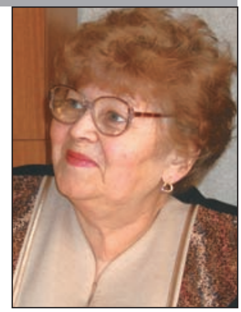
Колесникова Софья Ильинична
Старший преподаватель кафедры высшей математики Московского физико-технического института (МФТИ), специалист Федеральной заочной физико-технической школы (ФЗФТШ) при МФТИ. Окончила Московский государственный университет (МГУ), имеет большой опыт работы со старшеклассниками, автор пособий «Интенсивный курс подготовки ЕГЭ», «Решение сложных задач ЕГЭ».



Производная. Предфрактал. Фрактал.

«Трудно поверить, какую огромную экономию мысли может осуществить одно хорошо подобранное слово, и это слово становится творцом».

Анри Пуанкаре

Введение

«Сегодня в разряд общеобразовательных уверенно можно отнести такие понятия, как *бифуркация, фрактал, хаос*... С этими понятиями работают и физики, и социологи, и философы. И школьный курс математики обязан знакомить молодёжь с этими понятиями хотя бы в описательно-наглядном виде. Познакомить учащихся с фракталами стоит ещё и для того, чтобы продемонстрировать им непредсказуемые особенности диалектики развития науки. А понимание процесса научного познания мира – одна их важнейших характеристик образованного и культурного человека.

А какое эстетическое удовольствие может получить от решения квадратных уравнений тот, кто к математике «глух»?.. Фракталы же непосредственно, компьютерной реализацией формул, порождают действительно красочные, оригинальные полотна, не уступающие абстрактной живописи», – Н. Розов («Математика», №8, 2005, доклад «Проблема размещения новых понятий и объектов в школьном курсе математики» (в общеобразовательной школе и специализированных школах не физико-математического профиля) на «Марафоне-2005»).

Видимо, статья заинтересовала некоторых учителей и их учеников. Нас статья тоже заинтересовала, захотелось познакомить учащихся с этими «объектами» подробнее, а также постараться понять, действительно ли эти новые понятия как-то помогут полюбить математику тем, кто к ней «глух». Но осуществить это желание оказалось совсем не просто. Впечатления математиков, физиков и информатиков от этих очень «модных» ныне фракталов и представление о них как о математическом «объекте» оказались различными. Поэтому в этом номере мы помещаем несколько статей на эту тему.

В настоящей статье мы хотим очень кратко и «поверхностно» познакомить читателей с «новым» объектом математики – фракталом. Продвинуться дальше вместе со школьниками, на взгляд автора, невозможно: нужны специальные знания, существенно выходящие за рамки школьной программы. Познакомить школьников с красивыми картинками, конечно, можно, но вот вопрос: поймут ли они, при чём здесь математика?

Нигде не дифференцируемые функции. Кривая Коха

Часто, для наглядности, говорят, что под непрерывной функцией (кривой) можно понимать ту, график которой можно нарисовать, не отрывая руки от бумаги. Так ли это? Нет, не так! Если мы нарисуем такую кривую, то функция действительно будет непрерывна. Но дело в том, что мы рисуем не просто непрерывную, а кусочно дифференцируемую, или кусочно гладкую кривую! Функция называется дифференцируемой на промежутке $(a;b)$, если она имеет производную в любой точке $(a;b)$. Функция $f(x)$ называется *кусочно гладкой* на $(a;b)$, если функция непрерывна и её производная $f'(x)$ кусочно непрерывна на $(a;b)$. Кроме того, мы рисуем кривую, имеющую конечную длину (для измерения длины можно наложить на нашу кривую нитку, а затем измерить её длину). Важнейшее свойство непрерывной и кусочно гладкой функции $f(x)$ состоит в том, что график такой функции в окрестности точки, в которой производная существует, с некоторой степенью точности можно приблизить (заменить) прямой – касательной, а всю кривую, описываемую уравнением $y = f(x)$, можно приблизить ломаной, состоящей из отрезков касательной, или ломаной, вписанной в неё. Такая кривая имеет длину. Кривая, имеющая конечную длину, называется *спрямляемой*.

