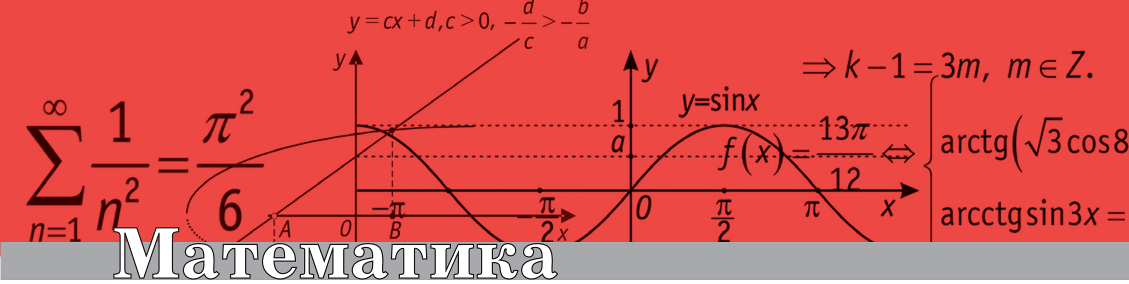


Вавилов Валерий Васильевич
Профессор кафедры математики школы имени А.Н. Колмогорова СУНЦ МГУ имени М.В. Ломоносова. Заслуженный преподаватель и лауреат Ломоносовской премии МГУ. Автор 38 книг, более 30 статей научного, методического и научно-популярного характера.

Геометрическая алгебра

В статье содержатся решения различных алгебраических задач с привлечением соображений геометрического характера. Некоторые из задач, конечно, допускают и чисто алгебраические решения, но они, как правило, приводят к значительным вычислениям.

1. Найти все виды целых чисел $(x;\ y)$, удовлетворяющих системе:

$$\begin{cases} 3x^2 - 8xy - y^2 = 18, \\ x^2 + y^2 - 2x + 8y + 16 = 0. \end{cases}$$

Решение. Выделив полные квадраты, запишем второе уравнение в виде

$$(x-1)^2 + (y+4)^2 = 1.$$

Это уравнение задаёт окружность единичного радиуса (рис. 1) с центром в точке (1; –4). На этой окружности есть всего четыре точки с целыми координатами:

(0; –4), (2; –4), (1; –3), (1; –5).

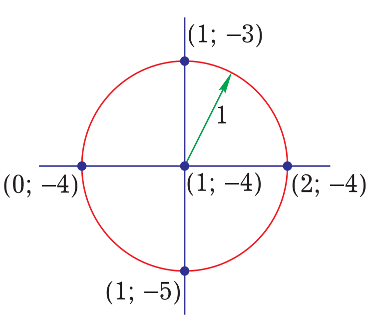


Рис. 1

Координаты первых двух из этих точек не удовлетворяют первому уравнению системы, что легко установить непосредственной проверкой.

Ответ. (1; –3), (1; –5).

2. Найти все значения x, для каждого из которых неравенство

$$(2-x)a^2 + (x^2 - 2x + 3)a - 3x \geq 0$$

выполняется для любого значения a из промежутка $[-3;\ 0]$.

Решение. Возможны несколько путей решения этой задачи. Во-первых, можно использовать так называемый метод парабол (как при решении задач на расположение корней квадратного трёхчлена), причём по любой из переменных. Но это приведёт к рассмотрению нескольких случаев.

Другой подход состоит в нахождении сначала всех точек $(x;\ a)$ в плоскости Oxa, координаты которых удовлетворяют данному неравенству.

Заметим, что при $a = x$ многочлен в левой части обращается в нуль:

$$(2-x)x^2+(x^2-2x+3)x-3x=$$
$$=2x^2-x^3+x^3-2x^2+3x-3x=0.$$

Поэтому, производя «деление уголком», получим, что данное неравенство можно написать в виде

$$(a-x)((2-x)a+3)\geq 0.$$

Прямая $a=x$ и гипербола $(2-x)a+3=0$ делят плоскость на шесть частей, но только три из них состоят из точек, координаты которых удовлетворяют данному неравенству (см. рис. 2); в этом можно убедиться, выбрав по одной точке в каждой части. Из полученного рисунка видно, что искомым значением x является только $x=-1$.

