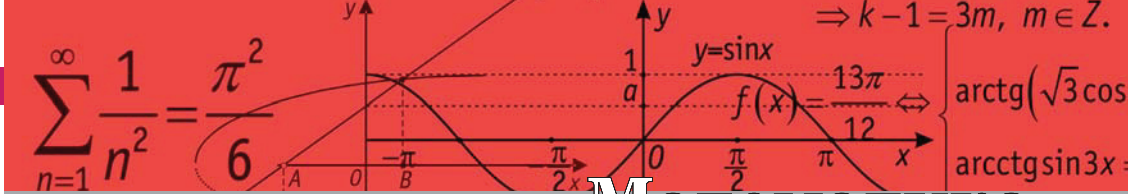


Бардушкин Владимир Валентинович
Доцент, доктор физико-математических наук, профессор кафедры ВМ-2 МИЭТ.

Прокофьев Александр Александрович
Доцент, доктор педагогических наук, заведующий кафедрой ВМ-1 МИЭТ.

Функция $f(x)=ax+\frac{b}{x}$ и использование её свойств при решении задач

В школьном курсе математики есть множество интересных неочевидных методов, способов, подходов и «хитрых» приёмов для решения ряда задач, которыми желательно овладеть учащемуся к моменту окончания средней школы. Эти знания и умения необходимы школьнику, чтобы успешно справляться с заданиями, предлагаемыми на олимпиадах разного уровня и итоговых аттестационных испытаниях. В данной статье авторы поставили перед собой задачу систематизировать сведения об очень интересной и важной в школьном курсе математики функции $f(x)=ax+\frac{b}{x}$, где a, b одного знака. Подобная систематизация включает в себя не только изучение свойств этой функции, но и упорядочение довольно разрозненных сведений об основных типах связанных с ней задач. Авторы надеются, что внимательное прочтение статьи будет полезным как для учащихся, так и для учителей, а разобранные примеры помогут школьникам в успешном преодолении различных аттестационных испытаний.

Вспомним прежде всего неравенство, связывающее между собой среднее арифметическое и среднее геометрическое:

$$p+q\ge 2\sqrt{pq}$$

при $p, q\ge 0$, причём равенство

$$p+q=2\sqrt{pq}$$

возможно лишь при $p=q$.

Действительно, при этих условиях

$$p+q-2\sqrt{pq}=\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)^2\ge 0,$$

а равенство $p+q=2\sqrt{pq}$ возможно тогда и только тогда, когда

$$\sqrt{p}=\sqrt{q}\Leftrightarrow p=q.$$

Отсюда следует важнейшее свойство суммы двух взаимно обратных положительных величин:

$$x+\frac{1}{x}\ge 2 \text{ при } x>0,$$

причём $x+\dfrac{1}{x}=2$ тогда и только тогда, когда $x=1$.

Можно записать и «родственное» неравенство, являющееся обобщением неравенства для суммы двух взаимно обратных положительных величин:

$$ax+\frac{b}{x}\ge 2\sqrt{ab}$$

при $x>0$, a, $b>0$, причём равенство $ax+\dfrac{b}{x}=2\sqrt{ab}$ возможно лишь в тех точках $x_0>0$, для которых $ax_0=\dfrac{b}{x_0}$.

Действительно, полагая $p=ax$, $q=\dfrac{b}{x}$, из классического неравенства получаем:

$$ax+\frac{b}{x}\ge 2\sqrt{(ax)\cdot\left(\frac{b}{x}\right)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ax+\frac{b}{x}\ge 2\sqrt{ab}.$$

При этом $ax+\dfrac{b}{x}=2\sqrt{ab}\Leftrightarrow ax=\dfrac{b}{x}$.

Задачи с использованием свойств суммы двух взаимно обратных положительных величин

I. Решите уравнение:

$$\mathrm{ctg}^2\,6x+\sin^2 6x+1=$$
$$=\sqrt{1+2\cos 4x+4\sin 2x}.$$

Решение. Преобразуем выражения, стоящие в левой и правой частях уравнения:

$$\sin^2 6x+(\mathrm{ctg}^2 6x+1)=$$
$$=\sqrt{1+2(1-2\sin^2 2x)+4\sin 2x}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin^2 6x+\frac{1}{\sin^2 6x}=\sqrt{4-(2\sin 2x-1)^2}.$$

