



Смольянова Елена Григорьевна

*Доцент кафедры математического анализа
ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет
им. Н. П. Огарева», г. Саранск,
Республика Мордовия*



Нечипорук Никита Алексеевич

*Ученик 8-го класса МОУ «Лицей №4», г. Саранск,
Республика Мордовия*

Формула с «секретом», или Как придумать математический фокус

Математический фокус – традиционная часть программы любого школьного математического праздника или конкурса. В статье предлагается математическое обоснование одного математического эксперимента с последующим его описанием.

Пусть a , C , A – действительные числа такие, что $a \neq C$, $C \neq 0$ и

$$A = \frac{2 \cdot a \cdot C - C^2}{2 \cdot (a - C)}. \quad (1)$$

Тогда

$$2 \cdot a \cdot C - C^2 = 2 \cdot a \cdot A - 2 \cdot A \cdot C$$

и, следовательно,

$$\frac{2 \cdot A \cdot C - C^2}{2 \cdot (A - C)} = a. \quad (1')$$

Таким образом, равенства (1) и (1') верны одновременно, причём, что любопытно, одно из другого получается заменой a на A и A на a . Продол-

жим исследование. Пусть a, b, A и C – действительные числа такие, что $a+b \neq C$ и

$$A = \frac{2 \cdot (a+b) \cdot C - 2 \cdot a \cdot b - C^2}{2 \cdot (a+b-C)} . \quad (2)$$

Тогда

$$\begin{aligned} & 2 \cdot (a+b) \cdot C - 2 \cdot a \cdot b - C^2 = \\ & = 2 \cdot a \cdot A + 2 \cdot b \cdot A - 2 \cdot A \cdot C. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{2 \cdot (A+b) \cdot C - 2 \cdot A \cdot b - C^2}{2 \cdot (A+b-C)} = a \quad (2')$$

И

$$\frac{2 \cdot (a + A) \cdot C - 2 \cdot a \cdot A - C^2}{2 \cdot (a + A - C)} = b. \quad (2'')$$

Равенства (2') и (2'') по сути – результат замены в равенстве (2) a на A и b на A соответственно.

Попробуем обобщить наши наблюдения.

Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ и C — действительные числа такие, что $\sum_{i=1}^n a_i \neq C$.

Вычислим по формуле

$$f_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{2 \cdot C \cdot \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i \neq j)}}^n a_i \cdot a_j - C^2}{2 \cdot \left(\sum_{i=1}^n a_i - C \right)} \quad (3)$$

очередное число, которое обозначим через A . Ясно, что любая перестановка чисел в наборе $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ не изменит результат вычислений. Менее очевидное свойство последней формулы заключается в следующем:

$$f_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = A \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_n(A, a_2, \dots, a_n) = a_1; \\ f_n(a_1, \dots, a_{i-1}, A, a_{i+1}, \dots, a_n) = a_i \\ \quad (i = 2, \dots, n-1); \\ f_n(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, A) = a_n. \end{array} \right.$$

Иначе говоря, функция $f_n(a_1, a_2, \dots, a_n)$ удовлетворяет циклической системе уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_{n+1}; \\ f_n(a_{n+1}, a_2, \dots, a_n) = a_1; \\ f_n(a_1, a_{n+1}, \dots, a_n) = a_2; \\ \qquad \qquad \qquad \vdots \\ f_n(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_{n+1}) = a_n. \end{array} \right.$$

В таком случае из равенства

$$f_{n+1}(a_1, a_2, \dots, a_n, 0) = f_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = A$$

сразу следует, что

$$f_{n+1}(a_1, a_2, \dots, a_n, A) = 0.$$

Придадим формуле (3) компактный вид. Поскольку

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ (i \neq j)}}^n a_i \cdot a_j = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n (a_i)^2,$$

TO

$$\begin{aligned} & 2 \cdot C \cdot \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i \neq j)}}^n a_i \cdot a_j - C^2 = \\ &= 2 \cdot C \cdot \sum_{i=1}^n a_i - \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 + \sum_{i=1}^n (a_i)^2 - C^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n (a_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i - C \right)^2. \end{aligned}$$

Следовательно, формула (3) переписывается в виде

$$f_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{\sum_{i=1}^n (a_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i - C\right)^2}{2 \cdot \left(\sum_{i=1}^n a_i - C\right)}.$$

Введём обозначения

$$K = \sum_{i=1}^n (a_i)^2; \quad S = \sum_{i=1}^n a_i - C.$$

Тогда окончательно имеем

$$f_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{K - S^2}{2 \cdot S}.$$

Переходим к описанию математического эксперимента. Участвовать в нём может любое количество человек. Непременное условие – каждый из участников должен уметь выполнять арифметические вычисления и иметь возможность вести записи, т.е. фиксировать результаты этих вычислений. (Допускается использование микрокалькулятора.) Общение участников друг с другом нежелательно. С чего всё начинается? Ведущий этого номера программы предлагает всем участникам выполнить следующие действия. (Объявлять результаты вычислений не разрешается.)

