Лукьянов Андрей Александрович
Кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий инженер Лаборатории по работе с одаренными детьми МФТИ.

Физика помогает математике

Приведено несколько примеров из геометрии (планиметрии и стереометрии), в которых физика приносит пользу математике, упрощая вычисления. Два примера – классические (теорема Пифагора и формула Архимеда для площади криволинейной фигуры под параболой). Еще два примера – из личного опыта автора.

Физики любят математику. Она – основной инструмент физика-теоретика. Но и экспериментальная физика – это не просто показывание фокусов, – это тоже обязательно какие-то вычисления. Физика – наука количественная. Она не относится к разговорному жанру. Еще Галилей писал, что Природа «говорит» с людьми, познающими Её, на языке математики.

Физика и математика чрезвычайно переплетены друг с другом. Одни и те же исследователи занимались и физикой, и математикой. Вспоминаются Паскаль, Ньютон, Эйлер, семья Бернулли, Гаусс, Пуанкаре, Гильберт, Боголюбов, … Всех не перечесть!

Физики (чаще физики-теоретики) охотно развивали математические методы (Андронов, Дирак). Иногда физики брались за написание книг по математике (например, Зельдович [1–2]). Из современных математиков нельзя не вспомнить Арнольда; при этом достаточно взглянуть на названия его книг [3–4].

Физические соображения иногда подсказывали неожиданные ходы. Впервые с такими автор встретился еще школьником лет 50 назад в статье с названием «Физика помогает геометрии», опубликованной в журнале «Квант» [5]. Она подсказала и название настоящей статьи, которая однако не будет иметь значительных пересечений с [5]. Зато будет рассказано о том, как еще в III веке до н.э., Архимед воспользовался физическим методом (условием равновесия рычага) для отыскания площади криволинейной фигуры под параболой $y = ax^2$ (см. п. 4 настоящей статьи).

1. Теорема Пифагора и метод размерностей

Большинство школьников, начиная примерно с 8 класса, знают теорему Пифагора. Она утверждает, что в прямоугольном треугольнике длины катетов a и b, а также длина гипотенузы c связаны простым соотношением

$$a^2+b^2=c^2. \qquad (1)$$

Не уверен однако, что каждый из учащихся сходу вспомнит доказательство этой теоремы. Еще больше сомнений в том, что доказательство вспомнит инженер, много лет назад изучавший геометрию. (Какие-то надо было достраивать «пифагоровы штаны» – квадраты на сторонах треугольника, потом надо было еще как-то разбивать их на меньшие квадраты ... Вспомнить не так легко.)

Есть однако одно доказательство теоремы Пифагора, которое трудно забыть. Автору, во всяком случае, этого так и не удалось сделать! Хотя впервые он узнал это доказательство лет 45 назад из книги Мигдала ... по квантовой теории [6]. Это не было причудой академика – рассказать о теореме Пифагора. Речь шла об оценках, которые делают физики из соображений размерностей величин. Пример теоремы Пифагора был очень ярким: из Почти Ничего было получено очень простое (короткое) доказательство совсем неочевидной теоремы.

Физические величины в большинстве своем измеряются в определенных единицах. Например, длина измеряется в метрах (или сантиметрах, может быть, в километрах – в каких-то подходящих единицах длины), время измеряют в секундах или, если надо, в годах (вряд ли разумно измерять возраст человека в секундах ☺), масса измеряется в граммах или килограммах, может быть, в тоннах. Площадь измеряют в квадратных метрах, м^2, или в см^2, или, например, в км^2, – как удобно.

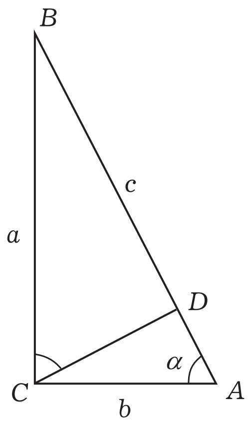

Рис. 1

Пока ничего особенного автор еще не сказал читателю. Теперь – важный и хитрый ход. Из соображений размерности вытекает, что площадь прямоугольного треугольника можно записать как квадрат гипотенузы c^2, умноженный на некоторую безразмерную функцию угла $f(\alpha)$:

$$S=c^2 f(\alpha) \qquad (2)$$

Важно, что площадь прямоугольного треугольника выражается лишь через одну характерную длину треугольника, – гипотенузу, – точнее: через квадрат ее длины.