В школе, за редким исключением, изучаются функции, которые непрерывно дифференцируемы в области определения – такие функции называются *гладкими*.

И в прошлом математики концентрировали своё внимание на множествах и функциях, для которых могут быть применены методы классических вычислений. Однако, как выяснилось, есть непрерывные функции, график которых нарисовать невозможно. Функции, которые не были достаточно гладкими, игнорировались, считались «ущербными», или патологическими. Знаменитый немецкий математик Карл Теодор Вильгельм Вейерштасс (1815 – 1897) впервые аналитически построил такие «ущербные» функции – непрерывные, но нигде не дифференцируемые (они записываются в виде суммы некоторого тригонометрического ряда) – лишь для того, чтобы показать своим скептически настроенным коллегам (в том числе ужаснувшемуся Эрмиту), что такие функции действительно существуют.

Изучая работы Карла Вейерштрасса и Георга Кантора, шведский математик Хельге фон Кох (Helge von Koch, 1870 – 1924), натолкнулся на описание кривых с необычным поведением. И вот в 1904 году он построил «ущербную» функцию геометрически: он описал кривую, которая сейчас известна как кривая Коха. Сначала научимся строить ломаную Коха: берём единичный отрезок, разделяем его на три равные части и заменяем средний интервал равносторонним треугольником без этого сегмента. В результате образуется ломаная, состоящая из четырёх звеньев длины 1/3. На следующем шаге повторяем операцию для каждого из четырёх получившихся звеньев и т. д. (см. рис. 3 на стр. 6 этого номера). При этом вершины каждой ломаной остаются вершинами следующей – поэтому каждая ломаная вписывается в предыдущую.

Эта ломаная нигде себя не пересекает, так как достраиваемые треугольники каждый раз достаточно малы и никогда не «сталкиваются» друг с другом. Предельная кривая, в которую *вписаны* все ломаные, называется *кривой Коха.*

Чем же примечательна кривая Коха?

Начальный отрезок имеет длину 1, на втором шаге длина ломаной равна $\frac{1}{3}\cdot 4$, на третьем – $\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot 4^2$, ..., на n – ом: $\left(\frac{1}{3}\right)^n\cdot 4^n=\left(\frac{4}{3}\right)^n$. Отсюда следует, что длина вписанной ломаной неограниченно возрастает – длина кривой Коха, с точки зрения классического математического анализа, не существует, т. к. равна «бесконечности». Отсюда следует, что кривая Коха не спрямляема.

Кроме того, кривая Коха примечательна тем, что всюду непрерывна, но нигде не имеет касательной, т. е. нигде не дифференцируема (доказать это не просто даже математику!). Поэтому кривую Коха нарисовать невозможно.

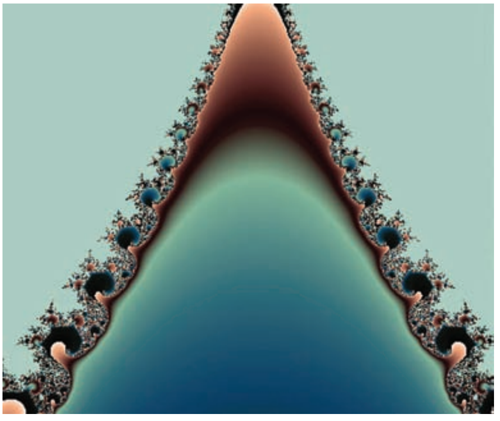


Рис. 1

Кривая Коха имеет бесконечную длину и состоит из четырёх равных частей, каждая из которых подобна всей кривой с коэффициентом подобия 1/3. Отсюда следует, что каждая часть кривой имеет бесконечную длину.