Действие 1. Вспомнить дату своего дня рождения и обозначить это число буквой C . (Например, если участник родился 25 февраля, то соответствующее $C=25$). После этого записать в строку любое конечное количество чисел

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

(желательно целых – для удобства счёта), сумма которых не должна совпасть с датой рождения, т.е. с числом C .

Действие 2. Вычислить

1) сумму этих чисел за вычетом числа C : $S = \sum_{i=1}^n a_i - C$;

2) сумму квадратов этих чисел: $K = \sum_{i=1}^n (a_i)^2$.

Действие 3. Вычислить число A

по формуле $A = \frac{K - S^2}{2 \cdot S}$. (Следует довести до сведения участников, что в случае $A=0$ надо изменить числа в списке $a_1, a_2, \dots, a_n$).

После этого начинается демонстрация фокусов.

Фокус 1. Ведущий предлагает приписать число A к первоначальному набору чисел:

$$a_1, a_2, \dots, a_n, A$$

(напомним, что у каждого участника свой набор задуманных чисел и число A соответственно тоже своё). Затем каждый должен выполнить последовательно **Действия 2–3** применительно к этому новому списку чисел. После окончания расчётов всеми участниками ведущий уверенно объявляет, что знает, какое новое число A они получили после выполнения **Действия 3**. Это число – нуль!

Фокус 2. Сначала ведущий предлагает в первоначально задуманном наборе чисел

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

заменить любое из них на число A , рассчитанное в результате **Действия 3**. (Пересчёт числа A при выполнении **Фокуса 1** не учитывается. Все участники возвращаются к «протоколу» расчётов, полученных до **Фокуса 1**.) Новый набор примет вид

$$a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, A, a_{i+1}, \dots, a_n,$$

(если на A заменили число a_i). Затем каждый должен выполнить последовательно **Действия 2–3** применительно к этому новому списку чисел. После этого ведущий уверенно объявляет, что знает про каждого, какое число в исходном списке чисел он заменил на A . Это именно то число, которое получено ими после выполнения **Действия 3**!



Что должно удивить зрителей и участников этих арифметических экспериментов? Напомним, что ведущий не имеет никакой информации ни о числах, которые были задуманы, ни об их количестве, ни, тем более, о дне рождения участников. И тем не менее всякий раз ему удаётся «прогнозировать» результаты, казалось бы, независимых и потому непредсказуемых индивидуальных расчётов.

Продemonстрируем для примера «протокол» вычислений какого-нибудь конкретного участника описанных арифметических экспериментов. Предположим, что он родился 25 февраля (поэтому $C=25$) и выбрал такие целые числа:

$$-4; 5; 10; 19.$$

Тогда он последовательно получит:

$$S = (-4 + 5 + 10 + 19) - 25 = 5;$$

$$K = (-4)^2 + 5^2 + 10^2 + 19^2 = 502;$$

$$A = \frac{502 - 25}{10} = 47,7.$$

Поэтому в Фокусе 1 Действия 2–3 будут им применены к набору чисел

$$-4; 5; 10; 19; 47,7.$$

Результаты очередных расчётов:

$$S = 5 + 47,7 = 52,7;$$

$$K = 502 + 47,7^2 = 2777,29.$$

Но тогда

$$K - S^2 = 2777,29 - 52,7^2 = 0 \Leftrightarrow A = 0,$$

что и утверждалось в Фокусе 1.

Теперь предположим, что в Фокусе 2 на $A=47,7$ в исходном списке было заменено последнее число:

$$-4; 5; 10; 47,7.$$

Тогда с учётом предыдущих вычислений Действия 2–3 дадут:

$$S = 52,7 - 19 = 33,7;$$

$$K = 2777,29 - 19^2 = 2416,29;$$

$$A = \frac{K - S^2}{2 \cdot S} = \frac{2416,29 - (33,7)^2}{2 \cdot 33,7} = 19.$$

В результате число 19, которое было «подменено» в первоначально задуманном наборе чисел в Фокусе 2, отгадано!

На этом демонстрация фокусов завершается, а их «секрет» (т.е. математическое обоснование) можно предложить обсудить на занятии школьного математического кружка (факультатива) или в рамках соответствующего тематического занятия элективного курса.

Мудрые мысли Мудрые мысли Мудрые мысли

Только тогда можно понять сущность вещей, когда знаешь их происхождение и развитие.

Аристотель

Кто мало думает, тот много ошибается.

Леонардо да Винчи

Помните, что даже человек, одарённый печатью гения, ничего не даст не только великого, но и среднего, если не будет адски трудиться. И чем больше человеку дано, тем больше он обязан трудиться ... Вдохновение рождается только из труда и во время труда.

П.И. Чайковский