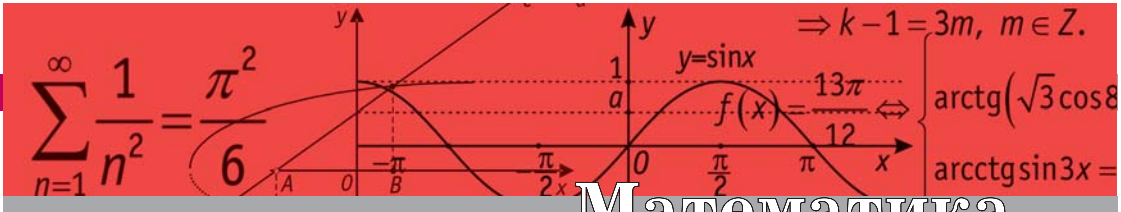


Пиголкина Татьяна Сергеевна
Выпускница МФТИ. Доцент,
заслуженный работник высшей школы,
заслуженный преподаватель МФТИ.

Геодезические линии на развёртывающихся поверхностях

Кратчайшая кривая на поверхности, соединяющая две её точки, называется геодезической линией, или просто геодезической. В рамках школьного курса геометрии геодезические могут рассматриваться на поверхности многогранника, на боковых поверхностях цилиндра и конуса, которые имеют развёртку на плоскости. Задачи на эту тему предлагаются на олимпиадах различных уровней и этапов.

I. Развёрткой многогранника называется плоская фигура, составленная из многоугольников, соответственно равных граням многогранника. Можно сказать, что развёртка многогранника – это его плоская «выкройка», перенеся которую, например, на картон, вырезав и затем согнув по указанным на «выкройке» линиям, соответствующим рёбрам многогранника, сложим сам многогранник.

Чтобы составить развёртку многогранника, предполагают, что его поверхность сделана из нерастяжимого плотного материала (бумаги, картона) и, мысленно проводя разрезы по нескольким рёбрам, получают возможность разложить его поверхность на плоскости. Каждая грань многогранника представлена на развёртке один раз. Очевидно, что площадь развёртки равна площади поверхности многогранника.

Рассмотрим для примера развёртку кубика с ребром a. На рис. 1 *а*, *б*, *в* на кубиках жирно выделены рёбра, по которым сделаны разрезы, ниже даны соответствующие развертки. Приведены три различные развёртки (всего у кубика их 11, попробуйте найти их самостоятельно).

Кратчайшая кривая на поверхности многогранника, соединяющая две точки M и N поверхности многогранника (геодезическая), есть наименьший из отрезков, *целиком лежащих на развёртках* (если их несколько), соединяющих точки M и N.