Шарль Эрмит даже окрестил такого типа кривые и функции монстрами, а общее мнение математиков того времени признало их как «патологические», представляющее интерес только для исследователей, злоупотребляющих математическими причудами, а не для настоящих учёных. Однако другие математики увидели в них новый свет. Например, Больцман в 1898 году писал, что не дифференцируемые функции могли быть изобретены физиками, т. к. в статистической механике имеются проблемы, для решения которых «не дифференцируемые функции абсолютно необходимы». Жан Перрен пошёл ещё дальше: в 1906 году он, предвосхищая отношение к такого рода математическим монстрам, заявил, что «кривые, не имеющие касательных, являются общим правилом, а гладкие кривые – интересным, но весьма частным случаем».

Размерность множества

Представим себе ещё раз кривую Коха: при достаточно большом количестве «шагов» построения она будет «толстенькой» – не поймёшь, то ли это линия, то ли это «очень узкая лента». В обычном понимании размерности линия одномерна, а лента – двумерна. А кривая Коха? А размерность кривой Коха совсем необычна – она дробная.

В статье Н.А. Кириченко «Фракталы» приведён пример самого первого классического множества, имеющего дробную размерность. Один из основателей теории множеств Георг Кантор (1845 – 1918) в 1883 г. придумал это замечательное и «странное» множество, которое позже назвали канторовым множеством, или пылью Кантора. Существование пыли Кантора отмечалось до этого Генри Смитом в 1875 г. или ещё раньше. Пыль Кантора занимает промежуток длины 0, а состоит из множества точек мощности континуум. Какова размерность этого множества? Оказывается, тоже дробная.

Существует несколько принципиально разных определений размерности геометрического объекта: топологическая размерность, которая чаще всего обозначается символом d_T, размерность Хаусдорфа-Безиковича, которая чаще всего обозначается символом d_H, размерность Минковского и т. д. Самая привычная для нас – топологическая размерность. Она приписывает счётному множеству размерность 0, кривым – размерность $d_T=1$, поверхностям – $d_T=2$ и т. д. Ещё в 1919 г. Феликс Хаусдорф каждому множеству в евклидовом пространстве сопоставил неотрицательное число, названное им метрической размерностью множества. Её можно определить так. Рассмотрим некоторое множество, точки которого погружены в пространство некоторой размерности d_T. Будем покрывать это множество d_T - мерными кубами, плотно упаковывая их. Кубов надо взять столько, чтобы покрыть ими всё рассматриваемое множество. Обозначим через r сторону куба, а число кубов, в которые попадает хотя бы одна точка множества, через $N(r)$. Тогда хаусдорфова размерность множества равна

$$d_H=\lim_{r\to 0}\frac{\ln N(r)}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)}.$$

Рис. 2

Это число, например, для обычной линии равно 1, для круга равно 2 и т. д. Но для некоторых множеств это число может оказаться дробным. Хаусдорф первый привёл примеры множеств с дробной размерностью: канторово множество, кривая Коха и др.

Вернёмся опять к ломаной Коха. Длина каждого отрезка на n-ом шаге равна $\frac{1}{3^n}$, а отрезков такой длины получается 4^n – и мы получаем удивительный результат: отношение

$$\frac{\ln N(r)}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)}=\frac{\ln 4^n}{\ln(3)^n}=\frac{n\ln 4}{n\ln 3}=\frac{\ln 4}{\ln 3}$$

является одним и тем же числом для любого n! И каждый школьник понимает теперь, что размерность Хаусдорфа для кривой Коха равна

$$d_H=\lim_{r\to 0}\frac{\ln 4}{\ln 3}=\frac{\ln 4}{\ln 3}\ !$$

Очевидно, что $1<\frac{\ln 4}{\ln 3}<2$. Это как бы говорит о том, что кривая Коха – и не линия, и не лента, а необычное, странное множество.