Слева, при $\sin 6x\ne 0$, стоит сумма двух взаимно обратных положительных величин. Поэтому

$$\sin^2 6x+\frac{1}{\sin^2 6x}\ge 2,$$

причём

$$\sin^2 6x+\frac{1}{\sin^2 6x}=2\Leftrightarrow \sin^2 6x=1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{6},\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Выражение, стоящее справа, имеет смысл, если $4-(2\sin 2x-1)^2\ge 0$. Тогда оно удовлетворяет условию:

$$0\le\sqrt{4-(2\sin 2x-1)^2}\le 2,$$

причём

$$\sqrt{4-(2\sin 2x-1)^2}=2\Leftrightarrow \sin 2x=0{,}5\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Следовательно, в исходном уравнении равенство возможно только в случае, когда обе части уравнения равны 2. Поэтому далее задача сводится к отбору общих решений двух серий значений x:

$$x=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\quad n\in\mathbb{Z},\ \text{и}$$
$$x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{6},\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Из уравнения

$$(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{6}$$

получаем, что

$$2k = 6n - 1 + (-1)^n.$$

При чётных значениях n, то есть при $n = 2m$, имеем $k = 6m$; при нечётных значениях n, то есть при $n = 2m + 1$, имеем $k = 6m + 2$. Таким образом, первая серия

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

целиком содержится во второй

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $(-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$

II. Найдите пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению:

$$22 - \sqrt{x+3} - \sqrt{y-5} = \frac{16}{\sqrt{x+3}} + \frac{49}{\sqrt{y-5}}.$$

Решение. Запишем исходное уравнение в виде:

$$\left(\sqrt{x+3} + \frac{16}{\sqrt{x+3}}\right) + \left(\sqrt{y-5} + \frac{49}{\sqrt{y-5}}\right) = 22.$$

Воспользуемся доказанным ранее неравенством для $ax + \frac{b}{x}$.

Тогда $\sqrt{x+3} + \frac{16}{\sqrt{x+3}} \geq 8,$

$$\sqrt{y-5} + \frac{49}{\sqrt{y-5}} \geq 14.$$

Следовательно:

$$\left(\sqrt{x+3} + \frac{16}{\sqrt{x+3}}\right) + \left(\sqrt{y-5} + \frac{49}{\sqrt{y-5}}\right) \geq 22.$$

Поэтому уравнение

$$\left(\sqrt{x+3} + \frac{16}{\sqrt{x+3}}\right) + \left(\sqrt{y-5} + \frac{49}{\sqrt{y-5}}\right) = 22$$

равносильно системе

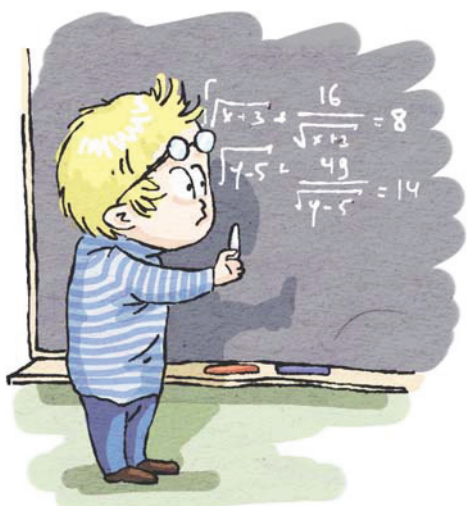
$$\begin{cases} \sqrt{x+3} + \dfrac{16}{\sqrt{x+3}} = 8, \\ \sqrt{y-5} + \dfrac{49}{\sqrt{y-5}} = 14 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = \dfrac{16}{\sqrt{x+3}}, \\ \sqrt{y-5} = \dfrac{49}{\sqrt{y-5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 13, \\ y = 54. \end{cases}$$

Ответ. $(13; 54)$.

Исследование функции $f(x) = ax + \frac{1}{x}$ и построение её графика

В 10 – 11 классах при решении более сложных задач, например, с параметрами, требуется полное исследование и понимание свойств функции $f(x) = ax + \frac{b}{x}$. Для этого школьникам понадобится владение такими понятиями, как предел функции и производная. Проведём, опираясь на указанные понятия, исследование функции $f(x) = x + \frac{1}{x}$ и построим её график. Заметим, что для функции $f(x) = ax + \frac{b}{x}$, $ab > 0$ эти свойства аналогичны. Предлагаем заинтересованному читателю установить их самостоятельно (особенно для случая $a, b < 0$).



