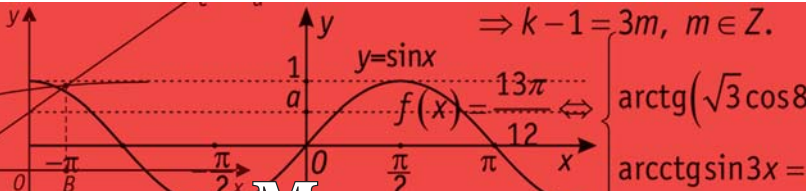


$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$



Математика

Египетские дроби



Гашков Сергей Борисович

*Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры дискретной математики
механико-математического факультета МГУ.*

Все школьники знают, как выполнять действия с числовыми дробями. Проще всего в этом смысле десятичные дроби, так как операции над ними почти не отличаются от операций с целыми числами (нужно только уметь поставить в результате в нужном месте разделительную запятую). Но десятичные дроби появились в математике не сразу. Известно, что их уже знали средневековые математики Ближнего и Среднего Востока¹. Позиционная десятичная система попала туда, видимо, из Индии, хотя позиционные дроби, правда не десятичные, а шестидесятиричные, были известны ещё в древнем Шумере, а десятичные дроби, возможно, впервые появились в Китае.

Идея позиционной системы счисления не так тривиальна, как кажется на первый взгляд. В Европе заслуга введения в практику десятичных дробей и алгоритмов действия с ними обычно приписывается нидерландскому учёному и инженеру Симону Стевину (1548–1620). Сейчас эти алгоритмы работают в любом микрокалькуляторе, что

вполне может привести к тому, что школьники совсем разучатся выполнять их вручную.

Но первыми появились в математике не десятичные, а обыкновенные дроби, и произошло это в Древнем Египте, как считается, около 4000 лет назад. Возникли они, скорее всего, в задачах дележа. В папирусе Ринда² его автор египетский писец

¹ Например, Мухаммед аль Хорезми, живший в IX веке на территории современного Узбекистана.

² Названном так в честь купившего его в XIX веке английского египтолога Генри Ринда.

Ахмес (или, как иногда пишут, Яхмес, или даже Агамез) в задаче номер шесть предлагает разделить девять хлебов между десятью людьми. Ответ дан в странном (с современной точки зрения) виде: $2/3 + 1/5 + 1/30$. На самом деле он был записан не совсем так. До изобретения десятичных цифр оставалось ещё 3000 лет. У египтян была своя система записи чисел. Числа от 1 до 9 изображались соответствующим количеством палочек. А для 10, 100, 1000, 10 000, 100 000, 1 000 000 были свои иероглифы (см., например, [1]). Фактически египтяне пользовались десятичной системой, но у них не было символа нуля (и современных алгоритмов операций с десятичными числами). Для того, чтобы записать числа иероглифами, требовалось зачастую много символов, при этом большее число иногда записывалось меньшим числом знаков, чем меньшее. Например, число 2015 записывалось 8 символами, а число 20 000 – двумя.

Современная запись ответа как $9/10$ в рассмотренной задаче в любой системе записи чисел выглядит проще, чем египетская сумма $2/3 + 1/5 + 1/30$. Попробуем убедить читателя в том, что в некоторых отношениях египетский метод дележа лучше основанного на современной записи. Действительно, что получится, если мы попробуем разделить девять хлебов между десятью людьми, используя современный алгоритм? Тогда придётся каждую буханку разрезать на десять равных частей и каждому воину армии фараона выдавать по девять маленьких кусков. Это не очень удобно из-за большого числа разрезов (и разделить на глаз не то что буханку, но и отрезок прямой на десять приблизительно равных частей непросто), да и получить девять

кусков вместо трёх (из которых один большой, даже больше остальных двух вместе взятых) вряд ли будет удобней.

Конечно, можно от каждого хлеба отрезать одну десятую часть, а оставшиеся большие куски отдать девятерым египтянам, а десятому тогда останется девять маленьких кусков, получившихся при разрезании. При таком способе число разрезов уменьшается до девяти (очевидно, что это число разрезов минимально, так как каждый хлеб нужно хотя бы раз разрезать), но появляется одна неприятность – один из воинов получает девять маленьких кусков, а остальные – по одному большому, внешне это может выглядеть неравным дележом, ведь воины фараона вряд ли сильны в арифметике, и может возникнуть вооружённый конфликт.

