Захарова Татьяна Валерьевна
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической статистики факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова.

Элементарные основы теории вероятностей

Теория вероятностей в школе

Преподавание теории вероятностей в школе вызывает определённые сложности, и прежде всего в связи с новизной и необычностью курса. В то же время при сдаче ЕГЭ по математике задача по теории вероятностей является обязательной и содержится в обоих уровнях: базовом и профильном. В большинстве школ теория вероятностей не является отдельным предметом, под её изучение выделяются часы курса алгебры. Учитывая объёмность учебников по теории вероятностей, довольно сложно в этих условиях изучить начальные основы предмета и научить школьников грамотно применять теоретические знания для решения задач.

С другой стороны, интерес к изучению случайных явлений растёт. Умение прогнозировать, рассчитывать риски, строить оценки на основе накопленных наблюдений являются важной составляющей успеха в работе и обыденной жизни. Например, перед покупкой лотерейного билета полезно не только знать величину максимального выигрыша со многими нулями, но и уметь рассчитать вероятность такого выигрыша (со многими нулями).

Школьные знания по теории вероятностей являются первой ступенькой более глубокого изучения этого предмета в вузах.

*1 к 11,5 млн
быть атакованным акулой*

Классическое определение вероятности

Первоначальной и наиболее простой моделью понятия вероятности является классическая модель, в которой вероятность определялась на основе опыта и имела смысл частоты.

Введём классическое определение вероятности. Для этого рассмотрим случайный эксперимент, который может заканчиваться одним из n возможных исходов. Эти исходы эксперимента называются *элементарными событиями* и обозначаются греческой буквой омега; n различных элементарных исходов обозначаются как ω_i для $i = 1, 2, \ldots, n$.

Каждому ω_i ставится в соответствие число $p(\omega_i) = \frac{1}{n}$, называемое вероятностью осуществления элементарного события ω_i.

В этом случае $p(\omega_1) = p(\omega_2) = \ldots = p(\omega_n) = \frac{1}{n}$, и поэтому говорят, что исходы ω_i равновероятны, или равновозможны.

Такая модель естественным образом возникает в случаях полного отсутствия информации при проведении эксперимента или при наличии симметрии. Например, при покупке лотерейного билета, при подбрасывании симметричной монеты или игральной кости. Здесь разумно предположить все исходы эксперимента равновозможными.

Но такая модель не подходит, например, для описания игры с фальшивыми монетами (либо несимметричными, либо с одним и тем же изображением на обеих сторонах). Возможность выигрыша у игроков становится неравной, если в игре используются кости со скошенными плоскостями или кости со смещённым центром тяжести, кости с неверной разметкой. В интеллектуальных играх возможность выигрыша больше у опытного и умного игрока. Например, в преферансе выигрыш или проигрыш определяется в большей степени умением игрока, в отличие от азартных игр. Это примеры неравновозможных исходов, и здесь классическая модель вероятности неприменима.

Перейдём к строгим определениям основных понятий теории вероятностей.

Множество всех элементарных событий $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ называется *пространством элементарных событий* и обозначается заглавной буквой омега Ω, т.е. $\Omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$.

Определение. Подмножество Ω, состоящее из некоторого (любого) числа элементарных событий ω_i, называется *событием*.

Событие, которое не содержит ни одного элементарного события, называется *невозможным событием* и обозначается символом $\varnothing$ (пустое множество).

Событие, которое содержит все элементарные исходы, т.е. само Ω, называется *достоверным событием*.

Например, в эксперименте с одним подбрасыванием монеты возможны только два элементарных события:

$$\omega_1 = (\text{выпал орёл}) \text{ и}$$
$$\omega_2 = (\text{выпала решка}).$$

Следовательно, здесь

$$\Omega = (\text{выпал орёл или решка}) \text{ –}$$

достоверное событие,

$\varnothing =$ (не выпал ни орёл, ни решка) – невозможное событие.

Перечислим все события, которые могут осуществиться в данном эксперименте:

$A_1 = \varnothing$,

$A_2 = \omega_1 =$ (выпал орёл),

$A_3 = \omega_2 =$ (выпала решка) и

$A_4 = \Omega =$ (выпал орёл или решка).

Чем больше число возможных исходов случайного эксперимента, тем больше событий можно рассмотреть. Из n исходов можно составить 2^n событий.