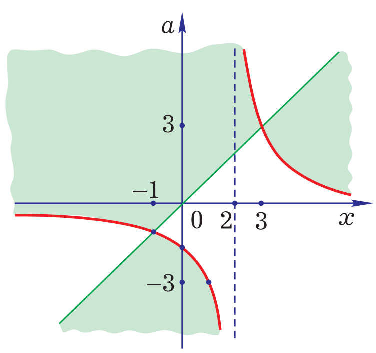


Рис. 2

3. Найти: а) наибольшее значение выражения

$$\mathrm{A}(x;y)=|y|\cdot\sqrt{1-x^2}+\sqrt{16-y^2}\cdot|x|;$$

б) наименьшее значение выражения

$$B(x;y)=|x|+|y|+\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}.$$

Решение. а) Рассмотрим векторы

$$\overline{p}\left(|y|;\sqrt{16-y^2}\right),\ \overline{q}=\left(\sqrt{1-x^2};|x|\right).$$

Тогда $|\overline{p}|=4,\ |\overline{q}|=1$ и

$$A(x;\ y)=\overline{p}\cdot\overline{q}=|\overline{p}|\cdot|\overline{q}|\cdot\cos\alpha=4\cos\alpha\leq 4.$$

Так как $A(1;\ 0)=4$, то искомое наибольшее значение равно 4.

б) Для точки $P=P(x;\ y)$ выражение $B(x;y)$ представляет собой длину трёхзвенной ломаной $NPMO$ (рис. 3), соединяющей точки $N=(1;\ 3)$ и $O=(0;\ 0)$. Действительно,

$$PM=|y|,\ MO=|x|,$$
$$PN=\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}.$$

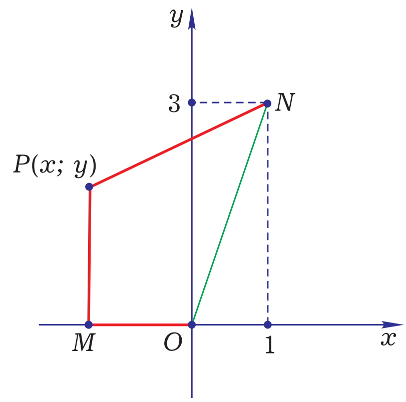


Рис. 3

Кратчайшее расстояние между точками O и N равно

$$ON=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}.$$

Поэтому $B(x;y)\geq\sqrt{10}$. Но $B(0;0)=\sqrt{10}$, и, следовательно, искомое наименьшее значение равно $\sqrt{10}$.

4. Какое наибольшее значение может принимать выражение

$$\cos x+\cos y+\cos z$$

при условии

$$\sin x+\sin y+\sin z\geq\sqrt{3}\,?$$

Решение. На тригонометрическом круге рассмотрим три точки

$$A=(\cos x;\ \sin x),$$
$$B=(\cos y;\ \sin y),$$
$$C=(\cos z;\ \sin z).$$

По условию задачи конец вектора $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ расположен в сегменте круга радиуса 3 (рис. 4). Первая координата вектора $\overrightarrow{OP}$ равна

$$\cos x+\cos y+\cos z$$

и потому эта величина принимает наибольшее значение тогда, когда $P=D$. Следовательно, искомое наибольшее значение равно

$$\sqrt{9-3}=\sqrt{6}.$$

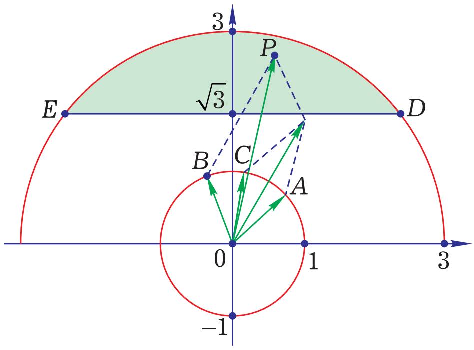


Рис. 4

5. Среди всех решений системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z^2 + v^2 = 9, \\ xv + yz \geq 6 \end{cases}$$

найти такие, при каждом из которых выражение $x + z$ принимает наибольшее значение.

