Вавилов Валерий Васильевич
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова и школы имени А.Н. Колмогорова. Заслуженный преподаватель и лауреат Ломоносовской премии МГУ. Автор 23 книг и около 300 статей научного, методического и научно-популярного характера.

Формула Пика

Многим школьникам приходилось вычислять площадь многоугольника, все вершины которого находятся в узлах клетчатой бумаги. При этом, как правило, использовались разбиения данного многоугольника на более простые многоугольники (треугольники, параллелограммы, трапеции и др.), площади которых легко вычисляются по известным формулам. В этой статье мы докажем общую и простую формулу, принадлежащую австрийскому математику Г.А. Пику, которая позволяет находить площади любых многоугольников с вершинами в узлах клетчатой бумаги.

1. Многоугольники на клетчатой бумаге

С математической точки зрения клетчатая бумага – это множество всех точек координатной плоскости с целыми координатами, которое обозначают через Z^2. Сами точки из Z^2 принято называть *узлами*.

Бумага в клеточку, которую мы используем, состоит из квадратов, на которые разбивают плоскость два семейства параллельных между собой прямых линий. Если считать, что сторона каждого такого квадрата равна 1, то вершины всех квадратов разбиения «бесконечного листа клетчатой бумаги» (т. е. плоскости) и представляет собой множество Z^2 при подходящем выборе декартовой системы координат. Подчеркнём, что сами прямые линии, на которых расположены эти квадраты, в Z^2 не входят.

В этой статье мы в основном будем рассматривать только такие многоугольники, все вершины которых имеют целые координаты; при этом мы будем говорить, что он *расположен на клетчатой бумаге*. Кроме того, мы рассматриваем только такие многоугольники, которые ограничены замкнутой ломаной линией без самопересечений.

2. Площадь примитивного треугольника

Пусть дан некоторый многоугольник P, который расположен на Z^2. Для того чтобы найти формулу для вычисления площади P, попробуем

- построить разбиение многоугольника P на конечное число треугольников с вершинами только в узлах клетчатой бумаги, причём такое, что

• площадь каждого треугольника разбиения можно было бы легко вычислить.

Займёмся сначала поиском подходящих нам треугольников. Оказывается, любой треугольник, расположенный на клетчатой бумаге, внутри которого нет её узлов, а на его границе узлами являются только вершины треугольника (такие треугольники назовем *примитивными*), имеет площадь 1/2. Другими словами, справедливо следующее утверждение:

все примитивные треугольники равновелики и их площади равны половине площади единичного квадрата.

Заметим, что множество примитивных треугольников довольно разнообразно; примеры показаны на рис. 1 и для некоторых из них сразу видно, что их площади равны 1/2.

Для доказательства сформулированного свойства примитивного треугольника T рассмотрим минимальный прямоугольник Π, который описан вокруг T (т. е. вершины T находятся на сторонах Π), и такой, что его стороны параллельны сторонам квадратов, из которых состоит клетчатая бумага.

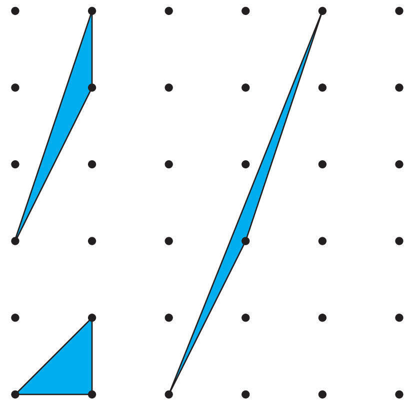


Рис. 1

Для произвольного треугольника возможны разные случаи взаимного расположения треугольника и описанного вокруг него прямоугольника и все они показаны на рис. 2 (с точностью до поворотов).