Элементарное событие ω, принадлежащее событию A, называется *благоприятным исходом* для A.

Определение. Вероятностью события A называется отношение числа элементарных событий, входящих в A (числа благоприятных исходов), к общему числу возможных элементарных исходов n.

Обозначим через n_A число благоприятных исходов, и пусть n – это общее число исходов, тогда

$$P(A) = \frac{n_A}{n}.$$

Такое определение вероятности называют *классическим определением*, при этом рассматриваемая модель эксперимента называется классической моделью.

Перейдём к рассмотрению задач. Сначала рассмотрим задачи, которые удобно решать с помощью перебора всех исходов эксперимента.

Задача 1. Игральная кость бросается 2 раза. Какова вероятность события A (сумма выпавших очков равна 3)? Результат округлите до тысячных.

Решение. Возможны только 2 благоприятных исхода: первый раз выпадает 1, а второй раз – 2; первый раз выпадает 2, а второй раз – 1. Поэтому $n_A = 2$. Всего же исходов $n = 36$.

Перечислим всевозможные исходы:
(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),
(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),
(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),
(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),
(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6),
(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6).

Значит,

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18},$$

$$P(A) \approx 0{,}051.$$

Задача 2. Монета подбрасывается 2 раза. Найдите вероятность события A (решка выпадет только 1 раз).

Решение. Обозначим через O выпадение «орла», P – «решки».

Всего исходов подбрасывания монеты четыре: $(P,\ P)$, $(P,\ O)$, $(O,\ P)$, $(O,\ O)$.

Благоприятных исходов два: $(P,\ O)$, $(O,\ P)$.

Следовательно,

$$P(A) = \frac{2}{4} = 0{,}5.$$

Задача 3. В корзине 30 грибов, 3 из них белые. Какова вероятность события A (случайно выбранный гриб окажется белым)?

Решение. Всего исходов 30. Благоприятных исходов 3.

$$P(A) = \frac{3}{30} = 0{,}1.$$

Задача 4. Из ящика, содержащего 10 карточек с номерами от 0 до 9, извлекается наугад одна. Какова вероятность события A (извлечена карточка с чётным номером)?

Решение. Всего исходов извлечения карточки 10, т.к. может быть извлечена любая карточка с номером от 0 до 9.

Перечислим благоприятные исходы: это любая из карточек с номерами 0, 2, 4, 6, 8. Всего 5 таких карточек. Следовательно,

$$P(A)=\frac{5}{10}=0{,}5.$$

Задача 5. Какова вероятность события A (случайно выбранное натуральное число от 1 до 30 делится на 5)?

Решение. Всего исходов выбора натурального числа – 30. Благоприятных исходов – 6. Это 5, 10, 15, 20, 25, 30. Значит,

$$P(A)=\frac{6}{30}=0{,}2.$$

Задача 6. Игральный кубик бросили 2 раза. Сколько исходов принадлежат событию A (сумма выпавших очков равна 8)?

Решение. Исход ω представим в виде вектора $\omega=(\omega_1,\omega_2)$, где каждое ω_i может принимать любое целое значение от 1 до 6. Опишем событие A.

$A=(\omega:\omega_1+\omega_2=8)$. Значит,

$A=(2;\,6),\,(6;\,2),\,(5;\,3),\,(3;\,5),\,(4;\,4)$.

Всего 5 исходов.

Задача 7. Трёхтомник сочинений М.Ю. Лермонтова в случайном порядке слева направо ставят на полку. Какова вероятность события A (первый том окажется после второго и третьего)?

Решение. Элементарным событием в данном эксперименте является вектор $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$, являющийся перестановкой чисел (1, 2, 3). Всего таких исходов 3! = 6.

Благоприятных исходов 2: (2, 3, 1) и (3, 2, 1). Значит,

$$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Задача 8. В корзине 30 грибов, из них 5 белых, 10 лисичек, 3 подберёзовика, а остальные несъедобные. Какова вероятность события A (случайно выбранный гриб съедобный)?

Решение. Всего исходов 30. Благоприятных 5 + 10 + 3 = 18.

Следовательно,

$$P(A)=\frac{18}{30}=0{,}6.$$

Вычисление вероятности дополнительного события

Определение. Событие $\overline{A}$ называется дополнительным к событию A, если оно является отрицанием события A, т.е. содержит все элементарные события, не принадлежащие A.