Решение. Пусть $\overline{p}$ – вектор с координатами x и y, а вектор $\overline{q}$ имеет координаты $(v;\, z)$: $\overline{p} = x\overline{i} + y\overline{j}$, $\overline{q} = v\overline{i} + z\overline{j}$ (рис. 5). Тогда

$$|\overline{p}| = \sqrt{x^2 + y^2} = 2, \ |\overline{q}| = \sqrt{v^2 + z^2} = 3,$$

и по условию $\overline{p} \cdot \overline{q} = xv + yz \geq 6$.

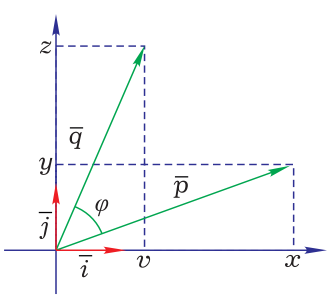


Рис. 5

С другой стороны,

$$\overline{p} \cdot \overline{q} = |\overline{p}| \cdot |\overline{q}| \cos\varphi,$$

φ – величина угла между векторами $\overline{p}$ и $\overline{q}$. Следовательно, $\cos\varphi \geq 1$ и поэтому $\varphi = 0$. Другими словами, векторы $\overline{p}$ и $\overline{q}$ сонаправлены, т. е. существует такое $t > 0$, что $\overline{q} = t \cdot \overline{p}$.

Ясно, что

$$t = \frac{|\overline{q}|}{|\overline{p}|} = \frac{3}{2}.$$

Таким образом,

$$v = \frac{3}{2}x, \ \ z = \frac{3}{2}y,$$

$$x + z = x + \frac{3}{2}y = \overline{p} \cdot \overline{c},$$

где вектор $\overline{c}$ имеет координаты

$$\left(1;\, \frac{3}{2}\right); \ |\overline{c}| = \sqrt{1 + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Произведение $\overline{p} \cdot \overline{c}$ принимает своё наибольшее значение, когда векторы $\overline{p}$ и $\overline{c}$ сонаправлены. Следовательно $\overline{p} = m\overline{c}$, где

$$m = \frac{|\overline{p}|}{|\overline{c}|} = \frac{4}{\sqrt{13}}.$$

Итак, искомое наибольшее значение достигается при

$$x = \frac{4}{\sqrt{13}},$$

$$y = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{13}} = \frac{6}{\sqrt{13}},$$

$$z = \frac{3}{2}y = \frac{9}{\sqrt{13}},$$

$$v = \frac{3}{2}x = \frac{6}{13},$$

и оно равно $\sqrt{13}$.

6. Числа x, y, z таковы, что

$$\begin{cases} 3x^2 + 3xy + y^2 = 75, \\ y^2 + 3z^2 = 48, \\ z^2 + zx + x^2 = 9, \\ x,\, y,\, z > 0. \end{cases}$$

Найти $xy + 2yz + 3xz$.

Решение. В основе решения задачи лежит тот факт, что выражение вида $(x,\, y > 0)$

$$X^2 + A \cdot X \cdot Y + Y^2$$

можно интерпретировать как квадрат длины стороны треугольника (со сторонами x, y), лежащей против угла φ так, что $A = -2\cos\varphi$. Это следует из теоремы косинусов для этого треугольника (рис. 6).

Построим на плоскости три луча с общим началом O и углами между соседними лучами в 150, 90 и 120 градусов (рис. 7).