Еще важно: не утверждается, что функция $f(\alpha)$ равна $\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha$. В этом случае нас бы еще могли заподозрить, что мы неявно пользуемся теоремой Пифагора (а вдруг в определениях синуса и косинуса уже содержится теорема, которую мы только собираемся доказать). Про функцию $f(\alpha)$ ничего особого не говорится. Утверждается лишь, что она – не нуль: иначе площадь треугольника равнялась бы нулю.

Из вершины прямого угла опустим перпендикуляр CD на гипотенузу. В результате образуются два новых треугольника BCD и ADC. Они подобны исходному треугольнику, катеты которого играют роль гипотенуз в новых треугольниках. Для новых треугольников также справедливы формулы (2):

$$S_1 = a^2 f(\alpha),\ \ S_2 = b^2 f(\alpha).$$

Площадь любой фигуры равна сумме площадей ее частей. Поэтому имеет место равенство $c^2 f(\alpha) = a^2 f(\alpha) + b^2 f(\alpha)$, откуда после сокращения на $f(\alpha) \neq 0$ получаем теорему Пифагора.

Как видите, никаких громоздких дополнительных построений здесь делать не надо – только опустить перпендикуляр на гипотенузу.

Приведенное доказательство иногда производит на слушателей впечатление фокуса. Кажется, что таким методом можно было доказать всё, что угодно, например, что $a^2 + c^2 = b^2$ или $c^2 + b^2 = a^2$. Достаточно, например, сказать, что площадь исходного прямоугольного треугольника может быть выражена *не* через квадрат гипотенузы, а через квадрат какого-нибудь катета, например, $S = a^2 F(\alpha)$, где $F(\alpha)$ – тоже какая-то безразмерная функция угла, разумеется, не равная $f(\alpha)$. Подумайте, почему в этом случае мы не получили бы, например, формулу $c^2 + b^2 = a^2$ (или $a^2 + c^2 = b^2$).

Подробнее о методе размерностей можно прочитать в книгах [7–8]. Весьма рекомендую! Они очень разные и по-разному интересные.

2. «Новая» формула планиметрии

Следующий рассказ – о формуле, которую автор не знал в школе, но получил, решая конкретную физическую задачу. Расспросив своих коллег-физиков, автор выяснил, что и они не слышали об этой формуле. Коллеги-математики знали про нее, но согласились, что рассказывают про нее нечасто. Она не такая фундаментальная, как теорема Пифагора. Школьники без нее спокойно обходятся. Все же она красивая. Поэтому расскажем о ней.

Рассмотрим следующую физическую **ЗАДАЧУ.** Трое рабочих удерживают тяжелую гирю с помощью легкой горизонтальной плиты в форме некоторого произвольного вида треугольника (не обязательно прямоугольного, не обязательно равностороннего ...), на которой гиря покоится в точке G, удаленной от сто-

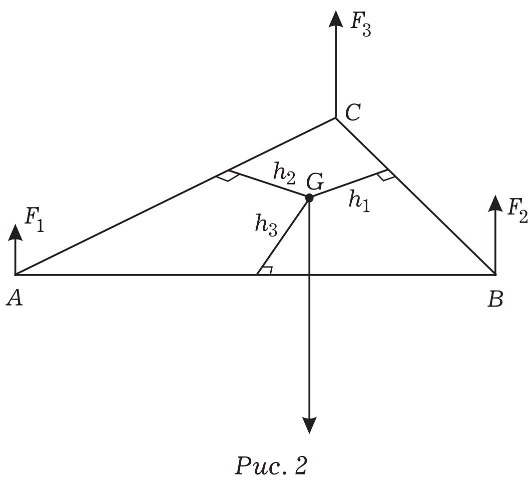

Рис. 2

рон треугольника на расстояния h_1, h_2, h_3 (рис. 2-3). Рабочие удерживают гирю за вершины треугольника. Про треугольник известно, что его высоты равны H_1, H_2, H_3 (рис. 3). Вес гири равен P. Определите силы F_1, F_2, F_3, прикладываемые рабочими.

