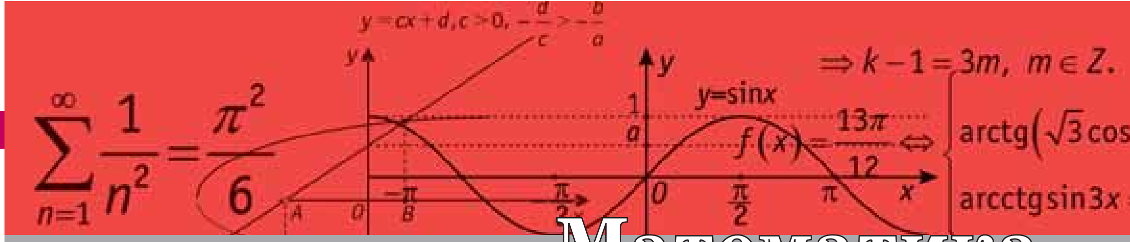

Шивринская Елена Вячеславовна
Кандидат педагогических наук (2002 г.), преподаватель МГУ им. М.В. Ломоносова Специализированного учебно-научного центра-факультета школы-интерната им. А.Н. Колмогорова, кафедра математики. Автор более 30 работ по элементарной математике и математическому моделированию.

Формула Архимеда-Герона

Рассмотрим треугольник ABC (рис. 1), в котором a, b и c – стороны, α, β, γ – соответствующие углы, R и r – радиусы описанной и вписанной окружностей, h_a – высота, проведённая к стороне a, p – полупериметр. Тогда площадь треугольника можно вычислить по двум основным формулам: $S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

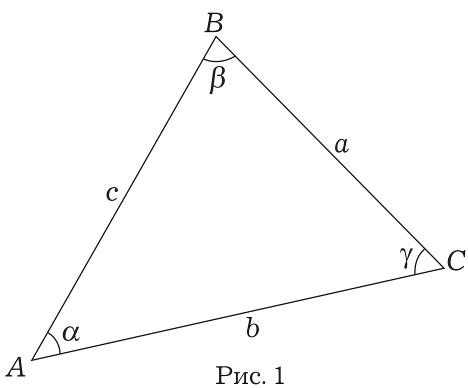

Рис. 1

Теорема. Для произвольного треугольника ABC имеют место равенства:

$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{abc}{4R}=$$

$$=2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\gamma}=$$

$$=\frac{a^2+b^2-c^2}{4\operatorname{ctg}\gamma}=pr=(p-a)r_a=$$

$$=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

1) $S=\frac{abc}{4R}$. Из теоремы синусов получаем $\sin\gamma=\frac{c}{2R}$, тогда

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}\cdot ab\cdot\frac{c}{2R}=\frac{abc}{4R}.$$

2) $S=2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

Из теоремы синусов $\frac{a}{\sin\alpha}=$ $=\frac{b}{\sin\beta}=2R$ получаем для сторон

следующие соотношения: $a = 2R\sin\alpha$ и $b = 2R\sin\beta$, тогда

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2R\sin\alpha \cdot 2R\sin\beta \cdot \sin\gamma =$$

$$= 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma.$$

3) $S = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{4\operatorname{ctg}\gamma}$. Из теоремы косинусов $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma$ получаем

$$ab = \frac{a^2+b^2-c^2}{2\cos\gamma}.$$

Тогда

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{a^2+b^2-c^2}{2\cos\gamma}\sin\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{4\operatorname{ctg}\gamma}.$$

4) $S = pr$. Соединим центр вписанной в треугольник окружности с его вершинами, тогда площадь треугольника ABC можно представить

$$S = \frac{1}{2}(ar+br+cr) = \frac{a+b+c}{2}r = pr$$

(см. рис. 2).

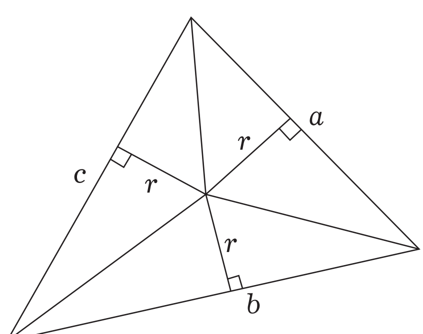

Рис. 2

5) $S = r_a(p-a)$. Если r_a, r_b и r_c – радиусы вневписанных окружностей, то

$$S = r_a(p-a) = r_b(p-b) = r_c(p-c).$$

Рассмотрим треугольник ABC и окружность, касающуюся его стороны

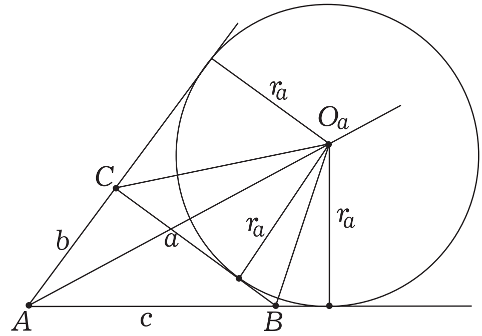

Рис. 3

BC и продолжения сторон AB и AC (рис. 3). Пусть r_a – радиус этой вневписанной окружности. Тогда