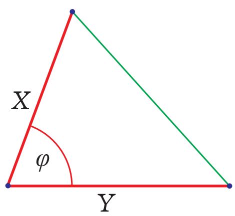


Рис. 6

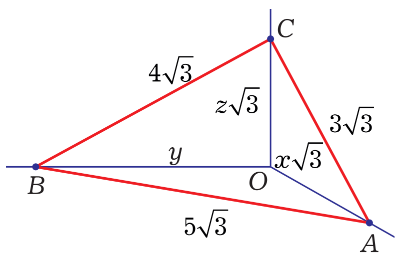


Рис. 7

Рассмотрим на этих лучах три точки A, B и C такие, что $OA = x\sqrt{3}$, $OB = y$, $OC = z\sqrt{3}$.

Таким образом, по условию задачи:

$$AB = \sqrt{75} = 5\sqrt{3},$$
$$BC = \sqrt{48} = 4\sqrt{3},$$
$$AC = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

Имеем ($[T]$ – площадь треугольника T):

$$[ABC] = [OAB] + [OAC] + [OBC] =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} xy \sin 150^\circ + \frac{3}{2} zx \cdot \sin 120^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} yz =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(xy + 2yz + 3xz).$$

Треугольник ABC – прямоугольный, т. к. $AB^2 = CB^2 + CA^2$, следовательно, $[ABC] = \frac{3}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 18$. Итак,

$$xy + 2yz + 3xy = 18\frac{4}{\sqrt{3}} = 24\sqrt{3}.$$

7. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{(x-a)^2 + (y-a^2)^2} = \\ = |a|\sqrt{1+a^2}, \\ (x-4)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Пусть $A = (a;\, a^2)$ и $P(x;\, y)$ – такая точка, координаты которой удовлетворяют системе уравнений. Из второго уравнения системы следует, что P лежит на окружности радиуса 1 с центром в точке (4; 0). Если $\Gamma_1 = OP$, $\Gamma_2 = AP$, то первое уравнение можно записать в виде (см. рис. 8)

$$\Gamma_1 = OA + \Gamma_2,$$

где $OA = \sqrt{a^2 + (a^2)^2} = |a|\sqrt{1+a^2}$.

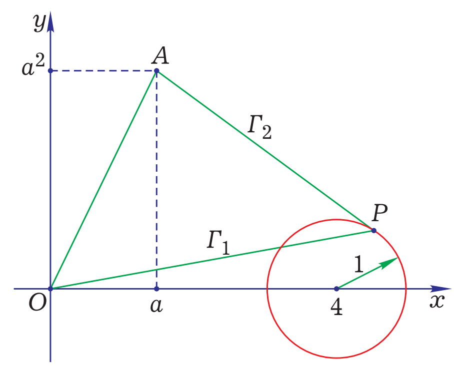


Рис. 8

Отсюда следует, что точки O, A и P лежат на прямой $y = ax$, причём точка A лежит между точками O и P. Отметим также, что при $a < 0$ система вообще не имеет решений, так как в этом случае точки O, A, P расположатся в другом порядке.

Из сказанного и условия задачи следует, что нам нужно найти такое значение a, при котором прямая

$y = ax$, $a > 0$, касается окружности $(x-4)^2 + y^2 = 1$. Имеем (см. рис. 9):

$$a = \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}.$$

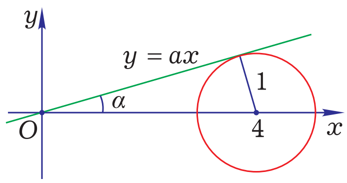


Рис. 9

8. Найти все значения параметров a и b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 5 = b^2 + 2x - 4y, \\ x^2 + (12-2a)x + y^2 = 2ay + 12a - 2a^2 - 27 \end{cases}$$

имеет два решения $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, удовлетворяющие условию

$$\frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}.$$

Решение. Выделяя полные квадраты, запишем заданную систему в виде:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 = b^2, \\ (x + (a-6))^2 + (y-a)^2 = 9; \end{cases}$$

а данное условие запишем в форме $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$. Каждое из уравнений системы задаёт окружность (рис. 10). Две окружности пересекаются в двух точках только тогда, когда

$$|R_1 - R_2| < O_1O_2 < R_1 + R_2.$$

Из условия следует, что точки $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ равноудалены от начала координат, и поэтому точка O принадлежит линии центров (O_1O_2). Прямая (O_1O_2) имеет уравнение

$$\frac{x-1}{a-6-1} = \frac{y+2}{a+2};$$

отсюда при $x = y = 0$ получаем, что $a = 4$. При $a = 4$ получаем $O_1O_2 = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ и следующее условие для пересечения двух окружностей: $\left||b| - 3\sqrt{5}\right| < 3$.