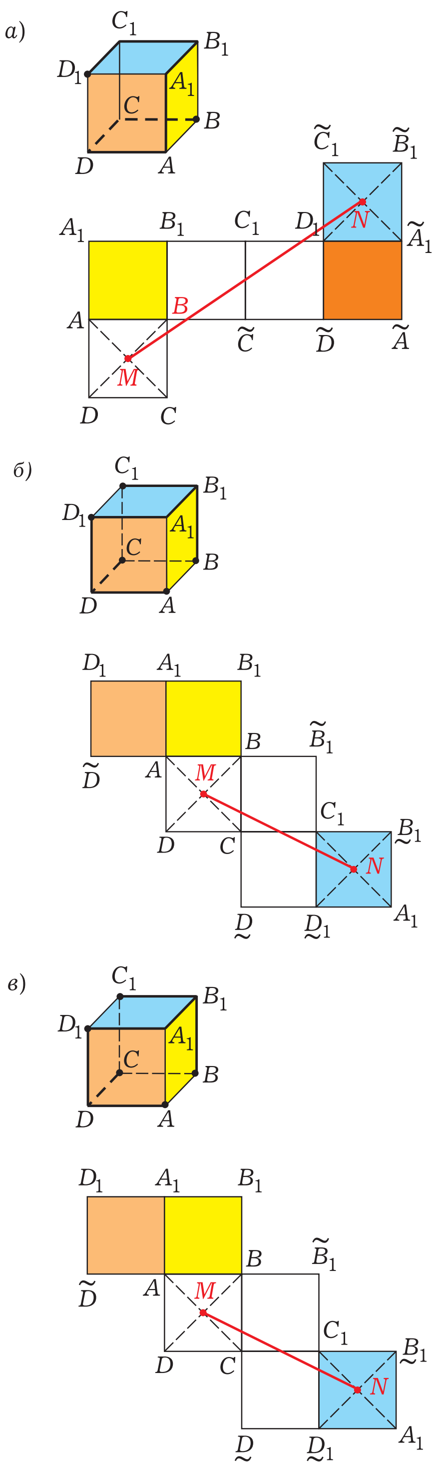


Рис. 1

Например, если нас интересует кратчайшая кривая, соединяющая центры M и N граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ кубика, то развёртка *а*) нам не даёт ответа, так как отрезок MN не лежит целиком на развёртке; на развёртке *б*) длина отрезка MN равна $2a$; на развёртке *в*) длина отрезка MN равна $\sqrt{(2a)^2 + a^2} = \sqrt{5}a$ (надо построить прямоугольный треугольник с гипотенузой MN и катетами, параллельными рёбрам AD и DC). Можно убедиться, что кратчайшее расстояние равно $2a$, и на поверхности рассматриваемого кубика это, например, ломаная, пересекающая рёбра CD и C_1D_1 и перпендикулярная им (рис. 2).

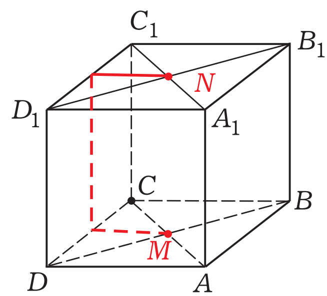


Рис. 2

Самая известная (и самая первая) из задач о кратчайшем пути на поверхности многогранника, породившая целый класс задач с развёртками, – это задача о «Пауке и мухе» английского математика и искусного изобретателя математических головоломок Генри Дьюдени (1857 – 1931). В 90-х годах XIX века Дьюдени помещал статьи по математике и головоломки в журнале «Tit-bits» («Лакомые кусочки»). Задача о «пауке и мухе» была впервые опубликована там же в 1903 г., но стала широко известной после того, как в 1905 году её перепечатала массовая ежедневная газета Daily Mail – в те годы самая тиражная газета в мире. В России задачу, видимо, узнали тогда же, например, по воспоминаниям дочери Л.Н. Толстого – Татьяны Львовны – она познакомила с ней Л.Н. Толстого (он собирал нестандартные математические задачи), который нашёл её интересной и предлагал решить многим своим ученикам.

Задача 1. (Задача Дьюдени) Внутри прямоугольной комнаты, имеющей 30 футов[1] в длину и по 12 футов в высоту и ширину, на середине одной из торцовых стен в 1 футе от пола сидит паук P. Муха M сидит на середине противоположной стороны в 1 футе от потолка (рис. 3). От страха у мухи отнялись крылья и лапки, и она не может сдвинуться с места. Спрашивается, какое наименьшее расстояние должен проползти паук, чтобы добраться до мухи?