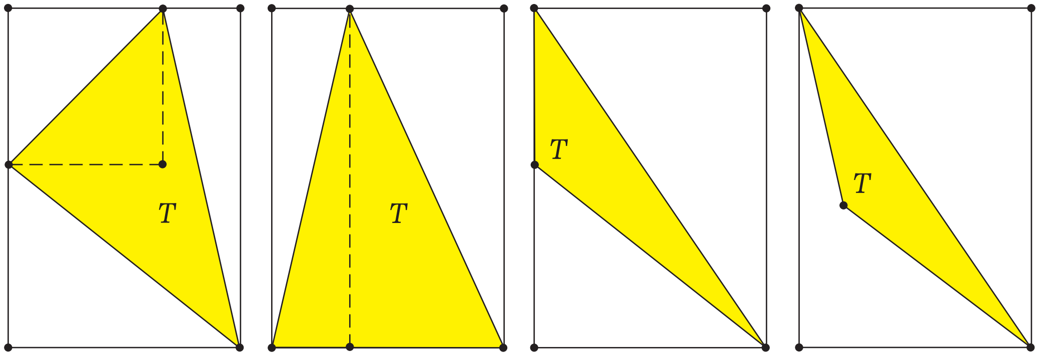


Рис. 2

Если T – примитивный треугольник, то первые две из показанных на рис. 2 возможностей не реализуются: в случае *а*) имеется узел внутри треугольника T, а в случае *б*) имеется узел на стороне треугольника T, отличный от его вершин.

Для изучения двух оставшихся возможностей введём декартову систему координат так, как показано на рис. 3, и на котором $T = ABC$, $\Pi = OAFB$, $D = (p, 0)$, $A = (q, 0)$, $E = (0, r)$, $B = (0, s)$. Чтобы объединить рассмотрение двух случаев в один, будем считать, что вершина C треугольника T может быть расположена на отрезках OB или OA (в частности, может совпадать с O).

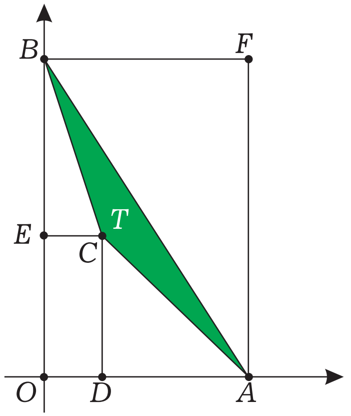


Рис. 3

Обозначим через $I(M)$ число узлов клетчатой бумаги, которые расположены строго *внутри многоугольника* M, *но не на его сторонах*. Тогда

$$I(\Pi) = I(OABF) = (q-1)(s-1).$$

Так как внутри отрезка AB нет узлов, кроме его концов, то

$$I(AOB) = \frac{1}{2} I(OAFB) = \frac{1}{2}(q-1)(s-1).$$

Аналогично:

$$I(ACD) = \frac{1}{2}(q-p-1)(r-1),$$

$$I(CBE) = \frac{1}{2}(s-r-1)(p-1).$$

Так как треугольник T не содержит внутри себя узлов, то

$$I(OAB) - I(ACD) - I(CBE) = pr,$$

где pr – число узлов, расположенных внутри прямоугольника $ODCE$, *включая* число узлов на его сторонах CD и CE. Отсюда следует, что

$$(q-1)(s-1) - (q-p-1)(r-1) - \\ -(s-r-1)(p-1) = 2pr$$

и, тем самым,

$$qs - ps - qr = 1.$$

Значит (здесь $[M]$ – площадь многоугольника M),

$$[T] = [ABC] = [OAB] - [ACD] - \\ -[CBE] - [ODCE] = \\ = \frac{1}{2} sq - \frac{1}{2}(p-q)r - \frac{1}{2}(s-r)p - pr = \\ = \frac{1}{2}(qs - ps - qr) = \frac{1}{2},$$

что и требовалось доказать.

Задача 1. Докажите, что треугольник, расположенный на Z^2, является примитивным *тогда и только тогда*, когда его площадь равна 1/2.

Указание. Используйте метод доказательства от противного.

Задача 2. Докажите, что примитивный треугольник может иметь все три стороны больше любого наперёд заданного положительного числа.

Указание. Используйте преобразование треугольника, расположенного на Z^2, которое состоит в следующем: треугольник T заменяется на другой треугольник T', у которого две вершины являются вершинами T, а третья вершина – симметрична вершине T относительно одной из вершин T. Имеются и другие способы построений.