Ответ. $a = 4$; $\left||b| - 3\sqrt{5}\right| < 3$.

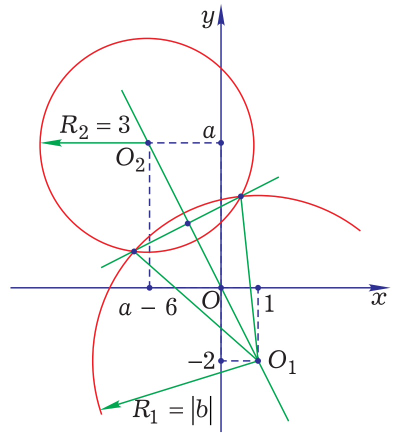


Рис. 10

9. При $a \geq 2$ решить уравнение

$$\sqrt{a^2 + (x-4)^2} + \frac{1}{\sqrt{5}}|a - 2x - 2| = 2\sqrt{5}.$$

Решение. Рассмотрим координатную плоскость Oxa. В этой плоскости величина $\Gamma_1 = \sqrt{a^2 + (x-4)^2}$ является расстоянием от точки $A = (4; 0)$ до точек $P(x; a)$, координаты которых удовлетворяют данному уравнению. Легко увидеть, что (см. рис. 11) $AB = 2\sqrt{5}$. Кроме того, величина $\Gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}|a - 2x - 2|$ выражает (по известной формуле) расстояние от точки $P(x; a)$ до прямой $a - 2x - 2 = 0$. Заметим также, что прямая (AB) перпендикулярна прямой (BQ). Равенство $\Gamma_1 + \Gamma_2 = AB$ возможно лишь тогда, когда точка P принадлежит отрезку $[AB]$; это следует из того, что длина проекции отрезка $[PQ]$ на отрезок $[AB]$ равна Γ_2. На отрезке $[AB]$ есть только одна точка $(x;\ a)$, для которой $a \geq 2$. Поэтому при $a = 2$ мы получаем $x = 0$, а при $a > 2$ данное уравнение решения не имеет.

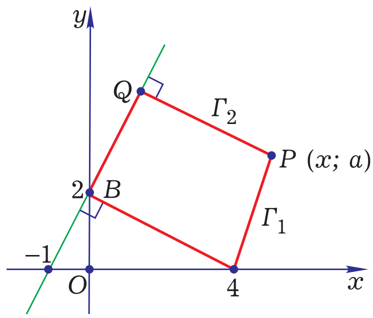


Рис. 11

10. Найти все значения a, для каждого из которых уравнение

$$|\cos x + 2\sin x + a| = a - 2\cos x - \sin x$$

имеет по крайней мере одно решение, принадлежащее полуинтервалу $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение. Пусть $u = \cos x$, $v = \sin x$. Тогда данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} |u + 2v + a| = a - 2u - v, \\ u^2 + v^2 = 1, \end{cases}$$

т. е. равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} u + 2v + a = a - 2u - v, \\ u^2 + v^2 = 1, \\ u + 2v + a \ge 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(u + 2v + a) = a - 2u - v, \\ u^2 + v^2 = 1 \\ u + 2v + a < 0. \end{cases}$$

Для первой из этих систем получаем, что $\frac{v}{u} = \operatorname{tg} x = -1$, т. е. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in Z.$