Например:

A (выпадает чётная грань игральной кости),

$\overline{A}$ (выпадает нечётная грань).

Очевидно, что $A\cup\overline{A}=\Omega$.

Иногда бывает трудно вычислить вероятность события A, но достаточно просто посчитать вероятность $\overline{A}$, тогда $P(A)$ вычисляется по формуле:

$$P(A)=1-P(\overline{A}).$$

Рассмотрим следующий пример.

Пример. Монета подбрасывается 3 раза. Какова вероятность события A (хотя бы 1 раз выпадет орёл)?

Решение. Дополнительным событием является событие

$\overline{A}=$ (ни разу не выпадет O),

т.е. $\overline{A}=(P,\,P,\,P)$ – все 3 раза выпала решка.

Всего число исходов при трёх подбрасываниях монеты будет равно $2^3=8$. Благоприятных для $\overline{A}$ только 1. Значит,

$$P(\overline{A})=\frac{1}{8}=0{,}125.$$

Поэтому

$$P(A)=1-0{,}125=0{,}875.$$

Задача 9. В аквариуме 15 рыбок. Из них 9 жёлтых, остальные красные. Кот залез на стол, где стоит аквариум, и лапой вытащил рыбку. Какова вероятность события A (кот вытащил красную рыбку)?

Решение. Всего 15 рыбок. Красных рыбок $15 - 9 = 6$.

Поэтому

$$P(A) = \frac{6}{15} = 0{,}4.$$

Перебором элементарных событий не всегда удобно пользоваться, а иногда и невозможно. В этих случаях применяют одно из основных правил комбинаторики – правило умножения.

Правило умножения

Обозначим через n число векторов $\omega = (\omega_1, \omega_2)$. И пусть для выбора компоненты ω_1 существует N_1 способов, а для выбора компоненты ω_2 существует N_2 способов. Тогда

$$n = N_1 \times N_2.$$

Отметим, что это правило обобщается на любой многомерный вектор.

Задача 10. Симметричную монету бросили 3 раза. Найти вероятность события $A = (P, O, P)$ – первый раз выпала «решка», второй раз выпал «орёл», и третий раз выпала «решка».

Решение. В данном эксперименте элементарным событием является вектор $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, где ω_i может принимать два значения: P («решка») или O («орёл»). Всего таких исходов $n = 8 = 2^3$. Здесь мы применили правило умножения для трёхмерного вектора с $N_1 = N_2 = N_3 = 2$.

Благоприятным является только один исход (P, O, P). Поэтому

$$P(A) = \frac{1}{8} = 0{,}125.$$

Задача 11. В личном первенстве соревнуются спортсмены из России и некоторых зарубежных стран. Всего 300 спортсменов. Из зарубежных стран участвуют 240 спортсменов. Какова вероятность события A (наугад выбранный спортсмен – из России)?

Решение. Эксперимент состоит в выборе одного спортсмена из общего количества. Наугад может быть выбран любой спортсмен. Значит, всевозможных исходов 300. Число спортсменов из России равно $300 - 240 = 60$. При выборе любого из этих шестидесяти спортсменов осуществится событие A условия задачи. Поэтому число благоприятных исходов равно 60. Рассчитаем вероятность

$$P(A) = \frac{60}{300} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

Задача 12. Группу детей с вожатым, всего 64 человека, везут в летний лагерь на 4 автобусах. В каждом автобусе едет по 16 человек. Какова вероятность события A (вожатый находится в первом автобусе)?

Решение. Интуитивно понятно, что возможные варианты рассадки детей и вожатого по автобусам равновероятны, так как нет какого-то исключительного варианта, имеющего больше шансов реализоваться. Поэтому выберем наиболее простой вариант для расчёта вероятности $P(A)$. Будем считать, что вожатый садится первым и все места свободны. И только в этом предположении нижеследующее объяснение расчёта $P(A)$ будет верным!

Всего мест в автобусах 64, и вожатый может сидеть на любом из них. Событие A осуществится, если вожатый сидит на любом из 16 мест первого автобуса, значит, число благоприятных исходов равно 16. Поэтому

$$P(A)=\frac{16}{64}=0{,}25.$$

Рассмотрим второй способ решения задачи. Занумеруем все места в автобусах, а также и людей от 1 до 64.