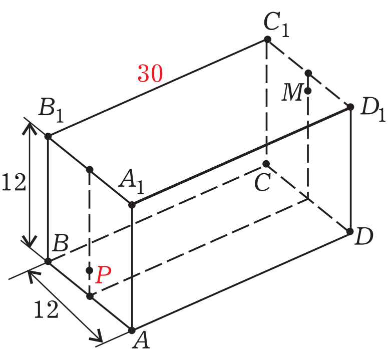
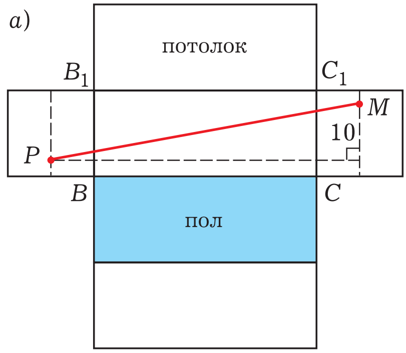


Рис. 3

Решение. Представим себе, что комната – это картонная коробка. Сделаем 4 развертки, которые отличаются положением торцовых стен. На них отмечены положения паука и мухи и прямой путь, которым, не сходя с картона, может двигаться паук.

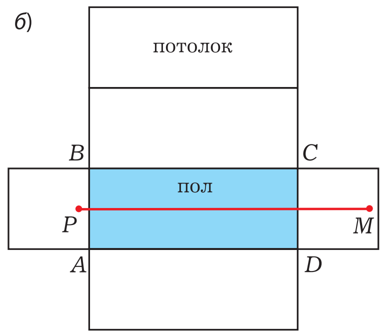
а)



$$PM = \sqrt{10^2 + 42^2} \simeq 43{,}17 \text{ (фт)}$$

Рис. 4

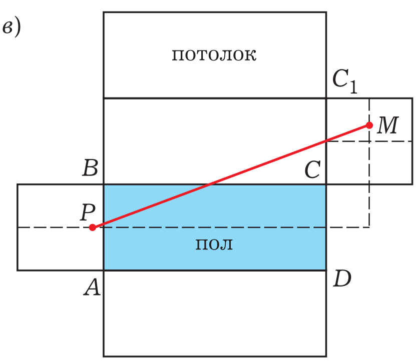
б)



$$PM = 42 \text{ (фт)}$$

Рис. 5

в)

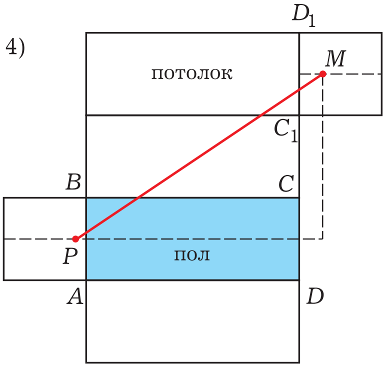


$$PM = \sqrt{37^2 + 17^2} \simeq 40{,}72 \text{ (фт)}$$

Рис. 6

[1] Фут (от англ. Foot – ступня), в системе английских мер 1 фут = 12 дюймов = 0,3048 м.

4)



$$PM = \sqrt{32^2 + 24^2} \simeq 40\ (\text{фт})$$

Рис. 7

Как видим, кратчайший путь – это путь на развёртке (рис. 7). При этом паук ползёт по пяти из шести граней коробки: по обеим торцевым стенам, потолку, боковой стене и полу.

Ответ. 40 фт.

Куб и прямоугольный параллелепипед по-иному называются прямой четырёхугольной призмой. Для них мы строили развёртки. Аналогичный подход применим к построению развёрток прямой треугольной призмы, который используем в следующей задаче.

Задача 2. (Олимпиада регионального этапа) Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, сторона основания ABC равна a, боковое ребро ровно b (рис. 8).

Найти на поверхности призмы кратчайшее расстояние между вершиной A_1 и серединой ребра BC – точкой M (рис. 8).

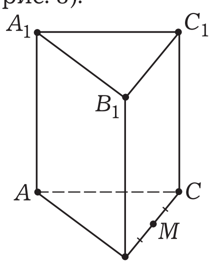


Рис. 8

Решение. Рассмотрим три основные развёртки прямой треугольной призмы, на которых боковая грань AA_1B_1B помещена в середину (один из разрезов по боковому ребру CC_1), а грань $A_1B_1C_1$ занимает одинаковое положение. На каждой развёртке отметим отрезки A_1M (рис. 9).

