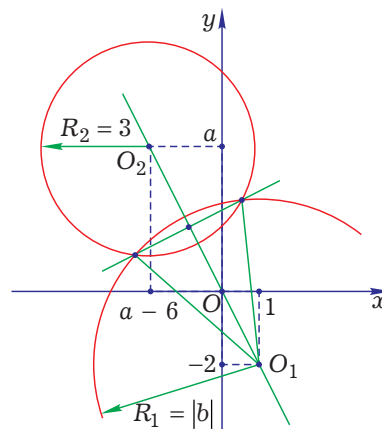


Рис. 10

9. При $a \geq 2$ решить уравнение

$$\sqrt{a^2 + (x-4)^2} + \frac{1}{\sqrt{5}}|a - 2x - 2| = 2\sqrt{5}.$$

Решение. Рассмотрим координатную плоскость Oxa . В этой плоскости величина $\Gamma_1 = \sqrt{a^2 + (x-4)^2}$ является расстоянием от точки $A = (4; 0)$ до точек $P(x; a)$, координаты которых удовлетворяют данному уравнению. Легко увидеть, что (см. рис. 11) $AB = 2\sqrt{5}$. Кроме того, величина $\Gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}|a - 2x - 2|$ выражает (по известной формуле) расстояние от точки $P(x; a)$ до прямой $a - 2x - 2 = 0$. Заметим также, что прямая (AB) перпендикулярна прямой (BQ) . Равенство $\Gamma_1 + \Gamma_2 = AB$ возможно лишь тогда, когда точка P принадлежит отрезку $[AB]$; это следует из того, что длина проекции отрезка $[PQ]$ на отрезок $[AB]$ равна Γ_2 . На отрезке $[AB]$ есть только одна точка $(x; a)$, для которой $a \geq 2$. Поэтому при $a = 2$ мы получаем $x = 0$, а при $a > 2$ данное уравнение решения не имеет.

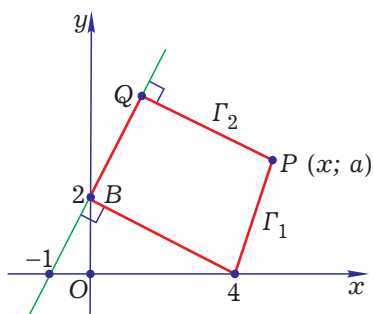


Рис. 11

10. Найти все значения a , для каждого из которых уравнение $|\cos x + 2 \sin x + a| = a - 2 \cos x - \sin x$ имеет по крайней мере одно решение, принадлежащее полуинтервалу $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение. Пусть $u = \cos x$, $v = \sin x$. Тогда данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} |u + 2v + a| = a - 2u - v, \\ u^2 + v^2 = 1, \end{cases}$$

т. е. равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} u + 2v + a = a - 2u - v, \\ u^2 + v^2 = 1, \\ u + 2v + a \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -(u + 2v + a) = a - 2u - v, \\ u^2 + v^2 = 1, \\ u + 2v + a < 0. \end{cases}$$

Для первой из этих систем получаем, что $\frac{v}{u} = \tan x = -1$, т. е.

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Тем самым, первая система совокупности ни при каком a не имеет решений, принадлежащих множеству $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Рассмотрим вторую систему. После её преобразований получим систему

$$\begin{cases} u - v = 2a, \\ u^2 + v^2 = 1, \\ v + a < 0. \end{cases}$$

Из рис. 12 видно, что первые два уравнения этой системы определяют две точки пересечения прямой и единичной окружности (в случае, когда они пересекаются). Поэтому если $-1 \leq -2a < 1$, то система уравнений

$$\begin{cases} u - v = 2a, \\ u^2 + v^2 = 1 \end{cases}$$

имеет такое решение $(u_0; v_0)$, для которого $-1 < u_0 \leq 0$ и $-1 \leq v_0 < 0$. Неравенство $v < -a$ определяет полуплоскость в системе координат Ouv . И, как легко проверить (см. рис. 12), при любом $a \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ точка $(u_0; v_0)$ расположена в этой части полуплоскости

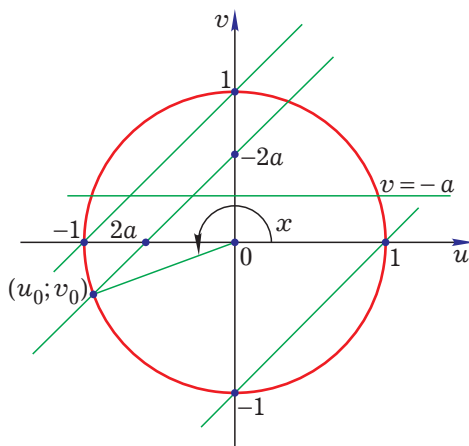


Рис. 12

Ответ. $a \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

11. Найти все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение система

$$\begin{cases} y^2 - (2a+1)y + a^2 + a - 2 = 0, \\ \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + \sqrt{(x-a)^2 + (y-3)^2} = 3. \end{cases}$$

Решение. Второе уравнение этой системы определяет точки $P(x_0; y_0)$ в декартовой системе координат Oxy , для которых $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 3$, где (рис. 13) $A = (a; 0)$, $B = (a; 3)$; $\Gamma_1 = AP$, $\Gamma_2 = BP$.

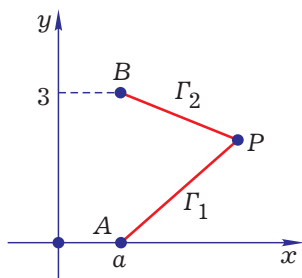


Рис. 13

Так как $AB = 3$, то точка P может быть любой точкой отрезка AB . Отсюда заключаем, что второму уравнению системы удовлетворяют все пары (a, y) , где $y \in [0; 3]$, a — любое действительное число.