Элементарным событием в данной задаче является 64-мерный вектор $\omega=(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{64})$, где ω_1 обозначает номер человека, сидящего на 1-м месте, ω_2 – на 2-м и т.д. По правилу умножения общее число исходов $n=64!$, а количество благоприятных исходов $n_A=16\times 63!$ Следовательно,

$$P(A)=\frac{16\times 63}{64!}=0{,}25.$$

Ответ, конечно, получился тот же, но объяснение принципиально другое.

Широкий круг задач теории вероятностей, которые должен уметь решать школьник, связан с так называемой *урновой схемой*. Урновой схемой называется комбинаторная схема, в которой происходит извлечение шаров из урны с шарами.

Под урной понимается ёмкость, содержащая одинаковые по форме и *занумерованные* шары. Случайный эксперимент состоит в выборе некоторого количества шаров из урны наугад. Выбор шаров производится в несколько этапов. На каждом этапе из урны извлекается шар, затем он либо возвращается, либо не возвращается обратно, после чего шары в урне тщательно перемешиваются. В этих условиях выбор любого из шаров, находящихся в урне, равновозможен, поэтому естественным образом применима классическая модель вероятности. Рассмотрим примеры решения задач урновой схемы.

Задача 13. В урне лежат 4 шара разного цвета: белый, синий, красный, зелёный. Наугад извлекается один из них. Какова вероятность события A (извлечён белый шар)?

Решение. Всего исходов 4. Благоприятный исход один – извлечён белый шар. Значит

$$P(A)=\frac{1}{4}.$$

Задача 14. В ящике находятся шары, различимые только цветом: 10 красных, 20 синих, 15 зелёных и 5 жёлтых. Шары извлекают по одному. Какова вероятность события A (последним будет извлечён красный шар)?

Решение. В задаче ставится вопрос о последнем шаре. Это означает, что проводится выборка без возвращения. Выборка, или элементарное событие представляет собой вектор $\omega=(\omega_1, ..., \omega_{50})$, где ω_k – номер k-го извлечённого шара. Число всевозможных выборок шаров по правилу умножения равно

$$50!=1\cdot 2\cdot ...\cdot 50.$$

В выборке шары можно считать слева направо: $\omega=(\omega_1, ..., \omega_{50})$; и наоборот, справа налево: $\bar{\omega}=(\omega_{50}, ..., \omega_1)$. Перенумерация компонент вектора никак не влияет на возможность осуществления события. Но каждому ω, у которого последняя компонента ω_{50} равна номеру некоторого красного шара, соответствует $\bar{\omega}$, где уже ω_{50} является первой компонентой.

Поэтому число выборок, составляющих событие (красный шар извлечён последним), совпадает с числом выборок, составляющих событие (красный шар извлечён первым), а значит, и вероятности этих событий совпадают. Извлечь красный шар первым можно 10 вариантами. Количество вариантов извлечения первого шара равно сумме $10 + 20 + 15 + 5 = 50$. Поэтому

$$P(A)=\frac{10}{50}=0{,}2.$$

Задача 15. Требуется разложить 25 шаров, из которых 24 чёрных и 1 белый, по 5 ящикам. В случайном порядке в первые 3 ящика кладут по 5 шаров, остальные шары раскладывают поровну в четвёртый и пятый ящики. Какова вероятность события A (белый шар попадёт в пятый ящик)?

Решение. В первых трёх ящиках находятся 15 шаров. Оставшиеся $25-15=10$ раскладывают поровну в четвёртый и пятый ящики. Значит, в пятый ящик попадет $\frac{10}{2}=5$ шаров. Число всевозможных равновероятных размещений шаров по ящикам равно

$$25!=1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 25.$$

Число благоприятных исходов равно

$$24!\cdot 5.$$

Следовательно,

$$P(A)=\frac{24!\cdot 5}{25!}=0{,}2.$$

Рассмотрим второй способ решения задачи.

Будем считать, что шары не занумерованы, а отличаются только цветом. Тогда размещения отличаются друг от друга только расположением белого шара и также равновероятны. Всего размещений 25, считаем по числу мест, на которых может оказаться белый шар. Число мест в пятом ящике равно 5, это и есть число благоприятных исходов.

Следовательно,

$$P(A)=\frac{5}{25}=0{,}2.$$

Задача 16. В мешок положили 6 красных, 6 синих и 8 белых шаров. Затем из мешка, не глядя, извлекают по одному шару. Какова вероятность события A (седьмым будет извлечён белый шар)?