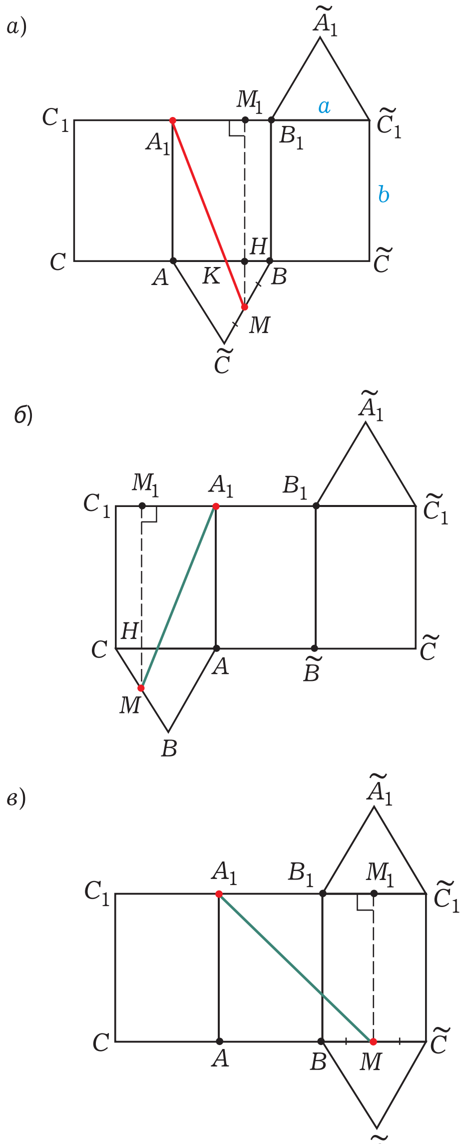


Рис. 9

Вычислим длину отрезка A_1M на развертке а). Пусть $MM_1 \perp A_1B_1$, тогда $MH \perp AB$, $HM_1 = BB_1 = b$, $HB = MB \cdot \cos 60° = \frac{a}{4}$, тогда $A_1M_1 = AH = \frac{3}{4}a$; $MH = MB \cdot \sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, поэтому $MM_1 = b + \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Из прямоугольного треугольника A_1MM_1 находим

$$A_1M = \sqrt{A_1M_1^2 + MM_1^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4}a^2 + b^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}ab}\,. \qquad (1)$$

На развёртке *б)* отрезок A_1M имеет такую же длину. Это следует из того, что треугольник A_1MM_1 на развёртке *б)* равен треугольнику A_1MM_1 на развёртке *а)*. На развёртке *в)* длина отрезка A_1M определяется совсем просто ($A_1M_1 = \frac{3}{2}a$):

$$A_1M = \sqrt{A_1M_1^2 + MM_1^2} = \sqrt{\frac{9}{4}a^2 + b^2}\,. \qquad (2)$$

Сравним длины отрезков $(A_1M)_1$ из формулы (1) и $(A_1M)_2$ из формулы 2.

$$(A_1M)_1 \vee (A_1M)_2 \Leftrightarrow (A_1M)_1^2 \vee$$

$$\vee (A_1M)_2^2 \Leftrightarrow \frac{3}{4}a^2 + b^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}ab \vee$$

$$\vee \frac{9}{4}a^2 + b^2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}ab \vee \frac{3}{2}a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}b \vee 3a \Leftrightarrow b \vee \sqrt{3}a.$$

Вывод. Если $b < \sqrt{3}a$, то пути $(A_1M)_1 = A_1KM = A_1PM$ короче;

если $b > \sqrt{3}a$, то короче путь $(A_1M)_2 = A_1SM$;

при $b = \sqrt{3}a$ все три рассмотренные пути равны по длине, кратчайшее расстояние равно $\frac{\sqrt{21}}{3}a$.