Что же такое фрактал? Конструктивный фрактал

В последние годы отношение к негладким функциям и необычным множествам изменилось, ибо теперь многие считают, что нерегулярные функции (множества) обеспечивают значительно лучшее представление многих природных явлений, чем те, которые дают объекты классической геометрии. В этом немалую роль сыграли усилия франко-американского математика Бенуа

Мандельброта, который в 1975 году впервые ввёл в употребление термин *фрактал*, и которого многие называют пионером в области фрактальной геометрии.

Со словом фрактал связаны прежде всего очень яркие картинки, замечательные фигуры с запоминающимися названиями: снежинка Коха, ковёр Серпинского, дерево Пифагора, пыль Кантора и т. д.

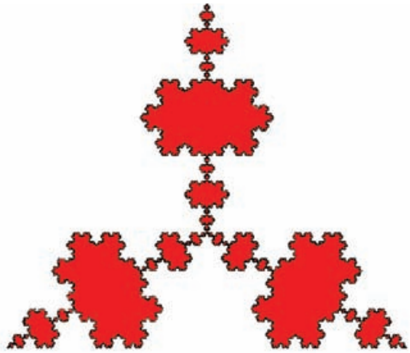


Рис. 3. Острова Коха

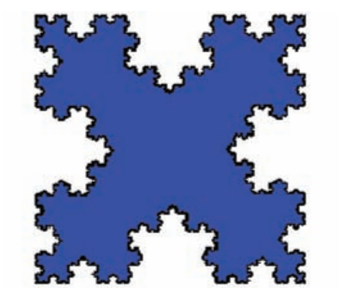


Рис. 4. Крест Коха

Но, как выяснилось, все эти картинки – вовсе не фракталы. Всё это наиболее простые геометрические, так называемые конструктивные *предфракталы* – очень красивые фигуры, которые алгоритмично можно построить на компьютере. Однако в литературе все предфракталы называются *фракталами*. Фракталы невозможно нарисовать ни рукой, ни на компьютере. Более сложные, так называемые динамические предфракталы тоже получают на компьютере, но это совсем не просто – рисунки 1, 2, 6.

Математически *фракталы* – это объекты, для которых такие характеристики, как, например, линия, её размерность, длина необычны. Длины, площади и объёмы одних фракталов равны нулю, других – обращаются в бесконечность.

Мандельброт отыскал нишу для имевших дурную репутацию и множеств Кантора, и кривых Пеано, и функций Вейерштрасса, и кривых Коха, и их многочисленных разновидностей. Основные математические идеи оформились задолго до него. Он лишь объединил эти идеи и положил начало систематическому изучению фракталов и их приложений. Ещё Пуанкаре писал, что «математика – это искусство давать одно и то же название различным вещам», «факт … приобретает своё значение лишь с того дня, когда более проницательный мыслитель подметит сходство, которое он извлекает на свет и символически обозначает тем или иным Термином» (все фразы из «Науки и метода», глава «Будущее математики», Анри Пуанкаре (1854-1912)). Математику бывает трудно согласиться с тем, что введение нового термина, не сопровождающегося открытием новых фактов, является значительным достижением. Этот метод известен, впрочем, давно, и Пуанкаре употреблял его вполне сознательно. Очень любопытно и интересно, что почти одновременно такими «творцами» оказались, по крайней мере, три слова: в 1961 г. появился хорошо известный нынче «аттрактор» Лоренца, в 1972 г. появилась «теория катастроф» Тома, а в 1975 г. «фракталы» Мандельброта! Успех развития в настоящее время этих разделов науки показывает плодотворность словотворчества как метода научной работы.

Итак, фракталы стали «модным» объектом математики.

Что же такое фрактал?