Функция $f(x)$ определена при всех действительных x, кроме

$x = 0$, и является непрерывной на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

Функция $f(x)$ является нечётной, так как её область определения симметрична относительно нуля и для каждого x из области определения выполняется равенство:

$$f(-x) = -x + \frac{1}{-x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -f(x).$$

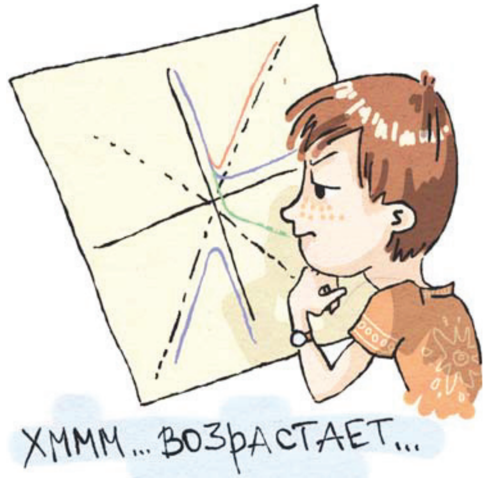
График функции не пересекает координатные оси Ox и Oy, так как уравнение $x + \frac{1}{x} = 0$ не имеет действительных решений и $x = 0$ не входит в область определения.

Видим, что $f(x) \to \infty$ при $x \to 0$. Это значит, что график имеет вертикальную асимптоту $x = 0$, причём

$$f(x) \to +\infty \text{ при } x \to 0,\ x > 0, \text{ а}$$

$$f(x) \to -\infty \text{ при } x \to 0, x < 0.$$

Видно также, что $f(x) \to \infty$ при $x \to \infty$. Это значит, что график может иметь наклонную асимптоту. Действительно, по определению, $y = kx + b$ – наклонная асимптота, если $f(x) - (kx + b) \to 0$, при $x \to \infty$. В нашем случае $f(x) - x = \frac{1}{x} \to 0$ при $x \to \infty$, т. е. прямая $y = x$ является наклонной асимптотой графика $y = x + \frac{1}{x}$. Причём видно, что при $x \to +\infty$ график функции расположен выше асимптоты, т. к. «добавка», равная $\frac{1}{x}$, положительна, а при $x \to -\infty$ график функции расположен ниже асимптоты, т. к. «добавка», равная $\frac{1}{x}$, отрицательна. Так как x и $\frac{1}{x}$ при всех $x > 0$ взаимно обратны, то $y = 2$ – минимальное значение функции на $(0; +\infty)$, а $y = -2$ – максимальное значение на $(-\infty; 0)$. Осталось выяснить, нет ли других экстремумов.



Функция $f(x)$ дифференцируема в каждой точке области определения и

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}.$$

Критические точки функции находим из уравнения $f'(x) = 0$. Уравнение $\frac{x^2 - 1}{x^2} = 0$ имеет два корня: $x = -1$ и $x = 1$.

Точки -1, 0, 1 разбивают числовую прямую на четыре промежутка: $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$ $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$. Неравенство $f'(x) > 0$, то есть $\frac{x^2 - 1}{x^2} > 0$, выполняется при $x < -1$ и при $x > 1$, а неравенство $f'(x) < 0$ – при $-1 < x < 0$ и при $0 < x < 1$.

Следовательно, функция $f(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$, убывает на промежутках $[-1; 0)$ и $(0; 1]$, в точках $x = -1$ и $x = 1$ она имеет экстремумы.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
Знак $f'(x)$	+	0	–		–	0	+
$f(x)$	↗	–2	↘	не определена	↘	2	↗
		max				min	

Пользуясь нечётностью функции, построим весь график (рис. 1). (Желающие могут воспользоваться и второй производной: $f''(x) = \frac{2}{x^3}$. На $(-\infty; 0)$ график функции имеет выпуклость вверх, т. к. $f''(x) < 0$; на $(0; +\infty)$ график функции имеет выпуклость вниз, т. к. $f''(x) > 0$).

Замечание. Проведённое исследование функции $f(x) = x + \frac{1}{x}$ и построение её графика позволяют легко решить следующую задачу: «*Исследуйте при всевозможных значениях параметра вопрос о количестве корней уравнения* $x + \frac{1}{x} = a$». Ответ здесь, очевидно, выглядит следующим образом: «Нет корней при $a \in (-2; 2)$; один корень при $a = \pm 2$; два корня при $a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$».