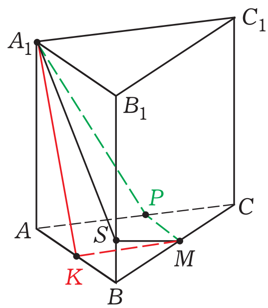


Рис. 10

На поверхности призмы все три пути показаны на рис. 10.

Ответ. $\sqrt{\frac{3}{4}a^2 + b^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}ab}$ при $b < \sqrt{3}a$,

$\sqrt{\frac{9}{4}a^2 + b^2}$ при $b > \sqrt{3}a$,

$\frac{\sqrt{21}}{3}a$ при $b = \sqrt{3}a$.

II. Правильный тетраэдр – это правильная треугольная пирамида, все рёбра которой равны между собой (рис. 11). Все его четыре грани – равносторонние треугольники. Предположим, что его поверхность сделана из плотного нерастяжимого материала (картона, бумаги). Разрежем поверхность по трём рёбрам, выходящим из одной вершины (например вершины D) и разложим на плоскости. Получим первую развёртку (рис. 12) поверхности тетраэдра (обозначим её *а*). Каждая грань тетраэдра равна соответствующему треугольнику развёртки.

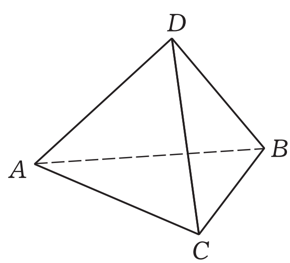


Рис. 11

Если разрезать по двум противоположным рёбрам (например по AC и

BD) и по одному ребру из другой пары противоположных рёбер (например, по AB), то получим (рис. 12) другую развёртку (обозначим её *б*). Развёрток других форм правильный тетраэдр не имеет.

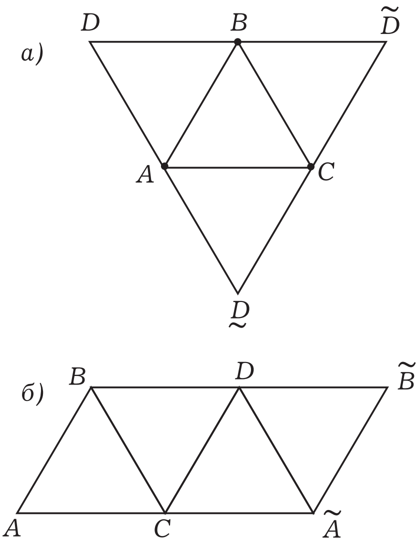


Рис. 12

Задача 3. (Университетская олимпиада) Ребро правильного тетраэдра равно 16. На высоте BH грани ABC отмечена точка K, а на высоте DH грани ADC – точка P, при этом $BK = DP = 5$. Найти длину кратчайшего пути из точки K в точку P на поверхности тетраэдра.

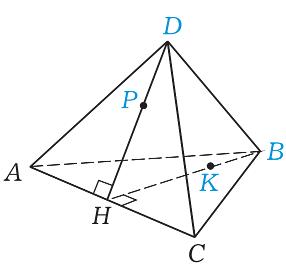


Рис. 13

Решение. Рассмотрим развертку *а*) (см. рис. 14). Из $BH \perp AC$ следует, что точка H – середина ребра AC, тогда в грани ADC отрезок DH также высота. Точка H лежит на прямой BD и отрезок PK также лежит на этой прямой.

Отрезки BH и D_1H – высоты правильных треугольников со стороной 16, они равны $8\sqrt{3}$, поэтому $(KP)_1 =$ $= (BH - BK) + (D_1H - D_1P) = 16\sqrt{3} - 10$.

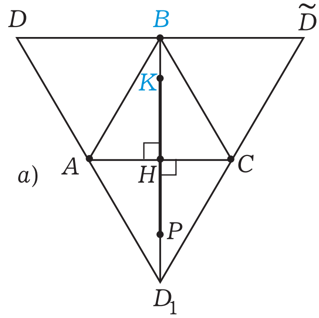


Рис. 14

Другой прямой путь по поверхности тетраэдра найдём на развёртке *б*) (см. рис. 15).

