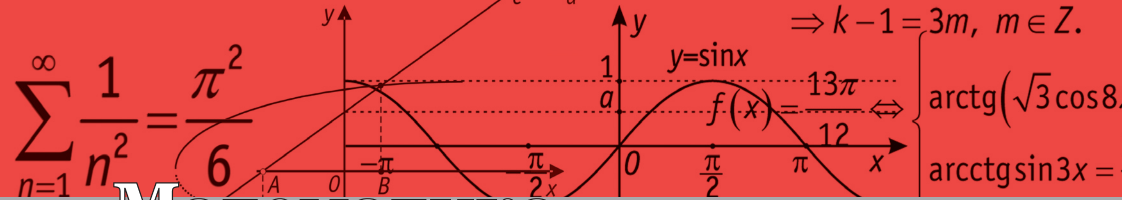

Колесникова Софья Ильинична
Старший преподаватель кафедры высшей математики Московского физико-технического института (МФТИ), специалист Заочной физико-технической школы (ЗФТШ) при МФТИ. Окончила Московский государственный университет (МГУ), имеет большой опыт работы со старшеклассниками, автор пособий «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ», «Решение сложных задач ЕГЭ».

Экономические задачи на оптимизацию (17 задача ЕГЭ) без применения дифференцирования

Статья посвящена двум аспектам. Во-первых, нас заинтересовали не совсем понятные или даже совсем непонятные для школьников формулировки условий некоторых задач ЕГЭ.

Во-вторых, представленные в ЕГЭ задачи на оптимизацию многие школьники (и не только школьники) стараются решить с помощью производных, а мы сведём всё к исследованию квадратного трёхчлена.

Эту статью можно рассматривать как дополнение к статье автора «Новые текстовые задачи ЕГЭ», опубликованной в 11 номере нашего журнала за 2015 г.

Задачи, в которых ищем экстремум линейной функции

Пример 1. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 27 кв. метров и номера «люкс» площадью 45 кв. метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, равна 855 кв. метров. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами так, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2 000 рублей в сутки, а «люкс» – 3 000 рублей в сутки. Какую наибольшую прибыль в сутки может заработать на своём отеле предприниматель?

Решение. Пусть предприниматель сделает m стандартных номеров и k номеров «люкс». Тогда их площадь составит $27m + 45k = 855$ кв. метров. Исследуем уравнение, учитывая, что m и k целые числа:

$$27m + 45k = 855 \Leftrightarrow 3m + 5k = 95 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3m = 5(19 - k),$$

m делится на 5, т. е.

$$m = 5l \Rightarrow 19 - k = 3l \Leftrightarrow k = 19 - 3l.$$

Так как $m \geq 0 \Leftrightarrow l \geq 0$, $k \geq 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 19 - 3l \geq 0 \Leftrightarrow l \leq 6$, $l \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что максимальное значение m равно 30, тогда k равно 1. Следовательно, прибыль в сутки может составить

$$S_{\max} = 30 \cdot 2000 + 3000 = 63000.$$

Ответ. 63 000 руб.

Пример 2. У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу. Поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле 300 центнеров с гектара, а на втором – 200 центнеров с гектара. Урожайность свёклы на первом поле 200 центнеров с гектара, а на втором – 300 центнеров с гектара. Фермер может продавать картофель по 4000 рублей за центнер, а свёклу – по 5000 рублей за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

Решение. Пусть на первом поле x га отведено под картофель, $(10 - x)$ га под свёклу, а на втором поле y га под картофель, $(10 - y)$ га под свёклу. Тогда доход от продаж равен S рублей:

$$(300x + 200y)4000 + (200(10 - x) +$$
$$+300(10 - y))5000 = S \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (3x + 2y)4 + \left(2(10 - x) + 3(10 - y)\right)5 =$$
$$= 10^{-5}S \Leftrightarrow 2x - 7y = 10^{-5}S - 250.$$

Наибольший доход будет, если $x = 10$, $y = 0$. Тогда $S_{\max} = 27000000$.

Ответ. 27 000 000 руб.

Пример 3. На каждом из двух комбинатов изготавливают детали А и В. На первом комбинате работают 40 человек. Один человек изготавливает за смену 15 деталей А или 5 деталей В. На втором комбинате работают 160 человек, и один человек изготавливает за смену 5 деталей А или 15 деталей В. Оба комбината поставляют детали на завод, где собирают изделие, для которого нужно 2 детали А и 1 деталь В. При этом комбинаты договорились между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее число изделий. Сколько изделий за смену при таких условиях может собрать завод?