$$S = \frac{1}{2}br_a + \frac{1}{2}cr_a - \frac{1}{2}ar_a =$$

$$= r_a\left(\frac{b+c-a}{2}\right) = r_a(p-a).$$

6) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (формула Герона).

Для доказательства рассмотрим треугольник ABC (рис. 4). Чтобы найти высоту h_a, воспользуемся равенством $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac'$ (равенство следует из теоремы Пифагора) и выразим из него длину отрезка c':

$$c' = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}.$$

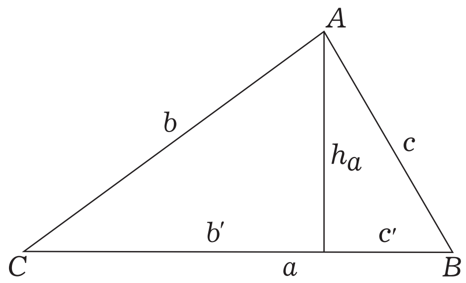

Рис. 4

Тогда

$$h_a = \sqrt{c^2 - (c')^2} = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2a}\sqrt{4a^2c^2 - \left(a^2 + c^2 - b^2\right)^2}.$$

Отдельно преобразуем подкоренное выражение:

$$4a^2c^2 - \left(a^2 + c^2 - b^2\right)^2 =$$

$$= \left(2ac - a^2 - c^2 + b^2\right)\left(2ac + a^2 + c^2 - b^2\right) =$$

$$= \left(b^2 - (a-c)^2\right)\left((a+c)^2 - b^2\right) =$$

$$= (b-a+c)(b+a-c)(a+c-b)(a+c+b) =$$

$$= 2(p-a)2(p-c)2(p-b)2p =$$

$$= 16(p-a)(p-c)(p-b)p,$$

где

$$b + c - a = (a+b+c) - 2a = 2p - 2a = 2(p-a),$$

$$a + b - c = 2(p-c),\ \ a + c - b = 2(p-b).$$

Тогда

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}a\frac{1}{2a}\sqrt{16p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

В журнале «Квант» (№12, 1986) была опубликована одна из задач Архимеда. Сформулируем её в виде леммы.

Лемма. Пусть D – середина дуги AC, B – некоторая точка этой дуги (см. рис. 5). Тогда основание E перпендикуляра, опущенного из точки D на ломаную ABC, делит длину этой ломаной пополам.

Доказательство.

1) Сделаем следующие дополнительные построения: *а*) соединим точку D с вершиной B и с точкой G такой, что $BE = EG$. Так как надо доказать, что $CB + BE = AE$, то нам останется доказать, что $BC = AG$; *б*) отложим $DH = BD$. Так как точка D – середина дуги AC, то получим, что $BC = AH$.

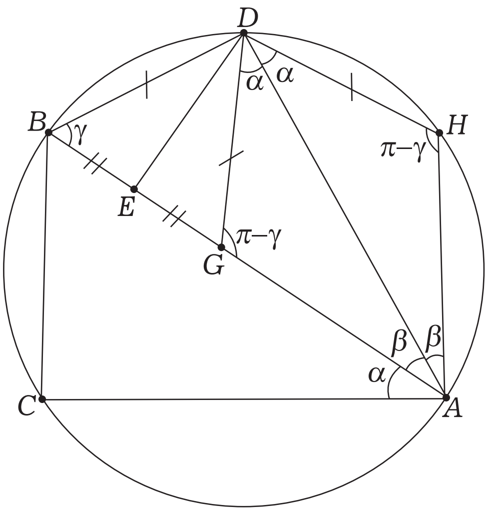

Рис. 5

2) Покажем, что AD – биссектриса угла HAB.

Так как углы DBA и DHA опираются с разных сторон на одну хорду DA и $\angle DBA = \gamma$, то $\angle DHA = \pi - \gamma$. С другой стороны, угол DGA – внешний для треугольника BDG, т.е. $\angle DGA = \pi - \gamma$.

Пусть $\angle HDA = \alpha$, $\angle HAD = \beta$. Тогда $\angle HAD = \angle DAB = \beta$ (т.к. $BD = DH$) и $\angle GDA = \alpha$. Получаем, что $BC = AG$. Что и требовалось доказать.