Квадратное относительно y уравнение системы имеет два корня $y_1 = a - 1$, $y_2 = a + 2$. Следовательно, его можно переписать в виде

$$(y - a + 1)(y - a - 2) = 0.$$

Это равенство в системе координат Oay задаёт множество точек, расположенных на двух параллельных прямых (рис. 14). Полоса $0 \leq y \leq 3$ высекает на этих прямых два отрезка (рис. 14). Поэтому ответом к задаче являются все $a \in [-2; 1) \cup (1; 4]$.

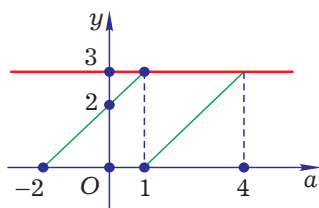


Рис. 14

12. Найти все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 2\sqrt{(x-4a)^2 + (y-2a)^2} = \\ = \sqrt{(x-8a)^2 + (y-4a)^2}, \\ 3x - 6y \geq 2 \end{cases}$$

не имеет решений.

Решение. Пусть $A = (4a; 2a)$, $B = (8a; 4a)$ — точки на координатной плоскости Oxy и $P(x; y)$ — точки, координаты которых удовлетворяют системе уравнений. Тогда

$$\Gamma_1 = AP = \sqrt{(x-4a)^2 + (y-2a)^2},$$

$$\Gamma_2 = BP = \sqrt{(x-8a)^2 + (y-4a)^2},$$

и первое уравнение системы описывает множество всех таких точек P , для которых $2\Gamma_1 = \Gamma_2$ (при фиксированном a).

Ясно, что точки A и B лежат на прямой $y = \frac{1}{2}x$. Из геометрии известно, что равенству $2\Gamma_1 = \Gamma_2$ удовлетворяют только такие точки P , которые расположены на окружности (рис. 15), центр которой расположен на прямой (AB) — это так называемая окружность Аполлония.

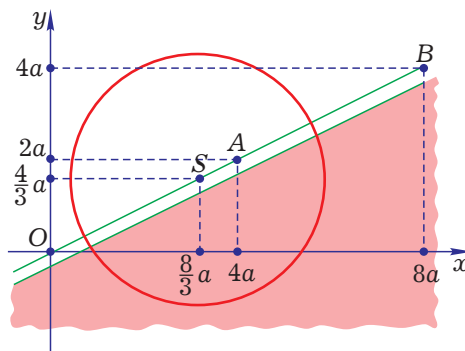


Рис. 15

Продолжая двигаться по этому чисто геометрическому пути, можно,

конечно, найти координаты центра S этой окружности и её радиус. Но в данном случае можно найти их и чисто алгебраически. (Одновременно фактически доказывая теорему об окружности Аполлония!) Имеем:

$$\begin{aligned} 4[(x-4a)^2 + (y-2a)^2] &= \\ &= (x-8a)^2 + (y-4a)^2, \\ 4(x^2 - 8ax + 16a^2 + y^2 - 4ay + 4a^2) &= \\ = x^2 - 16xa + 64a^2 + y^2 - 8ay + 16a^2, \\ 3x^2 - 16ax + 3y^2 - 8ay &= 0, \\ 3\left(x - \frac{8}{3}a\right)^2 + 3\left(y - \frac{4}{3}a\right)^2 &= \\ = 3\left(\frac{8}{3}a\right)^2 + 3\left(\frac{4}{3}a\right)^2, \\ \left(x - \frac{8}{3}a\right)^2 + \left(y - \frac{4}{3}a\right)^2 &= \frac{80}{9}a^2. \end{aligned}$$

Итак, уравнение $2\Gamma_1 = \Gamma_2$ определяет окружность с центром в точке $S = \left(\frac{8}{3}a; \frac{4}{3}a\right)$, расположенном на

прямой $y = \frac{1}{2}x$, с радиусом

$$R = \frac{4 \cdot |a| \cdot \sqrt{5}}{3} \quad (\text{см. рис. 15}).$$

Осталось заметить, что неравенство системы $3x - 6y \geq 2$ определяет точки полуплоскости, расположенные ниже прямой $3x - 6y = 2$, которая параллельна прямой $y = \frac{1}{2}x$.

Данная система не имеет решений только тогда, когда радиус окружности меньше расстояния между двумя параллельными прямыми, которое, как легко видеть, равно $\frac{2}{3\sqrt{5}}$.

Следовательно,

$$\frac{4 \cdot |a| \cdot \sqrt{5}}{3} < \frac{2}{3\sqrt{5}},$$

и поэтому $|a| < \frac{1}{10}$.

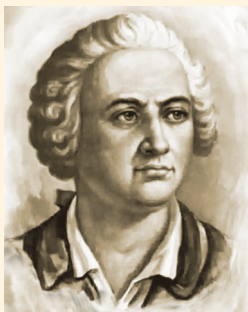
Ответ. $-0,1 < a < 0,1$.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор



Памятная медаль в одном экземпляре

К юбилею (50-летию) Льва Давидовича Ландау его друзья-коллеги отлили медаль, на которой отчеканили чёткий, красивый профиль учёного и сделали надпись: «Ot duraca slyshu». Она воспроизводила латинскими буквами одно из любимых выражений Ландау.



Нельзя путать

В некоторых зарубежных руководствах по химии в конце XVIII века упоминалось имя М.В. Ломоносова. Сведения о нём были скудные, а в одном из них делалось такое «предостережение»: «Среди химиков, которые стали известными учёными, мы упомянем Михайло Ломоносова, которого не надо смешивать с поэтом того же имени».