Решение. Выборка или элементарное событие в данном эксперименте представляет собой вектор $\omega=(\omega_1, \ldots, \omega_{20})$, где ω_k – номер k-го извлечённого шара. Число всевозможных выборок шаров по правилу умножения равно

$$20!=1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 20.$$

Рассмотрим следующие выборки $\omega=(\omega_1, \ldots, \omega_{20})$, где седьмая компонента ω_7 равна какому-либо номеру белого шара. Каждой такой выборке можно поставить в соответствие выборку $\bar{\omega}=(\omega_7, \omega_8, \ldots, \omega_{20}, \omega_1, \ldots, \omega_6)$, в которой первые шесть компонент переставлены после двадцатой компоненты. Поэтому число выборок, составляющих событие (седьмым будет извлечён белый шар), совпадает с числом выборок, составляющих событие (первым будет извлечён белый шар), а значит, и вероятности этих событий совпадают.

Исходный случайный эксперимент заменяем на эквивалентный более простой, где элементарным событием является номер один раз извлечённого шара.

Найти вероятность события (первым будет извлечён белый шар) не составляет труда. Число белых шаров 8, это и есть количество благоприятных исходов. Всего шаров 20. Поэтому

$$P(A)=\frac{8}{20}=0{,}4.$$

Часто встречаются задачи, связанные с играми. Причём равновероятность исходов игры неочевидна. Существуют игры, в которых шансы выиграть больше у тех, кто делает первый ход, например: шахматы, крестики-нолики, бридж-ит, гекс. Есть игры, где более вероятен выигрыш второго игрока. Поэтому возможность применения классической модели вероятности в таких задачах требует обоснования.

Задача 17. В урне находится 3 чёрных и 1 белый шар. Четверо игроков по очереди извлекают по одному шару. Выигравшим считается тот, кто извлёк белый шар. Какова вероятность события *A* (третий игрок выиграл)?

Решение. В задаче не сказано, что извлечённый шар возвращается обратно, поэтому считаем, что производится выборка без возвращения.

1-й способ. Занумеруем шары от 1 до 4, и пусть белый шар будет иметь номер b. Элементарным событием в этом эксперименте является вектор $\omega=(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$, где ω_i – номер шара при i-м извлечении, $\omega_i \neq \omega_j$ для $i \neq j$. Всего таких векторов $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=4!$

Благоприятные исходы для события A имеют вид $(\omega_1, \omega_2, b, \omega_4)$, и их число равно $3\cdot 2\cdot 1=3!$. Значит,

$$P(A)=\frac{3!}{4!}=\frac{1}{4}.$$

2-й способ. Способ нумерации шаров никак не повлияет на исход эксперимента. Пусть белый шар имеет некоторый номер b. Шары одинаковы по форме и извлекаются наугад. Белый шар с номером b извлекается равновероятно каждым из игроков. Если бы это было не так, например, белый шар извлекается чаще первым игроком, то, перенумеровав шары, мы бы получили, что уже чёрный шар извлекается чаще первым игроком. Полученное противоречие доказывает равновероятную возможность извлечения белого шара каждым из игроков.

Пусть событие A_i означает, что i-й игрок достал белый шар. Эти события, очевидно, одновременно не могут произойти. Мы доказали, что

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=P(A_4).$$

Достоверным событием является извлечение белого шара первым или вторым, или третьим, или четвёртым игроком. Следовательно,

$$P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+P(A_4)=1.$$

Учитывая равенство слагаемых, получаем более полный ответ:

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=P(A_4)=\frac{1}{4}.$$

Задача 18. 300 человек случайным образом разбиваются на три группы: первые 2 группы по 120 человек и третья из 60 человек. Какова вероятность оказаться в третьей группе?

Решение. Всего возможных мест 300. Равновероятно можно оказаться на любом из этих мест, и эта вероятность равна $\frac{1}{300}$ (доказательство, как в задаче 17). Оказаться в третьей группе можно 60 вариантами. Значит, искомая вероятность равна

$$\frac{60}{300}=0{,}2.$$

Задача 19. В шахматном турнире участвует 56 спортсменов. 12 из них являются мастерами спорта, в том числе Пётр. Всех спортсменов разделим на пары для проведения игр. Какова вероятность события *A* (Пётр будет играть с мастером спорта)?