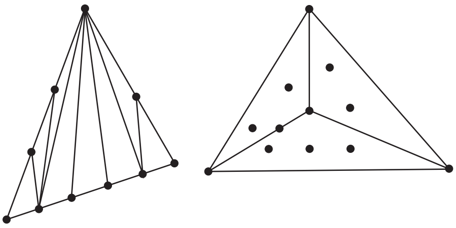
3. Разбиение многоугольника на примитивные треугольники

Итак, примитивные треугольники как нельзя лучше подходят для наших целей. Здесь мы покажем, что любой многоугольник P можно разбить на примитивные треугольники.

Если некоторый многоугольник P расположен на Z^2 и является *выпуклым* многоугольником, то такой многоугольник нетрудно разбить на примитивные треугольники. Для этого сначала из одной его вершины проведём все диагонали, разбив P на треугольники. Вершины этих треугольников являются вершинами многоугольника P и тем самым являются узлами клетчатой бумаги. Теперь каждый из полученных треугольников нужно разбить на примитивные треугольники.

Это легко сделать, если внутри него нет узлов, а на его границе их больше трёх – см. рис. 4 *а*.

Если же внутри у треугольника также есть узлы, то поступим так. Выберем сначала какой-то один из таких внутренних узлов и соединим его с вершинами треугольника. Тогда треугольник разобьётся на три новых треугольника (рис. 4 *б*), и внутри каждого из них внутренних узлов меньше, чем у исходного треугольника. Продолжая этот процесс, мы «уничтожим» все внутренние узлы, то есть получим конечное число треугольников, у которых нет внутренних узлов. А дальше поступаем так, как на рис. 4 *а*.



а) *б*)

Рис. 4

Оказывается, что и *любой многоугольник P, расположенный на Z^2, можно разбить на примитивные треугольники.*

Мы здесь не будем доказывать это утверждение и предоставляем читателю самостоятельно его доказать.

4. Вывод формулы Пика

Теперь мы можем считать, что рассматриваемый многоугольник P, расположенный на клетчатой бумаге, каким-то образом составлен из примитивных треугольников (рис. 5; граница P выделена красным цветом). Важно иметь в виду, что данный многоугольник *можно разбить на примитивные треугольники различными способами*. Мы из всех этих способов разбиения выберем сейчас какой-нибудь один и дальше только его и будем рассматривать.

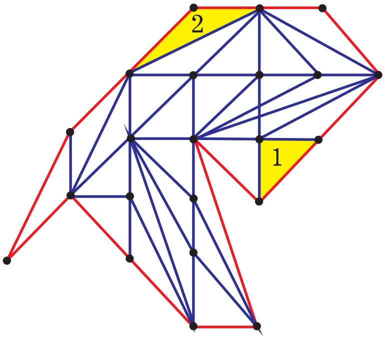


Рис. 5

На границе и внутри P находятся узлы клетчатой бумаги. Все эти узлы являются вершинами и тех примитивных треугольников, из которых он составлен. Нам уже ясно, что если $N = N(P)$ – это количество примитивных треугольников, то $[P] = N/2$.

Число N, конечно, зависит от самого многоугольника и его расположения на Z^2. И сейчас наша задача – найти явный вид этой зависимости.

Обозначим через $N_e = N_e(P)$ число всех узлов, расположенных на границе P, включая и все его вершины, а через $N_i = N_i(P)$ – число всех узлов, которые лежат строго внутри P; на рис. 5 мы имеем $N_e = 14$, $N_i = 8$.

Докажем, что $N = 2N_i + N_e - 2$.

Если многоугольник P состоит более чем из одного примитивного треугольника, то будем поочерёдно удалять один примитивный треугольник разбиения за другим, пока не останется только один примитивный треугольник. На первом шаге удалим примитивный треугольник, который имеет общие стороны с границей P. Есть две возможности при выборе удаляемого треугольника, отмеченные на рис. 5 номерами 1 и 2.

После удаления треугольника под номером 1 вместе с одной его стороной, принадлежащей границе P (рис. 5), мы получим новый многоугольник P', также составленный из примитивных треугольников, для которого

$$N(P') = N(P) - 1,\ N_i(P') = \\ = N_i - 1, N_e(P') = N_e + 1.$$

Так как

$$N(P') - 2N_i(P') - N_e(P') + 2 = \\ = N(P) - 1 - 2N_i(P) + 2 - N_e(P) - 1 + 2 = \\ = N(P) - 2N_i(P) - N_e(P) + 2,$$

то доказываемая формула для многоугольника P верна только в том случае, когда она верна для многоугольника P'.