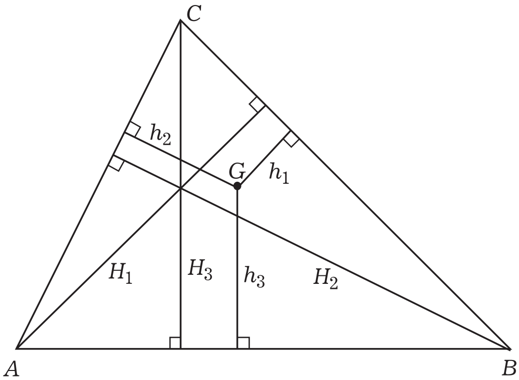

Рис. 3

Решение. Запишем условие моментов последовательно относительно трех мысленно выбранных осей. Сначала – относительно оси, совпадающей со стороной BC. Моменты сил F_2 и F_3 относительно этой оси равны нулю (равны нулю плечи этих сил). В результате, условие равенства нулю суммы моментов всех сил относительно оси BC дает с учетом знаков моментов:

$$F_1 \cdot H_1 - P \cdot h_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_1 = \frac{h_1}{H_1}P \qquad (3)$$

Аналогично записываем условие моментов для осей CA и AB:

$$F_2 \cdot H_2 - P \cdot h_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_2 = \frac{h_2}{H_2}P \qquad (4)$$

$$F_3 \cdot H_3 - P \cdot h_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_3 = \frac{h_3}{H_3}P \qquad (5)$$

Формулы (3–5) полностью решают поставленную задачу. Вспомним однако еще одно условие равновесия – сумма всех сил, приложенных к телу равна нулю: $F_1 + F_2 + F_3 - P = 0$. Подставляя сюда выражения для сил (3–5) и сокращая на P, получаем формулу

$$\frac{h_1}{H_1} + \frac{h_2}{H_2} + \frac{h_3}{H_3} = 1. \qquad (6)$$

Замечательно, что это – просто геометрическая формула: в нее вовсе не входят никакие силы! Ясно, что она могла быть получена и из чистой геометрии. Сделать это нетрудно. Запишем формулу для площади треугольника ABC как сумму площадей трех треугольников – BCG, ACG и ABG (на рис. 3 отрезки AG, BG и CG не показаны, чтобы не загромождать рисунок):

$$S_{ABC} = S = S_{BCG} + S_{ACG} + S_{ABG} = \\ = \frac{1}{2}a \cdot h_1 + \frac{1}{2}b \cdot h_2 + \frac{1}{2}c \cdot h_3 \qquad (7)$$

Учтем теперь, что площадь всего треугольника могла быть выражена тремя способами – через каждую из трех сторон и высоту к ней:

$$S = \frac{1}{2}a \cdot H_1 = \frac{1}{2}b \cdot H_2 = \frac{1}{2}c \cdot H_3; \qquad (8)$$

отсюда находим выражения для половинок сторон:

$$\frac{1}{2}a = \frac{S}{H_1}, \quad \frac{1}{2}b = \frac{S}{H_2}, \quad \frac{1}{2}c = \frac{S}{H_3},$$

подстановка которых в (7) после сокращения величин приводит к формуле (6).

Признаем: найденную формулу не назовешь фундаментальной. За много лет работы в теоретической физике и в процессе преподавая физики студентам и школьникам автор ни разу ею не воспользовался. Все же она красивая! Заметим, кроме того, что она верна для *произвольной* точки *произвольного* вида треугольника. – Что-то в этом есть!

3. «Еще одна» формула стереометрии

А теперь еще об одной формуле – из стереометрии, – которую автор статьи тоже не знал ни в школе, ни еще много лет, но вывел «случайно», решая задачу по гидростатике. В условиях *статики* любая мысленно выделенная часть жидкости находится в равновесии. Это означает, что сумма всех сил, действующих на эту выделенную часть со стороны оставшейся части жидкости, равна нулю.