Вернёмся к задаче раздела 9 хлебов между 10 людьми. Попробуем разделить хлебы, пользуясь египетской суммой $9/10 = 2/3 + 1/5 + 1/30$. От каждой из 9 буханок отрежем по одной трети, большие куски отдадим 9 воинам, а оставшемуся отдадим два малых куска, в результате все получат поровну – по две трети буханки (получивший два малых куска легко согласится, что его не обделили). Останется 7 кусков по одной трети буханки. Когда придётся раздавать остальную часть сухого пайка (т.е. каждому по $1/5 + 1/30$), разрежем каждый кусок из оставшихся семи на две части, одна из которых в полтора раза больше другой. Тогда большая часть составит $1/5$ полной буханки, а меньшая будет равна $2/3 \cdot 1/5 = 2/15$ полной буханки (выполнить раздел на две части в отношении 3:2 всё же проще, чем делить в отношении 10:1). Значит, свою долю в $1/5$ буханки сразу получают 7 человек. Из оставшихся

7-ми кусков по $2/15$ буханки 3 куса разделим пополам, выдадим оставшимся троим по два куса, один вдвое больше другого, тогда каждый получит в сумме $2 \cdot 1/15 + 1/15 = 1/5$ часть буханки, как и первые семь человек (и вряд ли они будут недовольны). Останутся не розданными один кусок в $2/15$ буханки и 3 куса вдвое меньших, делим больший кусок пополам, получаем 5 кусков по $1/15$ буханки, делим каждый из них ещё раз пополам и разделим получившиеся 10 кусков по $1/30$ буханки 10 людям (и споров не будет), в результате все получат по $2/3 + 1/5 + 1/30$ буханки.

Общее число разрезов при этом равно 25, это больше, чем в первом способе, но зато большинство (6 человек) получит в точности три куса по $2/3$, $1/5$, $1/30$ -й части буханки, а остальные – по четыре куса (один по два куса в одну треть вместо одного в две трети, и трое получают по два куса в $2/15$ и $1/15$ буханки вместо одного куса в $1/5$). В смысле разнobia в получившихся долях этот способ принципиально не лучше двух предыдущих (хотя в них нет долей, состоящих из большого числа кусков, большая часть долей одинакова по составу), но зато выполнять его на практике легче, так как деление хлебов пополам, а также в отношении $2:1$ и $3:2$ выполняется проще, чем деление в отношении $10:1$ и других подобных пропорций в предыдущих алгоритмах. Удобно также то обстоятельство, что в указанном методе деления можно части выдавать не все сразу, а по очереди, начиная с самых больших (в течение нескольких дней военного похода). Некоторым недостатком является появление маленьких кусков (в $1/30$ буханки).

Задача 1. Разделите 7 хлебов между 10 людьми, пользуясь формулой $7/10$ каждому и формулой $1/2 + 1/5$ каждому.

Можно отрезать от каждого хлеба $3/10$ куса, семерым отдать большие из получившихся частей, останется 7 кусков по $3/10$ хлеба, один из них разрезать на три равные части и каждому из оставшихся троих выдать по одной из них и по два куса в $3/10$ хлеба. Число разрезов очевидно равно 9, при этом семеро получили по одному (большому) куску, а трое – по три куса. Так как всего кусков при разделе оказалось $7 + 3 \cdot 3 = 16$, а вначале было 7 целых хлебов, то ещё раз можно убедиться в том, что число потребовавшихся разрезов равно $16 - 7 = 9$, потому что после каждого разреза число кусков возрастает на единицу³. Меньшим числом разрезов обойтись нельзя. Если семеро получили свой паёк одним куском, то от каждого хлеба стались куски не более $3/10$, и оставшимся троим нужно каждому не менее трёх кусков, значит всего кусков не менее $7 + 9$, то есть в этом случае разрезов не менее 9. Если разрезов было 8, значит, появилось $7 + 8 = 15$ кусков, при этом n хлебов разрезались на две части, а остальные $7 - n$ хлебов разрезались не менее чем на три куса. Поэтому всего кусков было не менее $2n + 3(7 - n)$, а так как их ровно 15, то $n \geq 6$. Случай, когда $n = 7$, был рассмотрен выше, значит, можно считать, что $n = 6$, т.е. 6 человек получили свою долю одним куском и осталось выдать паёк четверым. Так как для них осталось $15 - 6 = 9$ кусков, то трое из них получают по два куса, а последний – три. Из оставшихся 9 кусков имеются 6 кусков по $3/10$ хлеба каждый, оставшихся после раздачи