Решение. Пётр может играть равновероятно с любым из остальных 55 игроков с вероятностью $\frac{1}{55}$. Игры, в которых в паре с Петром играет любой из остальных 11 мастеров спорта, составляют событие *A*. Поэтому, просуммировав вероятности таких 11 игр, получим

$$P(A)=\frac{11}{55}=0{,}2.$$

Задача 20. В ящике лежат 5 шаров разного цвета, и среди них есть белый шар. Наугад извлекается 2 шара. Какова вероятность события A (белый шар будет извлечён)?

Решение. При извлечении шаров сначала можно достать любой из 5 шаров, а затем любой из 4 шаров. Поэтому всего возможных исходов $5 \cdot 4 = 20$.

Подсчитаем благоприятные исходы. Их можно представить в виде (Б,*) или (*, Б), где «Б» означает, что извлечён белый шар, а символ «*» обозначает любой извлечённый шар не белого цвета. Исходов (Б,*) ровно 4. Поэтому всего благоприятных исходов будет 4 + 4 = 8. Значит

$$P(A) = \frac{8}{20} = 0{,}4.$$

Задача 21. Сорок участников соревнований делятся на 2 группы по 20 человек. Какова вероятность события A (два сильнейших участника окажутся в одной группе)? Результат округлите до сотых.

Решение. Занумеруем места в группах с 1 по 40. Первый сильнейший участник может попасть на любое из 40 мест, а второй на любое из оставшихся. Поэтому всего возможных исходов $40 \cdot 39$. При благоприятных исходах первый сильнейший попадает на любое из 40 мест, а второй – на любое из оставшихся 19 мест той группы, где находится первый участник. Число благоприятных исходов равно $40 \cdot 19$. Поэтому

$$P(A) = \frac{40 \cdot 19}{40 \cdot 39} = \frac{19}{39} \approx 0{,}49.$$

Задача 22. За круглый стол на 6 стульев в произвольном порядке рассаживаются 4 мальчика и 2 девочки. Какова вероятность события A (обе девочки будут сидеть рядом)?

Решение. Построим вероятностную модель эксперимента. Занумеруем детей некоторым образом, например по алфавиту. А также занумеруем стулья подряд от 1 до 6 по часовой стрелке, выбирая первый произвольно. Тогда элементарным исходом ω является вектор

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6),$$

где ω_1 означает номер стула, на который сел первый ребёнок, ω_2 – номер стула, на который сел второй ребёнок и так далее.

Подсчитаем количество всевозможных вариантов рассаживания детей, т.е. общее число n элементарных исходов ω. Первый ребёнок может сесть на любой из шести стульев, а значит, ω_1 может быть любым из чисел от 1 до 6, т.е. для ω_1 возможны 6 значений. Второй ребёнок может сесть на любой из оставшихся пяти стульев, поэтому $\omega_2 \in (1,2,3,4,5,6) \setminus \omega_1$, т.е. для ω_2 возможны уже 5 значений. Рассуждая далее аналогичным образом, мы получим, что для ω_3 возможны 4 значения, для ω_4 – 3 значения, для ω_5 – 2 значения и для ω_6 – 1 значение, последний садится на то место, которое осталось свободным.

Применяя правило умножения, получаем общее число исходов n, т.е. количество возможных элементарных исходов ω, или, что то же самое, количество вариантов рассаживания

$$n = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!.$$

Подсчитаем теперь количество благоприятных исходов n_A события A (обе девочки будут сидеть рядом).

Событие A осуществится, если девочками будут заняты 2 соседних стула. Это могут быть стулья с номерами 1,2, или 2,3, или 3,4, или 4,5, или 5,6, или 6,1. Как видим, таких вариантов выбора соседних стульев ровно 6.

На два соседних стула девочки могут сесть 2! способами, так как они могут пересаживаться между собой на выбранных стульях. На оставшиеся 4 стула мальчики рассаживаются 4! способами, так как они также могут пересаживаться между собой на выбранных стульях.

Таким образом, перемножая количество вариантов выбора соседних стульев, количество вариантов рассаживания девочек и количество вариантов рассаживания мальчиков, получим количество вариантов рассаживания детей, когда девочки сидят рядом.