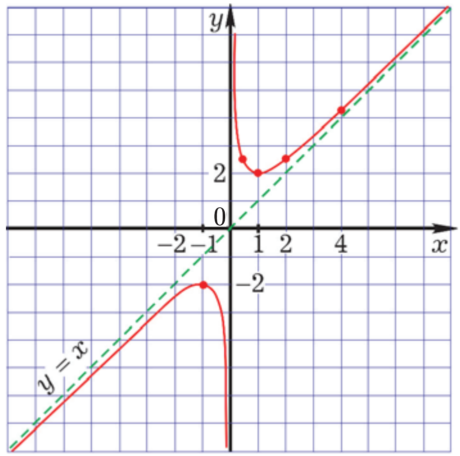


Рис. 1

Задачи с использованием свойств функции $f(x) = ax + \frac{1}{x}$

Рассмотрим теперь ряд задач, в которых используются основные свойства функции $f(x) = ax + \frac{b}{x}$, $ab > 0$.

I. При каждом значении параметра a найдите количество решений уравнения:

$$16x^4 - 32x^3 + ax^2 - 8x + 1 = 0.$$

Решение. Так как $x = 0$ не является корнем исходного уравнения, то, поделив на x^2, приведём уравнение к виду:

$$16x^2 - 32x - \frac{8}{x} + \frac{1}{x^2} = -a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 + \frac{1}{x^2} + 8 - 32x - \frac{8}{x} = 8 - a.$$

Выделяя полный квадрат, получим:

$$4\left(2x + \frac{1}{2x}\right)^2 - 16\left(2x + \frac{1}{2x}\right) + 16 = 24 - a,$$

$$\left(2x + \frac{1}{2x} - 2\right)^2 = \frac{24 - a}{4},$$

$$2x + \frac{1}{2x} = 2 \pm \sqrt{\frac{24 - a}{4}}.$$

Теперь решаем задачу, приведённую в замечании, где в роли «a» выступают числа $2 \pm \sqrt{\frac{24 - a}{4}}$.

Уравнение не имеет решений, если $a > 24$. Эскиз графика функции

$y = 2x + \dfrac{1}{2x}$ имеет тот же вид, что и на рис. 1, с той лишь разницей, что экстремумы будут в точках, где $2x = \dfrac{1}{2x} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{2}$. А тогда очевидно, что уравнение $2x + \dfrac{1}{2x} = 2 + \sqrt{\dfrac{24-a}{4}}$ имеет один корень при $a = 24$ и два корня при $24 - a > 0$. Уравнение $2x + \dfrac{1}{2x} = 2 - \sqrt{\dfrac{24-a}{4}}$ имеет один корень при $2 - \sqrt{\dfrac{24-a}{4}} = -2 \Leftrightarrow a = -40$, и два корня при

$$2 - \sqrt{\frac{24-a}{4}} < -2 \Leftrightarrow a < -40.$$

Ответ. Нет решений при $a > 24$; одно решение при $a = 24$; три решения при $a = -40$; два решения при $-40 < a < 24$; четыре решения при $a < -40$.

II. Найдите наименьшее значение функции:

$$f(x) = \frac{x^4 - 2x^3 + 11x^2 - 10x + 26}{x^2 - x + 5}.$$

Решение. Приведём функцию к виду $f(x) = x^2 - x + 5 + \dfrac{1}{x^2 - x + 5}$, разделив числитель на знаменатель «уголком». Любопытно, что здесь тоже стоят суммы двух положительных взаимно обратных величин, поэтому $f(x) = x^2 - x + 5 + \dfrac{1}{x^2 - x + 5} \geq 2$.

Но значение $f(x) = 2$ не достигается, т. к. уравнение $x^2 - x + 5 = \dfrac{1}{x^2 - x + 5}$ не имеет решений – значит, наименьшее значение функции больше 2. Найдём его. Сделаем замену $t = x^2 - x + 5$, где $t = x^2 - x + 5 = (x - 0,5)^2 + 4,75 \geq 4,75$ при всех значениях x. Рассмотрим функцию $y(t) = t + \dfrac{1}{t}$ на промежутке $[4,75; +\infty)$. При $t \geq 1$ функция $y(t) = t + \dfrac{1}{t}$ является возрастающей. Следовательно, на промежутке $[4,75; +\infty)$ наименьшее значение функции $y(t)$ достигается при $t = 4,75$ и равно $\dfrac{377}{76}$.

Корнем уравнения $x^2 - x + 5 = 4,75$ является число $x = 0,5$. Это означает, что функция

$$f(x) = \frac{x^4 - 2x^3 + 11x^2 - 10x + 26}{x^2 - x + 5}$$

принимает наименьшее значение, равное $\dfrac{377}{76}$, при значении аргумента x, равном $0,5$.

Ответ. $f_{\text{наим}} = f(0,5) = \dfrac{377}{76}$.

III. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 3xy + 3ax - ay - a^2 - 3 = 0, \\ 9x^2 + 9y^2 - 6ax + 18ay + 7a^2 - 2a - 17 = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение. В первом уравнении системы получим, группируя члены:

$$(3xy - ay) + (3ax - a^2) = 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (y + a)(3x - a) = 3.$$

Так как $3x - a \neq 0$ (в противном случае уравнение будет иметь вид $(y + a)\cdot 0 = 3$, что неверно), то, поделив обе части уравнения на $3x - a$, получим:

$$y + a = \frac{3}{3x - a}.$$

Связь между x и y взаимно однозначная.

Во втором уравнении системы, группируя члены и выделяя полные квадраты, получим:

$$(3x - a)^2 + 9(y + a)^2 = 3a^2 + 2a + 17.$$

Заменяя в последнем уравнении $y + a$ на $\frac{3}{3x - a}$, получим:

$$(3x - a)^2 + 9\left(\frac{3}{3x - a}\right)^2 = 3a^2 + 2a + 17,$$

или, после деления обеих частей уравнения на 9:

$$\left(\frac{3x - a}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{3x - a}\right)^2 = \frac{3a^2 + 2a + 17}{9}.$$

Обозначим $t = \left(\frac{3x - a}{3}\right)^2$, где $t > 0$.

Тогда уравнение примет вид:

$$t + \frac{1}{t} = \frac{3a^2 + 2a + 17}{9}.$$

Это уравнение, как следует из свойств функции $y = t + \frac{1}{t}$, может иметь одно или два различных положительных решения. Если оно имеет два положительных решения, то получим четыре решения для x, а значит, и для y. Поэтому для существования двух решений необходимо и достаточно, чтобы решение для t было единственным. Это возможно, если $t = 1$, а

$$\frac{3a^2 + 2a + 17}{9} = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1, \\ a = \frac{1}{3}. \end{array}\right.$$

При $a = -1$ и $a = \frac{1}{3}$, выполняя обратную замену, из уравнения

$$\left(\frac{3x - a}{3}\right)^2 = 1$$

получаем два различных решения:

$$x_1 = \frac{a}{3} + 1,\ \ y_1 = -a + 1;$$
$$x_2 = \frac{a}{3} - 1,\ \ y_2 = -a - 1.$$

Ответ. -1 и $\frac{1}{3}$.

Задачи для самостоятельного решения

I. Найти наибольшее значение функции:

$$f(x) = \frac{4x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x + 2}{x - 2x^2 - 1}.$$

Ответ. -2.

II. Решить уравнение:

$$\operatorname{tg}^2 9x + \cos^2 9x + 1 =$$
$$= \sqrt{1 - 2\cos 2x + 4\cos x}.$$

Ответ. $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}.$

III. Решить уравнение:

$$x\sqrt{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}=-x^2+2x+1.$$

Ответ. 1.

IV. Решить уравнение:

$$3^{x^2+\frac{81}{x^2}-17}=-6-6x-x^2.$$

Ответ. -3.

V. Решить уравнение:

$$\log_4(6-x)+\log_4(x-2)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(|x-5|+\frac{1}{|x-5|}\right).$$

Ответ. 4.

VI. При каких значениях параметра p уравнение

$$4^x+2^{x+2}+7=p-4^{-x}-2\cdot 2^{1-x}$$

имеет решение?

Ответ. $p\geq 17$.

VII. Найти все значения параметра a, при которых имеет единственное решение система уравнений:

$$\begin{cases}(5-2\sqrt{6})^x+(5+2\sqrt{6})^x-5a=y-|y|-8,\\ x^2-(a-4)y=0.\end{cases}$$

Ответ. $a=2,\ \ a=4$.

Калейдоскоп Калейдоскоп Калейдоскоп

Первая лауэграмма

Создатель первой советской научной школы физиков Абрам Фёдорович Иоффе любил вспоминать о времени своей работы (начало XX века) в Мюнхене у В.К. Рентгена. Тогда у мюнхенских студентов была традиция: ежедневно собираться в кафе и обсуждать научные вопросы. Однажды одному из них – Максу Лауэ – пришла идея использовать в качестве дифракционной решётки кристалл. Отнеслись к ней скептически, возник спор, закончившийся заключенным пари и решением проверить идею экспериментально.

Опыты долго не давали результатов. Но в какой-то раз фотографическую пластинку повернули параллельно поверхности кристалла, проявили… и ахнули: на пластинке была видна чёткая дифракционная картина! Так появилась первая лауэграмма – зафиксированное на фотопластинке (фотоплёнке) распределение рассеяного кристаллом рентгеновского излучения. (Теперь получение лауэграмм – распространённый метод изучения структуры кристаллов.)