

Дворянинов Сергей Владимирович

*Кандидат физико-математических наук, доцент,
автор статей в журналах «Квант», «Математика в
школе», «Математика для школьников»,
«Математическое образование»,
«Домашний лицей», в газете «Математика».*



Где же ошибка, или парадоксы теории размерности

Статья рассказывает о применении теории размерности к геометрическим задачам и о подстерегающих на этом пути опасностях.

1. Применяем соображения размерности

В статье [1] на с.18 есть такая задача из книги Мартина Гарднера:

В шаре через центр просверлён канал длиной L . Каков объём оставшейся части шара?

Эта задача решена на основе соображений размерности. Кратко изложим это решение.

Ясно, что единственная возможность выразить объём через линейную величину L — это использовать формулу

$$V_{ост.} = C \cdot L^3, \quad (1)$$

где C — некоторая безразмерная константа. Например, в формуле длины окружности такая константа равна 2π , в формуле площади круга — π . Эта константа C находится при рассмотрении подходящего частного

случая. Здесь целесообразно рассмотреть уменьшающиеся значения радиуса канала. Чем меньше этот радиус, т.е. чем тоньше канал, тем ближе длина канала к диаметру шара. При $L \rightarrow 2R$ объём оставшейся части шара стремится к объёму самого шара $\frac{4}{3}\pi R^3$, и потому в пределе из (1) получаем равенство

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = C(2R)^3.$$

Отсюда находим $C = \frac{\pi}{6}$, и соответственно получаем ответ на вопрос задачи:

$$V_{ост.} = \frac{\pi}{6} \cdot L^3.$$

2. Стандартное нахождение объёма

Формулу объёма оставшейся части шара можно получить и без теории размерности. Для этого рассмотрим сечение шара плоскостью, проходящей через ось симметрии канала и, разумеется, через центр шара радиусом R (рис.1).

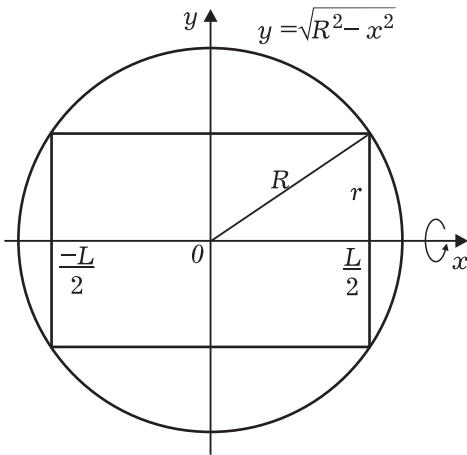


Рис. 1

Криволинейная трапеция, ограниченная графиком функции $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ на отрезке $-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$, при вращении вокруг оси абсцисс заворачивает шаровой слой. Напомним, что в подобных случаях объём тела вращения выражается интегралом

$$V = \pi \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

В нашем случае объём шарового слоя равен

$$\begin{aligned} V_{\text{шар.слой}} &= 2\pi \int_0^{L/2} (R^2 - x^2) dx = \\ &= 2\pi \cdot \left(\frac{R^2 L}{2} - \frac{L^3}{24} \right) = \pi \left(R^2 L - \frac{L^3}{12} \right). \end{aligned}$$

Из этого объёма следует вычесть объём цилиндра с высотой L и радиусом основания $r = \sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}}$:

$$V_{\text{цил.}} = \pi \left(R^2 - \frac{L^2}{4} \right) \cdot L = \pi \left(R^2 L - \frac{L^3}{4} \right).$$

Так находим объём оставшейся части шара:

$$\begin{aligned} V &= V_{\text{шар.слой}} - V_{\text{цил.}} = \\ &= \pi \left(-\frac{L^3}{12} + \frac{L^3}{4} \right) = \pi \cdot \frac{L^3}{6}. \end{aligned}$$



3. Решаем аналогичную задачу

Применим соображения размерности к решению аналогичной и да-

же более простой планиметрической задачи:

Через лес, который имеет форму круга, проложили прямую дорогу, средняя линия которой проходит через центр леса. Длина лесного участка дороги равна L . Какова площадь оставшейся части леса?

Сходство с предыдущей задачей очевидно: там шар – здесь круг; там цилиндрический канал – здесь прямоугольник; там центр шара лежит на оси цилиндра – здесь центр круга совпадает с центром прямоугольника (рис.2).