Решение. Пусть на первом комбинате m человек производят детали А, они сделают $15m$ деталей А. Тогда остальные $40 - m$ человек сделают $(40 - m)5$ деталей В. На втором комбинате сделают $5k$ деталей А и $(160 - k)15$ деталей В. Соотношение между количеством деталей А и В в изделии $2:1$. Поэтому количество изделий равно $N = \dfrac{15m + 5k}{2}$ и

$$\frac{15m + 5k}{2} = (40 - m)5 + (160 - k)15 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3m + k = (40 - m)2 + (160 - k)6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5m + 7k = 1040 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 7k = 5(208 - m), k \in \mathbb{N} \Rightarrow$$
$$k = 5n, m = 208 - 7n.$$

Так как

$$k \geq 0 \Leftrightarrow n \geq 0, m \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 208 - 7n \geq 0 \Rightarrow 0 \leq n \leq 29 \text{ и}$$

$40 - m = 40 - 208 + 7n \geq 0 \Leftrightarrow n \geq 24$, а

$$N = \frac{15(208 - 7n) + 25n}{2} = 1560 - 40n.$$

Но $n \geq 24$, поэтому

$$N_{\max} = 1560 - 40 \cdot 24 = 600.$$

Ответ. 600.

Задачи на исследование условного экстремума, которые сводятся к исследованию дискриминанта квадратного трёхчлена

В этих задачах необходимо найти минимум или максимум функции двух переменных

$$z(x,y) = \alpha x + \beta y$$

при условии, что $ax^2 + by^2 = \text{const}$. Выразив x или y из соотношения $z = \alpha x + \beta y$, подставляем в уравнение

$$ax^2 + by^2 = \text{const}$$

и получаем квадратный трёхчлен с параметром z.

Пример 4. Антон является владельцем двух заводов с одинаковым технологическим оборудованием в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары. Если рабочие на заводе, расположенном в одном из городов, трудятся *суммарно* t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара. За каждый час рабочим на первом заводе Антон платит 250 рублей, а рабочим на втором заводе Антон платит 200 рублей. Антон готов платить всем рабочим в неделю 900 000 рублей. Какое наибольшее количество единиц товара рабочие сделают за неделю?

Решение. Пусть на первом заводе рабочие трудятся *суммарно* x^2 часов в неделю, а на втором заводе y^2 часов. Тогда им заплатят $250x^2 + 200y^2$ рублей. При этом первый завод произведёт x, $x \ge 0$, единиц товара, а второй y, $y \ge 0$, единиц, а вместе $z(x,y) = x + y$. Нужно найти наибольшее значение $z = x + y$ при условии, что

$$900000 = 250x^2 + 200y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 18000 = 5x^2 + 4y^2.$$

Выразим y через x и z и подставим в уравнение $18000 = 5x^2 + 4y^2$:

$$18000 = 5x^2 + 4y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 18000 = 5x^2 + 4(z-x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 - 8zx + 4z^2 - 18000 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4z \pm \sqrt{16z^2 - 36z^2 + 18000 \cdot 9}}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -20z^2 + 18000 \cdot 9 \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^2 \le 900 \cdot 9 \Rightarrow z_{\max} = 90.$$

Ответ. 90.

Задачи, в которых, прежде всего, надо понять условие. А потом опять… квадратный трёхчлен

Пример 5. На каждом из двух комбинатов работают по 1800 человек и изготавливают детали А и В. На первом один человек изготавливает за смену 1 деталь А или 2 детали В. На втором для изготовления t деталей (и А, и В) требуется t^2 человеко-смен. Оба комбината поставляют детали на завод, где собирают изделие, для которого нужна или одна деталь А, или одна деталь В. При этом комбинаты договорились между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее число изделий. Сколько изделий за смену при таких условиях может собрать завод?

Решение. Пусть на первом комбинате m человек делают детали А, они сделают m деталей А. Тогда остальные $1800-m$ человек сделают $2(1800-m)$ деталей В. Всего будет сделано $m+2(1800-m)=3600-m$ деталей. Столько же, по условию, из них можно сделать изделий. Видно, что максимум равен 3600.

Что такое человеко-смена? Если говорят, что на производство чего-то затрачено z человеко-смен – это может быть, что z человек работают в течение одной смены: $z\cdot 1$. Это может быть и так, что один человек работает z смен: $1\cdot z$. Это может быть, что $\frac{z}{2}$ человек работают 2 смены: $\frac{z}{2}\cdot 2$ и т. д.