Это и есть количество благоприятных исходов n_A события A:

$$n_A = 6 \cdot 2! \cdot 4!.$$

Теперь осталось найти вероятность события A.

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{6 \cdot 2! \cdot 4!}{6!} = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

Замечание. Предлагаемый способ решения задачи легко обобщается на случай, когда ищется вероятность события (три и более определённых человека сидят вместе рядом).

Часто без объяснения, но по интуиции правильно пользуются другим подходом: делят число благоприятных (сложных) событий на все (сложные), но события не являются элементарными событиями. Это не всегда верный путь. Покажем, при каких условиях можно пользоваться формулой расчёта вероятностей, аналогичной классической формуле вероятности.

Пусть общее число элементарных событий ω равно n и оно представимо в виде произведения натуральных чисел $n = m \cdot k$. Пусть все элементарные события равновероятны. Образуем события $B_1, ..., B_m$, каждое из которых содержит по k различных ω. Таким образом, B_i не пересекаются и в объединении дают достоверное событие Ω. События B_i равновероятны

$$P(B_i) = \cdots = P(B_m) = \frac{k}{n}.$$

Если событие A является объединением некоторых B_i, например первых r, $A = B_1 \cup ... \cup B_r$, тогда

$$P(A) = P(B_i) + \cdots + P(B_r) = r \cdot \frac{k}{n}.$$

Учитывая, что $n = m \cdot k$, получаем окончательную формулу

$$P(A) = \frac{r}{m}.$$

Отметим еще раз, что m – это общее количество элементов группы событий $(B_1, ..., B_m)$, а r – число событий B_i, составляющих событие A.

Применим полученную формулу для решения задачи 22.

2-й способ решения задачи 22.

Дети рассаживаются за круглый стол. Две девочки могут сесть на любые два места. Число таких мест равно $C_6^2 = 15$. Число пар соседних мест равно 6. Отсюда

$$P(A) = \frac{6}{15} = 0{,}4.$$

Здесь B_i – это событие (девочки заняли некоторые два места). Всевозможные события B_i равновероятные, не пересекаются и в объединении дают достоверное событие Ω (девочки займут два места). Числа $m = 15$, $r = 6$ не равны соответственно числам n и n_A.

Задача 23. Фабрика детской игрушки производит конструкторы. В среднем на 98 качественных конструкторов приходится 2 бракованных. Какова вероятность события A (купленный конструктор оказался бракованным)?

Решение. В условии задачи слова «в среднем» означают необходимость применения классического определения вероятности.

Но особенностью данной задачи является завуалированность общего числа исходов, что может привести к неверному решению.

Условие задачи надо понимать так, что из выбранных наугад 100 конструкторов 98 являются качественными, а остальные 2 – бракованными.

Поэтому число благоприятных исходов n_A для события A равно 2, а общее число исходов n равно 100.

По определению классической вероятности получим искомую вероятность

$$P(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{2}{100}=0{,}02.$$

Задача 24. В среднем на каждые 98 стандартных изделий приходится 2 бракованных. Какова вероятность события A (случайно выбранное изделие стандартное)?

Решение. Благоприятных исходов 98. Всего исходов выбора изделия 100 = 98 + 2. Значит

$$P(A)=\frac{98}{100}=0{,}98.$$

Литература

1. *Захарова Т. В.* Задачи по теории вероятностей с решениями. Учебное пособие для школьников. 4-е издание. – М.: «Альтекс», 2017. – 64 с.

Калейдоскоп Калейдоскоп Калейдоскоп

Редактирование человека

Учёные разработали способ редактирования генов с помощью систем CRISPR/Cas9. Что это такое? Наследственные заболевания вызваны тем, что в геноме пациента, который состоит из 6 миллиардов «букв»-нуклеотидов, допущена одна «опечатка». Для сравнения представьте себе Большую Советскую Энциклопедию, попробуйте найти в ней ту самую одну-единственную опечатку и исправить её, не повреждая книгу. Мудрёная задача? То-то же! Однако с помощью новой технологии генетики могут быстро найти бракованный фрагмент ДНК и заменить повреждённый фрагмент на здоровый. Метод в принципе готов к клиническому использованию, однако между разработчиками – Калифорнийским университетом в Беркли и частным Институтом Броада развернулась битва за право обладания патентом, который сулит миллиардные прибыли. В 2017 году суд должен вынести решение и дать зелёный свет «редактированию» человека.