В настоящее время нет однозначного определения «фракталов». Следуя Лаверье, фрактал – это геометрическая фигура, в которой один и тот же фрагмент повторяется при каждом уменьшении масштаба. Фракталы, обладающие этим свойством и получающиеся в результате простой рекурсивной процедуры, называют *конструктивными* фракталами. Конструктивный фрактал (иногда его называют самоподобным, или «автомодельным») – это множество, получающееся в результате линейных сжимающих отображений подобия. Результирующее сжимающее отображение обладает устойчивой неподвижной «точкой» – фракталом. Здесь фрактал (от латинского «fractus») означает изломанный. Пример – кривые Коха. Обратите внимание: фрактал – это устойчивая неподвижная «точка» отображения, а такое понятие в школе не изучается (да и во многих вузах тоже). Поэтому для очень многих конструктивных фракталов остаётся, практически называется, результат лишь нескольких (кто сколько отображений сможет сделать на своём компьютере) сжимающих отображений подобия. На самом деле это – предфрактал. Это наиболее известные «картинки». Поэтому в дальнейшем, говоря об использовании фракталов в приложениях, придётся иметь в виду именно эти «фракталы». Для классических самоподобных фракталов при вычислении размерности Хаусдорфа всегда получается, что

$$\frac{\ln N(r)}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)}=\text{const},$$

а тогда размерность Минковского совпадает с размерностью Хаусдорфа, что бывает не для всяких множеств (например, размерность Хаусдорфа счётного множества точек равна 0, а размерность Минковского этого же множества равна 1/2).

Наряду с конструктивными фракталами были обнаружены множества, похожие на фракталы. Как правило, подобные множества возникают в нелинейных динамических системах и, в первую очередь, в дискретных динамических системах. Их построение не так просто, как в случае конструктивных фракталов, и они могут обладать масштабной инвариантностью лишь приближённо (рисунки 1, 2, 6). Подобные множества называют *динамическими фракталами*. Одним из первых описал динамические фракталы в 1918 году французский математик Гастон Жюлиа в своём объёмном труде. Но в нём не было каких-либо изображений. Компьютеры сделали видимым то, чего не могло быть во времена Жюлиа. Визуальные компьютерные результаты превзошли все ожидания.

В связи с этим Мандельброт ввёл другое определение фракталов. Фрактал – это такое множество, которое имеет хаусдорфову, или фрактальную, размерность, бо́льшую топологической. В этом определении слово «фрактал» связано с английским «fractional» – дробный. Со временем, однако, выяснилось обстоятельство почти криминального характера: размерность Хаусдорфа-Безиковича некоторых фракталов оказалась целой.

Классическая и фрактальная геометрия

Кривая Коха и всевозможные её обобщения, помимо того, что они нигде не имеют касательной, обладают интересным свойством: их часто можно разбить на сколь угодно малые части так, что каждая часть окажется уменьшенной копией целого. Иначе говоря, если посмотреть на этот кусочек в микроскоп, то с удивлением увидим то же самое, что и без микроскопа. Это свойство самоподобия резко отличает такие кривые от объектов классической геометрии. Ведь если взглянуть в микроскоп на окрестность точки дифференцируемой функции, то увидим прямую линию – касательную, т. е. классические объекты в малом «линейны», в то время как новым кривым присуща «внутренняя бесконечность». «Фрактальная геометрия природы» Б. Мандельброта открывается следующими словами: «Почему геометрию часто называют «холодной» и «сухой»? Одна из причин заключается в её неспособности описать форму облака, горы, береговой линии или дерева. Облака – не сферы, горы – не конусы, береговые линии – не окружности, древесная кора не гладкая, молния распространяется не по прямой. В более общем плане я утверждаю, что многие объекты в природе настолько иррегулярны и фрагментированы, что по сравнению с Евклидом (термин, который в этой работе означает всю стандартную геометрию) природа обладает не просто большей сложностью, а сложностью совершенно иного уровня. Число различных масштабов длины природных объектов для всех практических целей бесконечно».