Рассмотрим мысленно выделенную часть жидкости в форме прямоугольной пирамиды (рис. 4). Все три угла в вершине O – прямые. Закон Паскаля утверждает, что в условиях статики силы на каждую из четырех граней пирамиды перпендикулярны этим граням и пропорциональны площадям граней. Коэффициент пропорциональности есть давление в жидкости p. (Считаем, что пирамида небольшого размера, поэтому давление в разных ее частях вблизи нее везде одно и то же.)

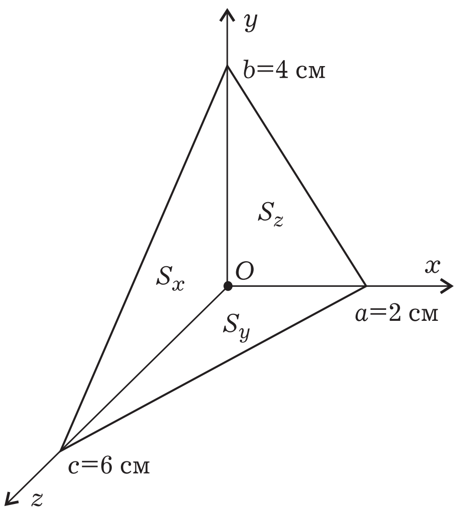

Рис. 4

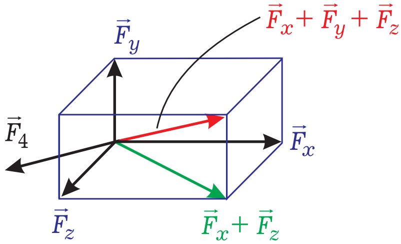

Рис. 5

Выразим сказанное математически. Направим оси координат вдоль ребер пирамиды так, как показано на рис. 4. Тогда имеем

$$\vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z + \vec{F}_4 = 0\,, \qquad (9)$$

где $\vec{F}_4$ – сила, действующая на грань abc (рис.4), причем, для сил имеем простые формулы

$$F_x = p\cdot S_x, \quad F_y = p\cdot S_y,$$

$$F_z = p\cdot S_z, \quad F_4 = p\cdot S_4\,. \qquad (10)$$

Ясно, что равнодействующая трех сил $\vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z$ должна уравновесить четвертую силу $\vec{F}_4$, приложенную к 4-й грани пирамиды:

$$\vec{F}_4 = -(\vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z)\,. \qquad (9^*)$$

Тогда по «3-мерной теореме Пифагора» получаем

$$F_4 = \sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2} + F_z^{\,2}}\,. \qquad (9^{**})$$

Подстановка в (9**) выражений для сил (10), приводит после сокращения на p (давление) к формуле для площадей пирамиды

$$S_4 = \sqrt{S_x^{\,2} + S_y^{\,2} + S_z^{\,2}}\,. \qquad (11)$$

Формула (11) напоминает формулу теоремы Пифагора. Автор статьи не знал ее (и обходился без нее) всю жизнь! Коллеги-математики, подтвердили, что формула (11), действительно, имеет место (ее можно доказать в общем виде), но реально она нечасто «работает»: все же она верна лишь для редкого вида пирамид («трижды прямоугольных»: с тремя прямыми двугранными углами). Автор статьи, наверное, подзабыл геометрию, и формулу (11) вывел чисто геометрически не в две строчки. «Физическое» доказательство далось физику значительно легче.

ЗАДАЧА. По формуле (11) вычислим площадь 4-й грани пирамиды на рис. 4.

РЕШЕНИЕ.

$$S_x = 12\text{ см}^2,\ S_y = 6\text{ см}^2,\ S_z = 4\text{ см}^2,$$

$$S_4 = \sqrt{12^2 + 6^2 + 4^2} = \sqrt{196} = 14\text{ см}^2.$$

ЗАДАЧА для самостоятельного рассмотрения. Вычислите площадь 4-й грани пирамиды рис. 4, не пользуясь формулой (11).