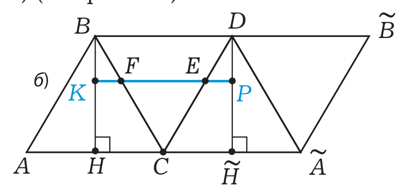


Рис. 15

Из $BH \perp AC$ и $D\tilde{H} \perp AC,\ BH = D\tilde{H}$ следует, что $HBD\tilde{H}$ – прямоугольник; $BK = DP \Rightarrow KBDP$ также прямоугольник (рис. 16), поэтому $(KP)_2 = BD = 16$.

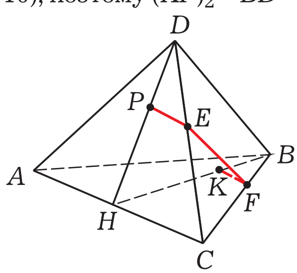


Рис. 16

Сравним длины $(KP)_1$ и $(KP)_2$: $16\sqrt{3} - 10 \vee 16 \Leftrightarrow 8\sqrt{3} \vee 13 \Rightarrow 192 \vee$ $\vee\ 169$, т.е. $(KP)_1 > (KP)_2$. Значит, кратчайший путь на развёртке – отрезок

$(KP)_2$, на поверхности тетраэдра – ломаная $KFEP$ ($PE \| AC$, $KF \| AC$).

Ответ. 16.

Задача 4. (МФТИ) На плоскости стола стоит мраморная пирамидка в виде правильного тетраэдра $ABCD$ с ребром a. На середине ребра AD сидит муха, а на прямой BC в точке P (точка C между точками P и B) сидит паук (рис. 17), $PC = a$. Муха видит паука, от страха у неё отнялись лапки и крылышки. Какой кратчайший путь должен проползти паук, чтобы добраться до мухи? В какой точке ребра AC паук пересечёт это ребро?

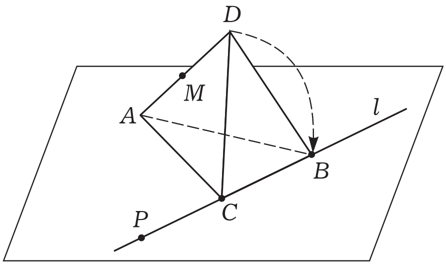


Рис. 17

Решение. Паук видит муху и начинает ползти в той полуплоскости относительно прямой PC, в которой лежит грань ABC. Хочется уложить грань ADC в плоскость стола, поэтому рассмотрим развёртку в плоскости стола, на которой ребро AC останется неподвижным, а точка D займёт место точки B (рис. 18) (заметим, что $\angle PCA = 120°$).

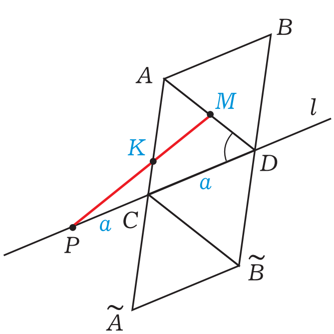


Рис. 18

Путь паука – отрезок PM, его длину легко найдём по теореме косинусов из треугольника PMD (рис. 19):

$$PM = \sqrt{PD^2 + DM^2 - 2 \cdot PD \cdot DM \cdot \cos 60°} =$$

$$= \sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot 2a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{13}}{2} a.$$