³ Одновременно два куса одним взмахом ножа разрезать не разрешается.

6 больших кусков «первой шестёрке», и ещё три куска. Хотя бы один из них достаётся «последнему» (три дроби $3/10$ в сумме не дают $7/10$), значит, один из «первой тройки» получил два куска по $3/10$, что в сумме меньше требуемых $7/10$.

А зачем египетские писцы использовали дробь $2/3$? Из приведённого примера видно, что это удобно в задаче дележа. Кроме того, это иногда упрощает представление дробей в виде египетской суммы.

Задача 2. Представьте дробь $9/10$ в виде суммы различных чисто аликвотных (с числителем 1) дробей.

Ответ $\frac{9}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ в каком-то смысле даже проще, чем $\frac{9}{10} = \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{30}$.

Задача 3. Разделите 9 хлебов между 10 людьми, выделив по $1/2 + 1/3 + 1/15$ каждому.

Разрежем 5 хлебов пополам и раздадим всем по половине. Три оставшихся хлеба разделим на три равные части, а от четвёртого отрежем $1/3$ и раздадим получившиеся 10 равных кусков всем по одному. Оставшийся кусок в $2/3$ хлеба разделим на 10 равных частей и раздадим каждому по одной. Общее число разрезов равно $5 + 3 \cdot 2 + 1 + 9 = 21$. Это меньше, чем в первом примере, и алгоритм дележа проще, но в нём приходится делить один кусок на 10 равных частей (впрочем, как и в современном алгоритме), что делать «на глаз» гораздо сложнее, чем делить на пополам или на три равные части. Не в этом ли причина использования

египетским писцом разложения $\frac{9}{10} = \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{30}$?

Рассмотрим ещё одну задачу дележа, не похожую на предыдущие, но также использующую в своём решении египетские дроби. Это старинная, отчасти шуточная, отчасти парадоксальная задача, заимствована из второй книги «В царстве смекалки» замечательного дореволюционного популяризатора математики Емельяна Игнатьева⁴.

Задача 4. Египтянин оставил сыновьям 17 верблюдов и завещал старшему сыну половину, среднему треть, а младшему девятую часть. Они обратились за помощью к шейху (так как 17 не делится ни на 2, ни на 3, ни на 9). Шейх приехал на верблюде и разделил наследство строго по завещанию. Как он это сделал?

Решение. Очевидно $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18}$.

Шейх добавил к 17 верблюдам своего, и разделил 18 верблюдов по завещанию: одному 9, другому 6, третьему 2, а оставшегося (своего) верблюда, конечно, забрал себе.

Как же египтяне оперировали с такими странными на первый взгляд дробями? Для работы с ними они изобрели своеобразную систему. Обыкновенные дроби с числителем, большим 1, записывались в виде суммы различных дробей с единичным числителем, например $7/10 = 1/2 + 1/5$. Дроби с единичным числителем сейчас называют иногда аликвотными дробями, а суммы различных аликвотных дробей называют египетскими дробями. Историки математики часто пишут, что египетская техника работы с дробями была громоздкой и неудобной. Кроме аликвот-

⁴ Все три книги были выпущены издательством «Терра» в 2015 г. Предыдущее издание выходило в 1909 году. Игнатьев не указывает источников задач, поэтому, скорее всего, эта задача не его собственная.