Фрактал – это удивительное понятие математики, которое многие считают средством адекватного отображения некоторых природных явлений и описания объектов (включая человеческий организм). Это трактовка фракталов как «самоподобных» фигур. Три копии кривой Коха, расположенные на сторонах правильного треугольника, образуют замкнутую кривую, называемую *снежинкой Коха*. Для построения снежинки Коха выполним следующие операции (рис. 5). Рассмотрим в качестве нулевой итерации равносторонний треугольник. Затем каждую из сторон этого треугольника разделим на три равные части, уберём среднюю часть и в середине достроим равносторонний треугольник так, как изображено на рис. 5. На следующем шаге такой же процедуре деления на три равные части и достраивания равностороннего треугольника подвергается каждая из сторон новой фигуры, и так до бесконечности. В результате возникает симметричная, похожая на снежинку, очень сильно изломанная кривая, которая представляет собой самоподобное множество, называемое снежинкой Коха.

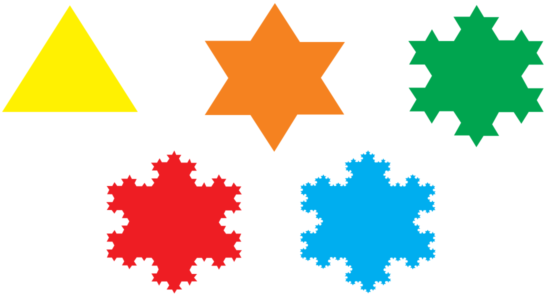


Рис. 5. Построение снежинки Коха

Итальянский математик Э. Чезаро, удивлённый внутренней бесконечностью и самоподобием снежинки Коха, писал в 1905 году: «Если бы она была одарена жизнью, то можно было бы лишить её жизни, только уничтожив кривую в целом. В противном случае она бы возрождалась снова и снова из глубины своих треугольников, как это делает жизнь во Вселенной».

Конечно, нет ни одной реальной структуры, которую можно было бы последовательно увеличивать бесконечное число раз и которая выглядела бы при этом неизменной. Тем не менее принцип самоподобия в приближённом виде имеется в природе. Вглядитесь в границы облаков, в линии берегов морей и рек, в очертания облаков и деревьев, в прохождение пузырьков воздуха через нефть, в зимние узоры на окнах, изображения структуры некоторых веществ, полученные с помощью электронного микроскопа, в строение кровеносной системы сердечной мышцы, в турбулентные потоки жидкости и т. д. Процессы, порождающие такие структуры, довольно давно изучаются в математике и физике. Это обычные процессы с обратной связью, в которых одна и та же операция выполняется снова и снова, когда результат одной итерации является начальным значением для следующей. Единственное, что при этом требуется – нелинейная зависимость между результатом и начальным значением, т.е. *динамический закон* $x_{n+1} = f(x_n)$ должен быть более сложным, чем простая пропорциональность $x_{n+1} = kx_n$. Некоторые авторы пишут, что снежинка Коха или триада Коха являются математической моделью кривой побережья, с которой работал Ричардсон. Бросающаяся в глаза «правильность» зубчиков и красота самоподобия снежинки Коха едва ли присуща контуру британского побережья, а потому считать её моделью можно с большой натяжкой – а вот общий характер «изрезанности» действительно её напоминает. Бенуа Мандельброт создал геометрию негладких, шероховатых, зазубренных, изъеденных ходами и отверстиями, шершавых и т.п. объектов, своего рода математических парий, по молчаливому уговору изгонявшихся из рассмотрения в пользу более благообразных усреднённых, сглаженных, отполированных, спрямлённых объектов. Между тем именно «неправильные» объекты составляют подавляющее большинство объектов в природе. Сам Б. Мандельброт охарактеризовал созданную им теорию как морфологию бесформенного.