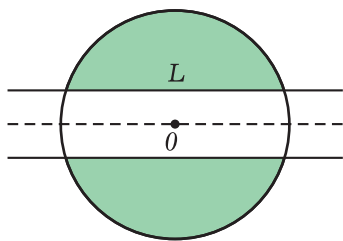


Рис. 2

Ясно, что единственная возможность выразить площадь через линейную величину L – это использовать формулу

$$S = C \cdot L^2, \quad (2)$$

где C – некоторая безразмерная константа. Она находится в результате рассмотрения подходящего частного случая. Здесь целесообразно рассмотреть уменьшающиеся значения ширины дороги. Чем меньше эта ширина, т.е. чем уже дорога, тем ближе длина лесного участка дороги к диаметру круга $2R$. При $L \rightarrow 2R$ площадь оставшейся части леса стремится к площади круга πR^2 , и потому в пределе из (2) получаем равенство

$$\pi R^2 = C \cdot (2R)^2.$$

Отсюда находим $C = \frac{\pi}{4}$ и соответственно получаем ответ на вопрос задачи:

$$S = \frac{\pi}{4} \cdot L^2. \quad (3)$$

Как будто бы, задача решена. Но вот что интересно. Рассмотрим тот случай, когда участок лесной дороги представляет собой квадрат, вписанный в окружность (рис.3).

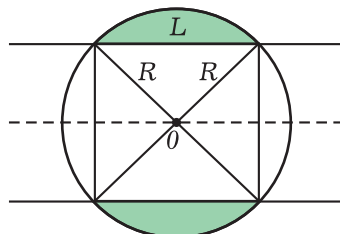


Рис. 3

Если R – радиус круга, L – длина стороны квадрата, то $L = R\sqrt{2}$. Площадь оставшегося леса равна, очевидно, половине разности площади круга и площади квадрата, т.е.

$$\frac{1}{2}(\pi R^2 - L^2) = \frac{1}{2}\left(\pi \cdot \frac{L^2}{2} - L^2\right) = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) \cdot L^2,$$

и это никак не совпадает с (3).

В чем же дело? Почему мы пришли к противоречию?



4. О важности вдумчивого чтения

Попробуем применить соображения размерности в следующей, максимально упрощенной ситуации:

Пусть длины двух противоположных сторон прямоугольника равны a . Найти площадь этого прямоугольника.

Рассуждаем так же, как и в двух предыдущих случаях. Ясно, что единственная возможность выразить площадь через линейную величину a – это использовать формулу

$$S = C \cdot a^2, \quad (4)$$

где C – некоторая безразмерная константа. Эту константу найдём, рассмотрев подходящий частный случай прямоугольника – квадрата. В этом случае равенство (4) имеет вид $a^2 = C \cdot a^2$, и поэтому $C = 1$. Следовательно, площадь нашего прямоугольника равна a^2 .

– Позвольте! – воскликнет наш читатель, – площадь прямоугольника зависит не только от a , но и от длины двух других его сторон!

И в этом суть представленного нами парадокса. Точно так же и в

задаче про лес и проходящую через него дорогу ответ зависит не только от параметра L , но и от радиуса нашего круглого леса R .

А как же с задачей Мартина Гарднера? Разъяснение имеется в статье А. Рыбакова, где эта задача названа удивительной. Особенность этой задачи в том, что ответ действительно зависит лишь от одного параметра L , и мы это показали. В статье читаем: «Мы уверены в полученном нами результате только в той степени, с какой мы верим утверждению автора задачи, что ни от каких других параметров ответ не зависит». А в задаче про лесную дорогу никто не обещал, что ответ зависит только от L ! Потому-то она и *не решается* только лишь на основе соображений размерности.

О многочисленных применениях теории размерности в физике рассказано в недавней статье [2]. Журнал «Квант» находится в открытом доступе в интернете по адресу kvant.mccme.ru.

Литература

1. Рыбаков А. Из записной книжки учителя, Квант, 2014 № 5/6.
2. Брук Ю., Стасенко А. Объять необъятное, или Её преПодобие Размерность. Квант, 2019 № 2.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Идет экзамен. Преподаватель поясняет:

- Вопрос на пять. Чем измеряется напряжение.
- Вопрос на четыре. Чем измеряется напряжение?
А – вольтметром, Б – амперметром, В – омметром.
- Вопрос на три. А не вольтметром ли измеряется напряжение?