Пусть на втором комбинате в одну смену x деталей А делают x^2 человек ($x^2\cdot 1$ человеко-смен) и y деталей В делают y^2 ($y^2\cdot 1$ человеко-смен) человек. Из этих деталей, по условию, получится $N=x+y$ изделий. Итак, надо найти максимум N при условии, что $x^2+y^2=1800$:

$$\begin{cases} x+y=N, \\ x^2+y^2=1800 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=N, \\ x^2+(N-x)^2-1800=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=N, \\ x=\dfrac{N\pm\sqrt{-N^2+3600}}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow N^2\le 3600 \Leftrightarrow N\le 60. \end{cases}$$

Решение задачи существует при $N\le 60$, т. е. при $N_{\max}=60$. Общее количество деталей, а значит, и изделий равно $3600+60=3660$.

Ответ. 3660.

Пример 6. На каждом из двух комбинатов работают по 20 человек и изготавливают детали А и В. На первом комбинате один человек изготавливает за смену 2 детали А или 2 детали В. На втором для изготовления t деталей (и А, и В) требуется t^2 человеко-смен. Оба комбината поставляют детали на завод, где собирают изделие, для которого нужны одна деталь А и одна деталь В. При этом комбинаты договорились между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее число изделий. Сколько изделий за смену при таких условиях может собрать завод?

Решение. Пусть на первом комбинате за смену m человек делают детали А, они сделают $2m$ деталей А. Тогда остальные $20-m$ человек сделают $2(20-m)$ деталей В. Пусть на втором комбинате за смену делают x деталей А. Для этого требуется $x^2\cdot 1$ человеко-смен, т. е. x^2 человек. Пусть на втором комбинате за смену делают y деталей В. Для этого требуется y^2 человеко-смен, т. е. y^2 человек. Всего работает $x^2+y^2=20$ человек.

Для изделия нужна одна деталь А и одна деталь В. Если используют все детали, сделанные за смену на двух комбинатах, и только их (о чём не говорится в условии), то

$$N=2m+x=2(20-m)+y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4m=40+y-x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m=10+0,25y-0,25x.$$

$$N=2m+x=20+0,5y+0,5x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+\left(N-20-\frac{1}{2}x\right)^2 4-20=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+(2N-40-x)^2-20=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-2x(2N-40)+(2N-40)^2-20=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=-(2N-40)^2+40\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2N-40)^2\leq 40\Rightarrow N\leq 20+\sqrt{10}.$$

Получаем $N_{\max}=20+\sqrt{10}$ – число явно не целое!

Но $N_{\max}\in\mathbb{N}$. Поэтому $N_{\max}=23$.

Ответ. 23.

Пример 7. В двух областях есть по 50 рабочих, каждый из которых готов трудиться 10 часов в сутки на добыче алюминия и никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,2 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где производится сплав, в котором на 1 кг алюминия приходится 2 кг никеля. При этом области договорились между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько кг сплава сможет произвести ежедневно завод при таких условиях?

Решение. Пусть в первой области алюминий добывают m человек, а никель $(50-m)$ человек. Тогда за 10 часов они добудут $10m\cdot 0,2$ кг алюминия и $10(50-m)\cdot 0,1$ кг никеля.

Пусть во второй области добывают x кг алюминия в день. Для этого требуется x^2 человеко-часов. Но в день рабочие трудятся 10 часов, значит, $x^2=\frac{x^2}{10}\cdot 10$, а потому на добыче x кг работает $\frac{x^2}{10}$ человек в день.

Пусть во второй области добывают y кг никеля в день. Для этого требуется y^2 человеко-часов. Но в день рабочие трудятся 10 часов, значит, $y^2=\frac{y^2}{10}\cdot 10$, и на добыче y кг никеля работает $\frac{y^2}{10}$ человек в день. Всего работает $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{10}=50$ человек. Для получения сплава надо, чтобы никеля было вдвое больше алюминия, то есть

$$2N=(10m\cdot 0,2+x)2=$$

$$=10(50-m)\cdot 0,1+y\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2m+x)2=(50-m)+y\Leftrightarrow 5m=$$

$$=50+y-2x\Leftrightarrow m=10+0,2y-0,4x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow N=2m+x=20+0,4y+0,2x.$$

Так как

$$N=2m+x=20+0,4y+0,2x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}(5N-100-x),$$

то после подстановки в соотношение

$$\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{10}=50\Leftrightarrow x^2+y^2=500$$

получим квадратное уравнение с параметром N:

$$4x^2+(5N-100-x)^2-500\cdot 4=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x^2-2x(5N-100)+(5N-100)^2-$$

$$-500\cdot 4=0\Rightarrow$$

$$D=-4(5N-100)^2+500\cdot 4\cdot 5\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (5N-100)^2\leq 500\cdot 5\Leftrightarrow$$

$$5N-100 \le 50 \Leftrightarrow N \le 30.$$

Отсюда следует, что $N_{\max} = 30$ кг, а масса всех сплавов равна 90 кг.