Тем самым, первая система совокупности ни при каком a не имеет решений, принадлежащих множеству $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Рассмотрим вторую систему. После её преобразований получим систему

$$\begin{cases} u - v = 2a, \\ u^2 + v^2 = 1, \\ v + a < 0. \end{cases}$$

Из рис. 12 видно, что первые два уравнения этой системы определяют две точки пересечения прямой и единичной окружности (в случае, когда они пересекаются). Поэтому если $-1 \le -2a < 1$, то система уравнений

$$\begin{cases} u - v = 2a, \\ u^2 + v^2 = 1 \end{cases}$$

имеет такое решение $(u_0; v_0)$, для которого $-1 < u_0 \le 0$ и $-1 \le v_0 < 0$. Неравенство $v < -a$ определяет полуплоскость в системе координат Ouv. И, как легко проверить (см. рис. 12), при любом $a \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ точка $(u_0; v_0)$ расположена в этой части полуплоскости

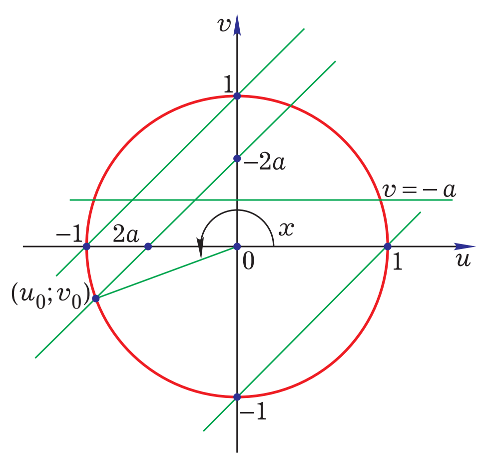


Рис. 12

Ответ. $a \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

11. Найти все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система

$$\begin{cases} y^2-(2a+1)y+a^2+a-2=0, \\ \sqrt{(x-a)^2+y^2}+\sqrt{(x-a)^2+(y-3)^2}=3. \end{cases}$$

Решение. Второе уравнение этой системы определяет точки $P(x_0;y_0)$ в декартовой системе координат Oxy, для которых $\Gamma_1+\Gamma_2=3$, где (рис. 13) $A=(a;\ 0)$, $B=(a;\ 3)$; $\Gamma_1=AP$, $\Gamma_2=BP$.

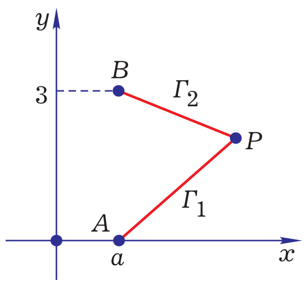


Рис. 13

Так как $AB=3$, то точка P может быть любой точкой отрезка AB. Отсюда заключаем, что второму уравнению системы удовлетворяют все пары $(a,\ y)$, где $y\in[0;3]$, a – любое действительное число.

Квадратное относительно y уравнение системы имеет два корня $y_1=a-1$, $y_2=a+2$. Следовательно, его можно переписать в виде

$$(y-a+1)(y-a-2)=0.$$

Это равенство в системе координат Oay задаёт множество точек, расположенных на двух параллельных прямых (рис. 14). Полоса $0\le y\le 3$ высекает на этих прямых два отрезка (рис. 14). Поэтому ответом к задаче являются все $a\in[-2;\ 1)\cup(1;\ 4]$.

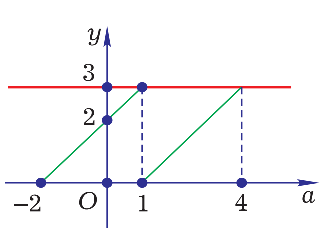


Рис. 14

12. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 2\sqrt{(x-4a)^2+(y-2a)^2}= \\ =\sqrt{(x-8a)^2+(y-4a)^2}, \\ 3x-6y\ge 2 \end{cases}$$

не имеет решений.

Решение. Пусть $A=(4a;\ 2a)$, $B=(8a;\ 4a)$ – точки на координатной плоскости Oxy и $P(x;\ y)$ – точки, координаты которых удовлетворяют системе уравнений. Тогда

$$\Gamma_1=AP=\sqrt{(x-4a)^2+(y-2a)^2},$$

$$\Gamma_2=BP=\sqrt{(x-8a)^2+(y-4a)^2},$$

и первое уравнение системы описывает множество всех таких точек P, для которых $2\Gamma_1=\Gamma_2$ (при фиксированном a).