ных дробей, египтяне (как уже отмечалось) использовали ещё дробь $2/3$, и для вычислений с дробями действительно пользовались специальными таблицами. Например, у них были таблицы для умножения аликвотных дробей на 2 и на $2/3$. Принципы построения этих таблиц не вполне ясны, хотя некоторые исследователи пытались восстановить правила, которыми пользовались писцы. Читателя, который заинтересовался древнеегипетской математикой, отсылаем к книгам [1,2], а далее попытаемся убедить его в том, что древнеегипетская арифметика для своего времени была очень разумной и простой, в определённом смысле она проще современной арифметики обыкновенных дробей, и к тому же не такая уж и громоздкая, как это кажется на первый взгляд.

А как умножали натуральные числа в древнем Египте?

Школьного алгоритма умножения столбиком египтяне, конечно, не знали, ведь им была неизвестна позиционная система исчисления. Но умножать числа они умели, сводя умножение к сложению. Делали они это не прямолинейно, многократно повторяя прибавление одного и того же числа, а более изощрённо. Например, чтобы умножить какое-нибудь число a на 1000, они, используя только операции сложения, последовательно вычисляли

$$a + a + a = 3a, 3a + 3a + a = 7a,$$

$$7a + 7a + a = 15a, 15a + 15a + a = 31a,$$

$$31a + 31a = 62a, 62a + 62a + a = 125a,$$

$$125a + 125a = 250a, 250a + 250a = 500a,$$

$$500a + 500a = 1000a.$$

Как писал А. А. Карацуба, «повидимому, основой появления египетского метода умножения послужило взвешивание на коромысловых весах с двумя чашками весов. Самый быстрый способ получить на коромысловых весах вес $a \cdot 2^n$ состоит в том, что сначала, имея на левой чаше весов a , справа получают a , тем самым получают <в сумме> вес $2a$, имея $2a$, точно также получают $4a$, и так далее [...]. Думаю, что изображение коромысла, коромысловых весов, имеет для человечества такое же большое значение, как изобретение колеса».

Такой алгоритм умножения дожил почти до нашего времени, он удобен при вычислениях на счётах⁵. Египетский метод умножения и похожий на него метод взвешивания в XX веке привели в вычислительной математике к способу быстрого возведения числа в степень.

Например, приведённая выше цепочка сложений для получения числа 1000 превращается в следующую схему для быстрого вычисления a^{1000} :

$$a^3 = a^2 a, a^7 = (a^3)^2 a, a^{15} = (a^7)^2 a,$$

$$a^{31} = (a^{15})^2 a, a^{62} = (a^{31})^2,$$

$$a^{125} = (a^{62})^2 a, a^{250} = (a^{125})^2,$$

$$a^{500} = (a^{250})^2, a^{1000} = (a^{500})^2.$$

Нахождение и применение алгоритмов быстрого возведения в степень позволяет на компьютере быстро возводить огромные числа (из нескольких сотен цифр) в огромные степени (состоящие из сотен цифр).. Именно существование такого алгоритма делает возможным знаменитый метод шифрования RSA.

Умели ли древние египтяне возводить числа в степень? В папирусе Ринда есть такая задача: «7 человек имеют по 7 кошек, каждая кошка съедает по 7 мышей, каждая мышь съедает по 7 колосьев, из каждого колоса вырастает по 7 мер зерна. Сколько всего мер зерна?»⁶

Но сведений о применении цепочек повторяющихся операций для возведения в степень в древнем Египте, кажется, нет.

Список литературы

1. Гиллингс Р. Дж. Математика во времена фараонов. – М.: Центрполиграф, 2011.
2. Бобынин В. В. Математика древних египтян. – 2-е изд. – М.: «Либроком», 2011 (первое издание выходило в начале XX в.).
3. Кнут Д. Искусство программирования, т. 2. – М.: «Вильямс», 2014 (есть более раннее издание в издательстве «Мир» в другом переводе).
4. Гашков С. Б. Системы счисления и их применение. – М.: МЦНМО, 2014.

⁵ Д. Кнут в [3] пишет, что во Франции в XIX веке называли этот приём «русским крестьянским методом». Счёты во Францию привёз и пропагандировал их удобство для обучения арифметике французский математик Понселе, офицер армии Наполеона, побывавший в плену в России.

⁶ Вот уже почти четыре тысячи лет эта задача путешествует из одной книги в другую.