Ответ. 90.

И опять без производных ...

Пример 8. В начале 2001 года Алексей приобрёл ценную бумагу за 7 тыс. рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 2 тыс. рублей. В любой момент Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10%. В течение какого года после покупки Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через тридцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

Решение. Решим задачу в общем виде. Пусть бумага приобретена за A рублей, а её цена каждый год возрастает на B рублей. Тогда через k лет её цена равна $(A+kB)$ рублей. Сумма на счёте, если деньги положить в банк, растёт на $q\%$. Продать и положить деньги в банк будет выгодно тогда, когда прирост на проценты будет больше B, т. е.

$$(A+kB)\frac{q}{100} \ge B \Leftrightarrow \frac{A}{B}+k \ge$$
$$\ge \frac{100}{q} \Leftrightarrow k \ge \frac{100}{q}-\frac{A}{B}.$$

В нашем случае: $k \ge \frac{100}{10}-\frac{7}{2}=6{,}5.$

Ответ. В 2008 году.

Задачи для самостоятельного решения

1. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 27 кв. метров и номера «люкс» площадью 45 кв. метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, равна 981 кв. метров. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами так, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2 000 рублей в сутки, а «люкс» 4 000 рублей в сутки. Какую наибольшую прибыль в сутки может заработать на своём отеле предприниматель?

Ответ. 86 000.

2. У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу. Поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле 500 центнеров с гектара, а на втором 300 центнеров с гектара. Урожайность свёклы на первом поле 300 центнеров с гектара, а на втором 500 центнеров с гектара. Фермер может продавать картофель по 5 000 рублей за центнер, а свёклу по 8 000 рублей за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

Ответ. 65 000 000.

3. На каждом из двух комбинатов изготавливают детали А и В. На первом комбинате работают 40 человек. Один человек изготавливает за смену 5 деталей А или 15 деталей В. На втором комбинате работают 100 человек, и один человек изготавливает за смену 15 деталей А или 5 деталей В. Оба комбината поставляют детали на завод, где собирают изделие, для которого нужно 2 детали А и 1 деталь В. При этом комбинаты договорились между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее число изделий. Сколько изделий за смену при таких условиях может собрать завод?

Ответ. 660.

4. На каждом из двух комбинатов работают по 200 человек и изготавливают детали А и В. На первом комбинате один человек изготавливает за смену 1 деталь А или 3 детали В. На втором комбинате для изготовления t деталей (и А, и В) требуется t^2 человеко-смен. Оба комбината поставляют детали на завод, где собирают изделие, для которого нужна или одна деталь А, или одна деталь В. При этом комбинаты договорились между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее число изделий. Сколько изделий за смену при таких условиях может собрать завод?

Ответ. 620.

5. На каждом из двух комбинатов работают по 100 человек и изготавливают детали А и В. На первом комбинате один человек изготавливает за смену 3 детали А или 1 деталь В. На втором комбинате для изготовления t деталей (и А, и В) требуется t^2 человеко-смен. Оба комбината поставляют детали на завод, где собирают изделие, для которого нужны одна деталь А и 3 детали В. При этом комбинаты договорились между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее число изделий. Сколько изделий за смену при таких условиях может собрать завод?

Ответ. 33.

6. На двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте работают 100 человек, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий добывает 1 кг алюминия или 3 кг никеля. На второй шахте работают 300 человек, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий добывает 3 кг алюминия или 1 кг никеля. Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где производится сплав, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договорились между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько кг сплава сможет произвести ежедневно завод при таких условиях?

Ответ. 5400.

7. В начале 2001 года Алексей приобрёл ценную бумагу за 19 тыс. рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 3 тыс. рублей. В любой момент Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10%. В течение какого года после покупки Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через пятнадцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

Ответ. 2005.

8. В начале 2011 года Алексей приобрёл ценную бумагу за 8 тыс. рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 1 тыс. рублей. В любой момент Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 8%.

В течение какого года после покупки Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через двадцать пять лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

Ответ. 2016.