Информатика и фракталы

Столь популярные ныне фрактальные объекты (предфракталы) – порождение компьютерного мира, и их сфера применения ещё не до конца изучена. Они находят применение в компьютерном дизайне, в алгоритмах *сжатия* информации. Компьютеры – это новое средство познания, которое позволяет увидеть связи и значения, до сих пор скрытые от нас. Главным образом это относится к компьютерной графике, переживающей сегодня период интенсивного развития и обогатившей наши возможности до такой степени, которая редко достигалась другими средствами науки. Она, несомненно, может подарить нам фантастические миры, окружить нас искусственными пейзажами и заставить забыть действительность. Но если использовать её не бездумно, то она может нам помочь приподнять покров над тайнами природы. Говорят, что горные ландшафты в фильме «Звёздное пересечение II: гнев хана» сконструированы с помощью фракталов. С помощью существующих компьютерных программ каждый может нарисовать структурные предфракталы, а некоторые могут придумать свои фракталы и нарисовать соответствующие предфракталы. Если просто последовательные итерации рисовать разными цветами, у каждого получится собственная картина. А если поработать с программами, наверное, получится ещё интересней.

Заключение

В заключение перечислим основные свойства фрактальных множеств F, характерные как для конструктивных, так и для динамических фракталов:

1. фрактальное множество F имеет тонкую структуру, т. е. содержит произвольно малые масштабы;
2. F слишком нерегулярно, чтобы быть описано на традиционном геометрическом языке;
3. F имеет некоторую форму самоподобия, допуская приближённую или статистическую;
4. обычно фрактальная размерность больше топологической;
5. в большинстве интересных случаев F определяется очень просто, например, рекурсивно.

Вывод

Фракталы – это сложные математические объекты, для которых такие характеристики, как, например, линия, её размерность, длина необычны и не просты даже для профессиональных математиков. Предфракталы получили широкую популярность, т.к. графичекие изображения некоторых из них очень эффектны, некоторые напоминают объекты реального мира, с помощью других можно качественно оценить «размерность» изучаемого множества, которая некоторым образом позволяет различать, например, степень сложности и запутанности траекторий. Красота фракталов двояка: она услаждает глаз (и слух), о чём свидетельствует хотя бы обошедшая весь мир выставка фрактальных изображений, организованная группой бре-

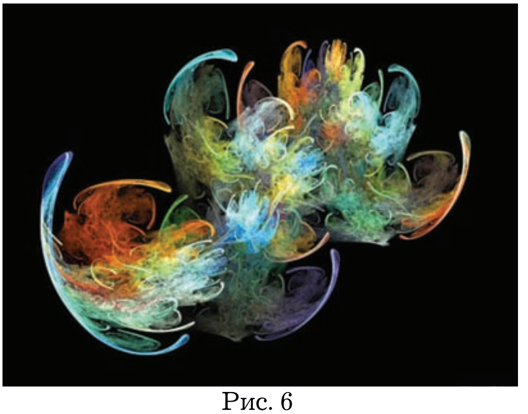


Рис. 6

менских математиков под руководством Пайтгена и Рихтера. Позднее экспонаты этой грандиозной выставки были запечатлены в иллюстрациях к книге тех же авторов «Красота фракталов» (рисунки 1, 2, 6 взяты из этой книги). Но существует и другой, более абстрактный или возвышенный аспект красоты фракталов, открытый, по словам Р. Фейнмана, только умственному взору теоретика, в этом смысле фракталы прекрасны красотой трудной математической задачи.

Литература

1. Р. М. Кроновер. Фракталы и хаос в динамических системах. Москва. Посмаркет, 2000.
2. А.Д. Морозов. Введение в теорию фракталов. М., Ижевск, 2004.
3. Х.О. Пайтген, П.Х. Рихтер. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. – М.: Мир, 1993.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

- Профессор:
  - Какие будут вопросы по только что прочитанному материалу?
  Из зала:
  - Скажите, в каких учебниках это хорошо и толково написано?
- Эллипс нужно рисовать, взяв треугольную ниточку.
- Вот на экране вы видите, что расстояние между полосами уменьшилось в 2 раза.
- Четырёхмерное пространство вообразить довольно просто. Для этого достаточно представить четыре ортонормированных вектора. Остальное приложится.
- Итак, прошу вас освободить кору головного мозга для следующей теоремы.
- Легко убедиться, что это функция бесконечно дифференцируема. Сейчас мы продифференцируем один раз, а дома вы закончите...