Рассмотрим случай, когда удаляется примитивный треугольник под номером 2 с двумя сторонами на границе P. Здесь получается многоугольник P'', для которого

$$N(P'') = N(P) - 1, \\ N_i(P'') = N_i,\ N_e(P'') = N_e - 1$$

и

$$N(P'') - 2N_i(P'') - N_e(P'') + 2 = \\ = N(P) - 1 - 2N_i(P) - N_e(P) + 1 + 2 = \\ = N(P) - 2N_i(P) - N_e(P) - 2.$$

Итак, доказываемая формула верна для многоугольника P только тогда, когда она верна для многоугольника, полученного из P удалением (описанных двух видов) одного из примитивных треугольников.

Теперь можно уже утверждать, что *удаляя последовательно один примитивный треугольник за другим, мы придём к одному примитивному треугольнику*. Для одного примитивного треугольника доказываемая формула, как легко проверить, верна: $1 = 2 \cdot 0 + 3 - 2$. Следовательно, она верна и для многоугольника P.

Отметим, что процесс удаления треугольников должен быть организован так, чтобы каждый раз удалялся треугольник описанных выше типов (как на рис. 5), и чтобы в результате последовательных удалений треугольников наш исходный многоугольник не «развалился» на несколько частей. То, что это всегда возможно, требует своего обоснования, и мы предлагаем читателю самостоятельно составить алгоритм (пригодный для написания компьютерной программы), реализующий нужный способ удаления треугольников.

Обратим внимание читателя также на то, что формула $N = 2N_i + N_e - 2$ показывает, что *в каждом разбиении P имеется одинаковое количество примитивных треугольников*, так как в правой её части стоит число, которое не зависит от способа его разбиения.

Из доказанной формулы и того, что площадь любого примитивного треугольника равна $1/2$, мы получаем следующую теорему.

Теорема (Г.А. Пик). Пусть P – многоугольник, расположенный на Z^2. Если $[P]$ обозначает площадь P, N_e – число узлов на границе P и N_i – число узлов внутри P, то

$$[P] = N_i + \frac{1}{2}N_e - 1.$$

5. Задачи

Приведём теперь некоторые задачи, в которых можно использовать формулу Пика.

Задача 3. Найти площадь многоугольника, показанного на рис. 5.

Ответ: 14.

Задача 4. Внутри треугольника, расположенного на клетчатой бумаге, имеется только один узел G, а на его границе – только три узла, которые являются вершинами треугольника. Докажите, что G – точка пересечения медиан треугольника.

Указание. Три медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников. Взятые попарно, эти треугольники образуют три треугольника равной площади.

Задача 5. Замкнутая ломаная линия имеет вершины во всех центрах клеток шахматной доски 8×8 (с площадью клетки 1) и ограничивает некоторый многоугольник. Найти его площадь.

Решение. Этот многоугольник расположен на клетчатой бумаге, узлы которой являются центрами маленьких квадратиков из Z^2. По формуле Пика заключаем, что площадь рассматриваемого многоугольника равна $0+64/2-1=31$.

Заметим, что существует много замкнутых линий, удовлетворяющих условию задачи (путей шахматного короля), но все они, как мы видели, ограничивают одну и ту же площадь. Читателю мы предлагаем найти такие из рассматриваемых замкнутых линий, которые имеют максимальную и минимальную длины.

Задача 6. Вершины квадрата площади 1 соединены с серединами его сторон так, как показано на рис. 6. Найдите площадь заштрихованного восьмиугольника.

Решение. Эта задача впервые предлагалась на Венгерской олимпиаде (для параллелограмма) и её авторское решение предполагало вычисление площадей всех «лишних треугольников». Такому методу решения сопутствуют многочисленные вычисления.

Применение формулы Пика даёт результат немедленно. Но для применения формулы нужно сначала разместить этот рисунок на некоторой клетчатой бумаге так, чтобы все вершины как квадрата, так и восьмиугольника были её узлами. Такую бумагу можно «увидеть», изготовив наш рисунок на стандартной бумаге в клетку, выбирая квадрат размерами 12×12 (отношение площади восьмиугольника к площади квадрата при этом не изменится). Читателю предлагается это сделать самому и убедиться, что площадь восьмиугольника равна $1/6$. Отметим, что из такого рисунка также будет видно, что восьмиугольник не является правильным: все его стороны равны, а углы равны через один.