Ясно, что точки A и B лежат на прямой $y=\dfrac{1}{2}x$. Из геометрии известно, что равенству $2\Gamma_1=\Gamma_2$ удовлетворяют только такие точки P, которые расположены на окружности (рис. 15), центр которой расположен на прямой (AB) – это так называемая окружность Аполлония.

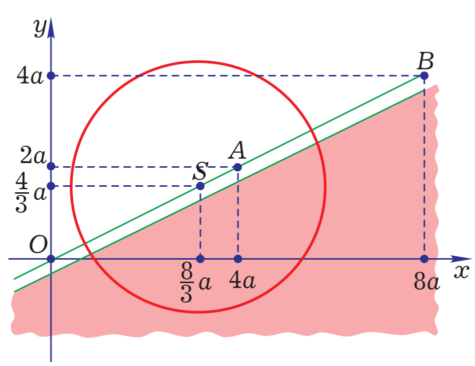


Рис. 15

Продолжая двигаться по этому чисто геометрическому пути, можно, конечно, найти координаты центра S этой окружности и её радиус. Но в данном случае можно найти их и чисто алгебраически. (Одновременно фактически доказывая теорему об окружности Аполлония!) Имеем:

$$4\left[(x-4a)^2+(y-2a)^2\right]=$$
$$=(x-8a)^2+(y-4a)^2,$$
$$4(x^2-8ax+16a^2+y^2-4ay+4a^2)=$$
$$=x^2-16xa+64a^2+y^2-8ay+16a^2,$$
$$3x^2-16ax+3y^2-8ay=0,$$
$$3\left(x-\frac{8}{3}a\right)^2+3\left(y-\frac{4}{3}a\right)^2=$$
$$=3\left(\frac{8}{3}a\right)^2+3\cdot\left(\frac{4}{3}a\right)^2,$$
$$\left(x-\frac{8}{3}a\right)^2+\left(y-\frac{4}{3}a\right)^2=\frac{80}{9}a^2.$$

Итак, уравнение $2\Gamma_1=\Gamma_2$ определяет окружность с центром в точке $S=\left(\frac{8}{3}a;\ \frac{4}{3}a\right)$, расположенном на прямой $y=\frac{1}{2}x$, с радиусом $R=\frac{4\cdot|a|\cdot\sqrt{5}}{3}$ (см. рис. 15).

Осталось заметить, что неравенство системы $3x-6y\geq 2$ определяет точки полуплоскости, расположенные ниже прямой $3x-6y=2$, которая параллельна прямой $y=\frac{1}{2}x$.

Данная система не имеет решений только тогда, когда радиус окружности меньше расстояния между двумя параллельными прямыми, которое, как легко видеть, равно $\frac{2}{3\sqrt{5}}$. Следовательно,

$$\frac{4\cdot|a|\cdot\sqrt{5}}{3}<\frac{2}{3\sqrt{5}},$$

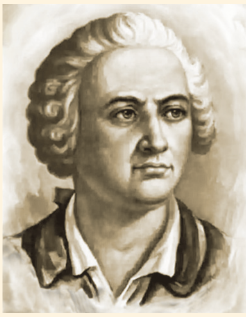
и поэтому $|a|<\frac{1}{10}$.

Ответ. $-0{,}1<a<0{,}1$.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Памятная медаль в одном экземпляре

К юбилею (50-летию) Льва Давидовича Ландау его друзья-коллеги отлили медаль, на которой отчеканили чёткий, красивый профиль учёного и сделали надпись: «Ot duraca slyshu». Она воспроизводила латинскими буквами одно из любимых выражений Ландау.



Нельзя путать

В некоторых зарубежных руководствах по химии в конце XVIII века упоминалось имя М.В. Ломоносова. Сведения о нём были скудные, а в одном из них делалось такое «предостережение»: «Среди химиков, которые стали известными учёными, мы упомянем Михайло Ломоносова, которого не надо смешивать с поэтом того же имени».