Теперь выведем формулу площади треугольника через длины всех его сторон, как это сделал Архимед (на три века раньше Герона).

Формула Архимеда-Герона. Если a, b и c – длины сторон треугольника

ABC, то

$$S_{ABC}=\sqrt{(p-b)p(p-c)(p-a)},$$

где $p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$.

Доказательство. Опишем около треугольника ABC окружность, пусть точка D – середина дуги AC (рис. 6).

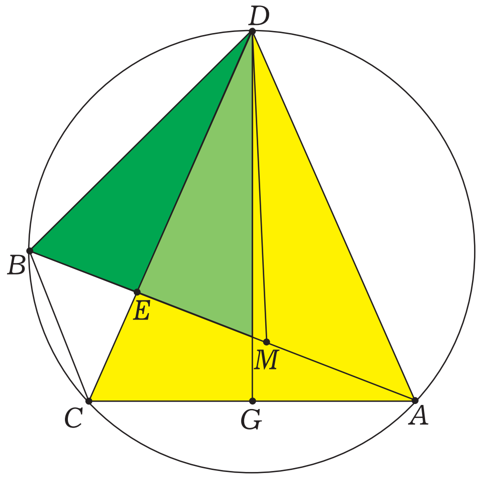

Рис. 6

1) По лемме Архимеда получаем, что $BC+BE=AE$, и т.к. $BE=EM$, то $BE=\dfrac{c-a}{2}$, $AM=a$, $AE=\dfrac{a+c}{2}$.

2) Соединим точку D с вершинами B, C и A треугольника ABC, а также $DE\perp AB$ и $DG\perp AC$. Заметим, что $\Delta BCD=\Delta MAD$ (по трём сторонам).

3) Рассмотрим площадь треугольника ACD:

$$S_{ACD}=S_{AMDBC}=S_{ABC}+S_{MBD},$$

(где ΔACD подобен ΔMBD), отсюда

$$S_{ABC}=S_{ACD}-S_{MBD},$$

то есть площадь треугольника ABC есть разность площадей равнобедренных подобных треугольников ACD и MBD!

4) Пусть $DG=x$, $AG=y$ и $DE=kx$, $BE=ky$. Тогда

$$S_{ACD}=DG\cdot AG=xy,$$

$$S_{MBD}=DE\cdot BE=k^2xy.$$

Рассмотрим отношение подобия:

$$\frac{DG^2-DE^2}{DG\cdot AG-DE\cdot BE}=\frac{DG\cdot AG-DE\cdot BE}{AG^2-BE^2},$$

так как

$$\frac{x^2-k^2x^2}{x\cdot y-k^2x\cdot y}=\frac{x\cdot y-k^2x\cdot y}{y^2-k^2y^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2\left(1-k^2\right)}{xy\left(1-k^2\right)}=\frac{xy\left(1-k^2\right)}{y^2\left(1-k^2\right)}.$$

Тогда

$$S_{ABC}^2=(DG\cdot AG-DE\cdot BE)^2=$$

$$=\left(DG^2-DE^2\right)\left(AG^2-BE^2\right).$$

Рассмотрим отдельно

$$DG^2-DE^2=\left(DA^2-AG^2\right)-$$

$$-\left(DA^2-AE^2\right)=AE^2-AG^2=$$

$$=(AE-AG)(AE+AG)=$$

$$=\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\left(\frac{a+c+b}{2}\right)=(p-b)p \text{ и}$$

$$AG^2-BE^2=(AG-BE)(AG+BE)=$$

$$=\left(\frac{b-c+a}{2}\right)\left(\frac{b+c-a}{2}\right)=(p-c)(p-a).$$

$$S_{ABC}^2=(p-b)p(p-c)(p-a),$$

что и требовалось доказать.

Остальные формулы докажите сами:

7) $S=\sqrt{rr_a r_b r_c}$.

8) $S=\dfrac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\gamma}$.

9) $S=R^2\sin\gamma\left(\cos\gamma+\cos(\alpha-\beta)\right)$.

10) $S=r^2\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}$.

11) $S=4Rr\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$.

12) $S=p^2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}$.

Также можно предложить следующие **темы** исследовательских проектов: вывести площадь треугольника через длины *a*) биссектрис, *б*) медиан, *c*) высот.

Автор выражает искреннюю благодарность Вавилову В.В. за полезные обсуждения и ценные замечания.

Литература

1. *Киселёв А.П.* Геометрия/под ред. Н.А. Глаголева. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004, 328 с.

2. *Архимед*. Сочинения. – М.: Физматгиз, 1962.

3. *Лужина Л.М., Натяганов В.Л.* Сборник задач по геометрии и тригонометрии. Учеб. пособие. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во УНЦ ДО, 2003, 247 с.