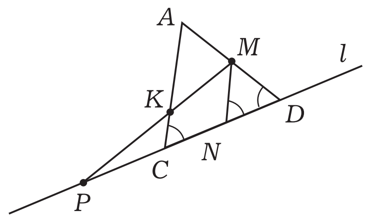


Рис. 19

Обозначим через K точку пересечения отрезков PM и AC. Пусть $MN \| AC$. Точка M – середина стороны AD, $MN \| AC \Rightarrow MN$ – средняя линия треугольника ADC, $MN = \frac{a}{2}$. Из параллельности KC и MN следует, что треугольник PKC подобен треугольнику PMN, $\frac{KC}{MN} =$

$$= \frac{PC}{PN} \Leftrightarrow \frac{KC}{\frac{a}{2}} = = \frac{a}{\frac{3a}{2}} \Leftrightarrow KC = \frac{a}{3}.$$

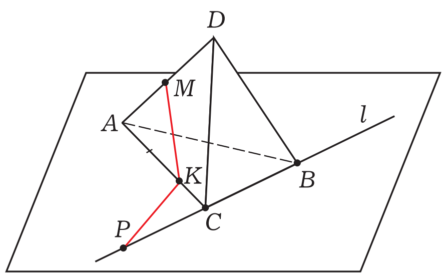


Рис. 20

Итак, путь паука – ломаная PKM (рис. 20), длина пути $\frac{\sqrt{13}}{2} a$, ребро AC паук пересечёт в точке K такой, что $CK = \frac{a}{3}$.

Ответ. $\frac{\sqrt{13}}{2} a$; $CK = \frac{a}{3}$.

III. Развёртка *боковой* поверхности цилиндра с радиусом основания R и высотой h получается разрезанием её по одной из образующих и развёртыванием на плоскость – это есть прямоугольник со сторонами h и $2\pi R$ (см. рис. 21).

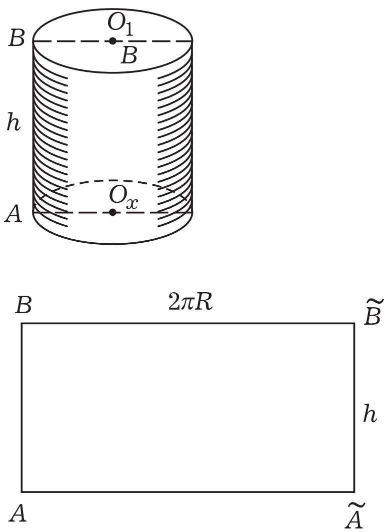


Рис. 21

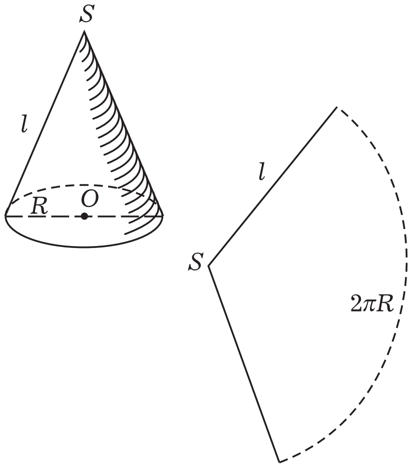


Рис. 22

Развёртка *боковой* поверхности конуса с образующей l и радиусом основания R представляет собой сектор окружности радиуса l, длина дуги которого $2\pi R$ (рис. 22).

Развёртки боковых поверхностей цилиндра и конуса и кратчайшие расстояния между точками на этих поверхностях изучаются в курсе начертательной геометрии в любом техническом вузе. И всё-таки некоторые несложные задачи попадают в число олимпиадных задач.

Задача 5. Осевое сечение конуса – равнобедренный треугольник ABC с основанием $AC = 1$ и боковыми сторонами $AB = BC = 2$. Найти длину кратчайшего пути на боковой поверхности конуса, начинающегося в точке A и оканчивающегося в той же точке A (рис. 23).