На самом деле формула (11) возникла у автора не из гидростатики, а в процессе выдумывания **ЗАДАЧИ** по статике *твердого* тела (НЕ жидкого!). Эту задачу вам предлагается решить самостоятельно. Предположим, что имеется твердая пирамида такая, как на рис. 4. Ее поочередно ставят (кладут) на все четыре грани. *Средние* давления, которые оказывает пирамида при постановке на первые три грани таковы: $p_x = 1{,}0$ кПа, $p_y = 2{,}0$ кПа, $p_z = 3{,}0$ кПа. Требуется найти *среднее* давление, которое будет оказывать пирамида, будучи поставлена на 4-ю грань.

ОТВЕТ громоздкий:

$$p_4 = \frac{p_x p_y p_z}{\sqrt{p_x^2 p_y^2 + p_y^2 p_z^2 + p_z^2 p_x^2}} \approx 860\ \text{Па}.$$

А теперь – обещанное ...

4. Вычисление Архимедом площади криволинейной фигуры под параболой

С доказательством Архимеда автор познакомился по книге [9]. С минимальными отклонениями от [9] изложим это доказательство.

Итак, нужно вычислить площадь заштрихованной на рис. 6 фигуры. Заметим, что в уравнении параболы $y = ax^2$ величина a имеет размерность обратной длины: измеряется в единицах м$^{-1}$: дело в том, что обе координаты, и x, и y, измеряются в метрах. Искомая площадь составляет лишь часть площади прямоугольника со сторонами l и al^2.

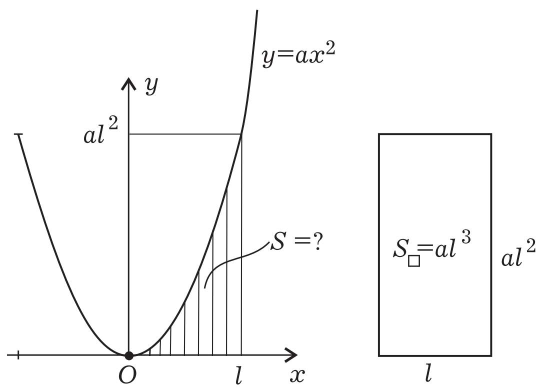

Рис. 6

Архимед мысленно разбивает всю заштрихованную на рис. 6 фигуру на ряд очень тонких (шириной Δx) вертикальных полосок.

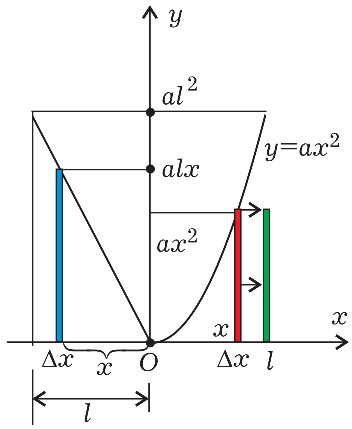

Рис. 7

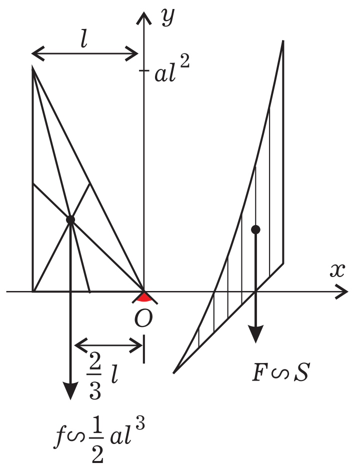

Рис. 8

Рассмотрим одну из них, выделенную красным цветом на рис. 7, расположенную на расстоянии x от точки О, в которую Архимед помещает ось рычага, перпендикулярную рисунку. Высота полоски равна ax^2, ее площадь – $ax^2\Delta x$. Архимед мысленно переносит эту полоску на конец рычага (зеленая полоска). Эта полоска создает момент силы относительно оси рычага, пропорциональный площади $ax^2\Delta x$, умноженной на плечо l, т.е. пропорциональный $ax^2\Delta x \cdot l$. Эту полоску справа Архимед мысленно уравновешивает другой полоской той же ширины Δx, расположенной на расстоянии x левее оси рычага (синяя полоска). Из условия равновесия он находит требуемую высоту Y полоски слева:

$$Y \cdot \Delta x \cdot x = ax^2 \Delta x \cdot l \Rightarrow \quad Y = a \cdot l \cdot x. \quad (12)$$