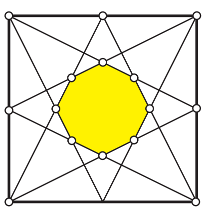


Рис. 6

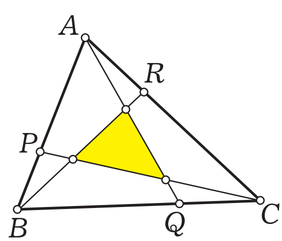


Рис. 7

Задача 7. На сторонах треугольника ABC площади 1 выбраны точки P, Q и R так, что $AP=2BP$, $BQ=2QC$ и $CR=2AR$. Найдите площадь заштрихованного треугольника (рис. 7).

Ответ: $1/7$. *Указание*. Одно из возможных решений этой задачи состоит из вычислений всех лишних кусочков (см. статью Т.Н. Епифановой «Пропорциональные отрезки в треугольнике» в «Потенциале» №7, 2010).

Второе решение основано на том, что формула Пика справедлива и на «косоугольных клетчатых бумагах», которая устроена так же как Z^2, но роль маленького квадрата (площади 1) играет уже некоторый параллелограмм площади Δ. В этом случае формула Пика выглядит так:

$$[P]=\left(N_i+\frac{1}{2}N_e-1\right)\cdot\Delta.$$

Теперь нужно расположить рис. 9 на некоторой «косоугольной клетчатой бумаге» так, чтобы вершины треугольника ABC и вершины закрашенного треугольника были её узлами. Необходимые здесь построения легко обосновать при помощи теоремы Фалеса.

Задача 8. Решите задачу 6, заменив в ней квадрат на параллелограмм.

6. Историческая справка

Австрийский математик Георг Александер Пик родился 10 августа 1859 года в Вене. Его отец, будучи руководителем частного института, предпочёл до 11 лет обучать мальчика на дому, а потом отдал его сразу в четвёртый класс гимназии, окончив которую в 1875 году, Г.А. Пик поступил в Венский университет.

После защиты диссертации Г.А. Пика утверждают на должность ассистента одного из ведущих физиков того времени, профессора Эрнста Маха, являющегося одновременно ректором Карлова университета в Праге – старейшего учебного заведения во всех славянских странах. Постоянно, за исключением поездки в Лейпциг для обучения под руководством Феликса Клейна в 1884–1885 годах, Г.А. Пик живёт и работает в Праге.

В 1900–1901 годах Г.А. Пик был деканом философского факультета Карлова университета, и в 1911 году Пик оказался во главе комиссии, которая приняла на кафедру математической физики Альберта Эйнштейна. Они становятся близкими друзьями, совершая продолжительные пешие прогулки и беседуя, вместе музицируют.

Среди всего многообразия достижений австрийского математика выделяется формула для вычисления площадей, о которой идёт речь в статье. Она стала широко известна только в 1969 году, лишь после того, как Гуго Штейнгауз включил её в свою знаменитую книгу «Математический калейдоскоп».

После выхода в 1927 году на пенсию Г.А. Пик вернулся в свой родной город Вену. Однако после аншлюса 12 марта 1938 года Австрии с Германией ему пришлось вновь перебраться в Прагу. В сентябре 1938 года фашистская Германия вторглась на территорию Чехословакии. Г.А. Пик был брошен в концентрационный лагерь в Терезинштадте, где и умер две недели спустя.

Литература

1. *Г. Штейнгауз*. Математический калейдоскоп. – М.: Наука, 1981.
2. *Г.С.М. Коксетер*. Введение в геометрию. – М.: Наука, 1966.
3. *В.В. Вавилов, А.В. Устинов*. Многоугольники на решетках. – М.: МЦНМО, 2006.
4. *В.В. Вавилов, А.В. Устинов*. Две знаменитые формулы//«Квант». – 2007. – №1.
5. *Н.Б. Васильев*. Вокруг формулы Пика//«Квант». – 1974. – №12.