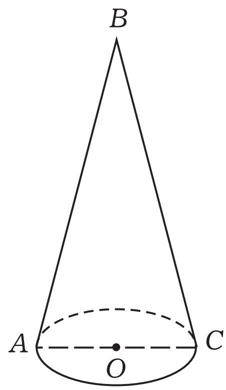


Рис. 23

Сделаем развёртку боковой поверхности конуса, разрезав его по образующей AB. Получим сектор круга с центром в точке B и радиусом $R = AB = 2$, при этом окружность основания перейдёт в дугу AA_1 длиной $L = 2\pi \cdot \dfrac{AC}{2} = \pi$. Длина окружности полученного круга равна $L_1 = 2\pi \cdot AB = 4\pi$. Значит, $L = \dfrac{1}{4}L_1$, т.е. центральный угол ABA_1 опирается на дугу ACA_1 с градусной мерой $\dfrac{1}{4} \cdot 360° = 90°$. Угол ABA_1 – прямой. Кратчайший путь от точки A до точки A_1 на развёртке – это отрезок AA_1, длина которого равна $2\sqrt{2}$ (рис. 24).

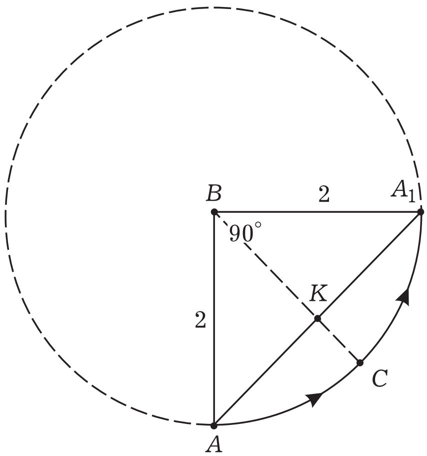


Рис. 24

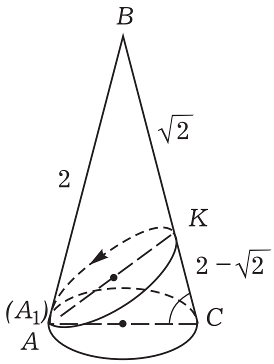


Рис. 25

Образ отрезка AA_1 на поверхности конуса – замкнутая кривая, симметричная относительно плоскости осевого сечения ABC (рис. 25).

Длины дуг AK и KA_1 равны $\sqrt{2}$, длина отрезка $AK \approx 1{,}05$ (в треугольнике ABC осевого сечения конуса находим $\cos C = \dfrac{AC/2}{BC} = \dfrac{1}{4}$; из треугольника AKC по теореме косинусов определяем:

$$AK = \sqrt{AC^2 + KC^2 - 2 \cdot AC \cdot KC \cdot \frac{1}{4}} \approx 1{,}05).$$

Ответ. $2\sqrt{2}$.

IV. Геодезия («geodaisa» – с греч. «землеразделение») зародилась в глубокой древности при определении участков владения, определении места постройки храмов и т.п. Из неё и вышла геометрия.

Как наука геодезия изучает земную поверхность, планету Земля в целом, её форму, размеры, гравитационное поле Земли, определение положения точки на земной поверхности и расстояния между точками и другие смежные вопросы. Геодезия имеет огромное значение в практической деятельности людей, в технике, строительстве, прокладывании дорог, в мореплавании и т.д. С развитием науки и новыми потребностями появилась космическая геодезия, изучающая Землю в околоземном пространстве.

Вопрос о кратчайших расстояниях на поверхности Земли стал актуален к XVII веку, и им занялись математики: Якоб и Иоганн Бернулли в XVII и Леонард Эйлер в XVIII веке добились существенных результатов. Название «геодезическая линия» для кратчайшего расстояния на земной поверхности ввёл Пьер Лаплас в 1798 году.

В XIX веке математики стали изучать расстояния на «кривых» поверхностях (отклоняющихся от плоскости) – это уже внутренние вопросы геометрии поверхностей. Сочинение Карла Гаусса 1827 года «Общее исследование о кривых поверхностях» положило начало развитию новой математической науки «Дифференциальная геометрия». Название «геодезическая линия» как кратчайшее расстояние между двумя точками на кривой поверхности сохранилось.