Уравновесим таким образом все полоски справа (сдвинутые на конец рычага) соответствующими полосками слева (без сдвигов). В результате мы уравновесим всю заштрихованную на рис.6 фигуру, но сдвинутую в правый край рычага, треугольником слева (рис. 8). Момент силы тяжести F фигуры на правом краю рычага (на расстоянии l от оси) будет пропорционален искомой площади умноженной на плечо, т.е. пропорционален $S \cdot l$.

Вычислим суммарный момент сил тяжести всех полосок треугольника слева от оси. Во-первых, он пропорционален площади (массе, силе тяжести) этого треугольника $S_\Delta = \frac{1}{2}al^2 \cdot l$. Чему равно плечо равнодействующей всех сил тяжести треугольника слева? Архимед знал, что центр тяжести однородного треугольника расположен в точке пересечения медиан этого треугольника. Кроме этого, ему было известно, что медианы треугольника в точке их пересечения друг с другом делятся в отношении 1:2. Отсюда он получил плечо силы тяжести f треугольника слева, $\frac{2}{3}l$. Момент силы тяжести этого треугольника относительно оси рычага равен $\frac{1}{2}al^2 \cdot l \cdot \frac{2}{3}l$. Его нужно приравнять моменту силы тяжести фигуры справа:

$$\frac{1}{2}al^2 \cdot l \cdot \frac{2}{3}l = S \cdot l. \qquad (13)$$

Отсюда получаем выражение для искомой площади криволинейной фигуры на рис. 6:

$$S = \frac{1}{2}al^3 \qquad (13^*)$$

Эта площадь составляет 1/3 от площади прямоугольника на рис. 6.

Таким, очень нетривиальным способом Архимед нашел площадь криволинейной фигуры «под параболой».

Литература

1. *Зельдович Я.Б., Яглом И.М.* Высшая математика для начинающих физиков и техников. – М.: ЛЕНАНЛ, 2019. – 512 с.

2. *Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д.* Элементы математической физики. – М.: Наука, 1973. – 352 с.

3. *Арнольд В.И.* Математическое понимание природы: Очерки удивительных физических явлений и их понимание математиками. – М.: МЦНМО, 2009. – 144 с.

4. *Арнольд В.И.* Экспериментальная математика. – М.: МЦНМО, 2018. – 184 с.

5. *Коган Б.Ю.* Физика помогает геометрии // Квант, 1971, №5, стр. 22–24.

6. *Мигдал А.Б.* Качественные методы квантовой теории. – М.: Наука, 1975. – 336 с. (стр. 9–10)

7. *Коган Б.Ю.* Размерность физической величины. – М.: Наука, 1868. – 72 с.

8. *Брук Ю.М., Стасенко А.Л.* Как физики делают оценки – метод размерностей и порядки физических величин. В книге **О современной физике – учителю**. Сборник. М.: «Знание», 1975. – 176 с. (стр. 54–131)

9. *Никифоровский В.А.* Путь к интегралу. – М.: Наука, 1985. – 190 с. (стр. 24-25)

«Что? Где? Когда?» «Что? Где? Когда?»

Ответ на вопрос № 1

В приведенной последовательности записаны первые буквы цифр (или чисел): единица, два, три, четыре. Следующая буква в приведенной последовательности – п (пять).

Ответ на вопрос № 2

Когда указанные действия выполняются в двоичной системе счисления ($1001_2 = 9_{10}$, $11_2 = 3_{10}$, $1001_2 : 11_2 = 11_2$).

Ответ на вопрос № 3

«Плюсовая» и «минусовая».

(Вопросы на странице 10)

Материал подготовил Д.М. Златопольский