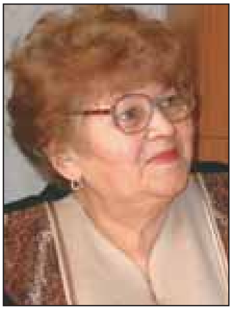


Колесникова Софья Ильинична
Старший преподаватель кафедры высшей математики Московского физико-технического института (МФТИ), специалист Федеральной заочной физико-технической школы (ФЗФТШ) при МФТИ. Окончила Московский государственный университет (МГУ), имеет большой опыт работы со старшеклассниками, автор пособий «Интенсивный курс подготовки ЕГЭ», «Решение сложных задач ЕГЭ».

«Необычайные приключения» двух неравенств

«Тест – психотехническое испытание, состоящее в том, что испытуемому предлагается решить одну или несколько задач для определения тех или иных способностей (памяти, внимательности, быстроты реакции и т. д.). Отдельная задача или текст задачи для такого испытания».

«Толковый словарь русского языка»
под редакцией Д.И. Ушакова.

«Необычайные приключения» неравенств, родившихся на мехмате МГУ и, несколько преобразившись, поселившихся в заданиях С3 ЕГЭ – 2005 и в задании С3 демонстрационного варианта ЕГЭ – 2007.

Часть 1

В «Потенциалах» №№ 5-7, 2005 г. напечатана большая статья автора «Задачи с параметрами», в которой показано, что «параметр» – понятие условное: в одном и том же уравнении с двумя переменными, в зависимости от постановки задачи, роль параметра может играть то одна, то другая переменная. Там же рассмотрены задачи вступительных экзаменов МГУ (1992, мехмат и 1994, биофак), в которых автору в своё время впервые встретились неравенства с «провокационной» постановкой задач (усложнённая задача типа (1992, мехмат) встречается ещё в 1999 г. на биофаке МГУ). В чём же особенность постановки этих задач? В условии, где задано неравенство, содержащее две «переменные», *не сказано*, что a – параметр – в условиях вообще *отсутствует* слово «параметр»! В силу необычности постановки, эти задачи рассматриваются автором ежегодно на проводимых в МФТИ курсах повышения квалификации учителей, приводятся в заданиях ФЗФТШ, разбираются на всевозможных лекциях для учителей и школьников. И всегда эти задачи у всех вызывают затруднения, возникают вопросы, обсуждения. Видно также, как появляется чувство удовлетворения у слушателей, когда решение, наконец, стало понятным. И все отмечают, что задачи, хоть, на первый взгляд, и трудные, но красивые.

Итак, рассмотрим ещё раз эти задачи в порядке их «появления на свет».

Пример 1. (МГУ, 1992, мехмат) Найдите все значения x, при которых неравенство

$$(2-a)x^3-3x^2+(a-5)x+$$
$$+2\left(5+4a-a^2\right)<0$$

выполняется хотя бы при одном значении a, принадлежащем отрезку $[-1;2]$.

Решение. Увидев так написанное неравенство, школьник начинает думать – как же решить такое кубическое неравенство? Обычно такое неравенство решается методом интервалов. Для этого сначала надо левую часть разложить на множители. Попробуем поискать частное решение. Частного решения не видно. Что делать? Так как не видно способов решения, невольно начинаешь перечитывать условие задачи. И тогда кажется, что тут сложного? Ведь надо решить задачу хотя бы при одном значении a, принадлежащем отрезку $[-1;2]$. Подставим какое-нибудь «удобное» значение a из отрезка $[-1;2]$, например, то, при котором свободный член равен 0

$$\left(5+4a-a^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1, \\ a=5 \end{array}\right.\right),$$

чтобы решилось кубическое неравенство. Решим неравенство, например, при $a=-1$:

$$3x^3-3x^2-6x<0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\left(x^2-x-2\right)x<0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)x<0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(0;2).$$

Итак, неравенство «хотя бы при одном значении a» верно. Значит, задача решена. Ответ: $(-\infty;-1)\cup(0;2)$. Если под рукой нет правильного ответа, то «правильным» кажется найденный. Но червь сомнения гложет: ведь это последняя задача варианта, да ещё на мехмате – не может быть, чтобы она так просто решалась. А что будет, если подставить $a=5$? Подставим:

$$-3x^3-3x^2<0 \Leftrightarrow (x+1)x^2>$$
$$>0 \Leftrightarrow x\in(-1;0)\cup(0;+\infty).$$

Ответ другой! Что это значит? Читаем опять условие: надо найти *все* x, при которых неравенство выполняется хотя бы при одном значении a, принадлежащем отрезку $[-1;2]$. Что тогда? Ответом будет объединение

$$x\in(-1;0)\cup(0;+\infty)\cup(-\infty;-1)\cup(0;2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(0;+\infty).$$

Но это же практически вся ось. А что при $x=0$?

$$2\left(5+4a-a^2\right)<0 \Leftrightarrow a\in(-\infty;-1)\cup(5;+\infty).$$

Так, эти a заданному промежутку не принадлежат – похоже, что последний ответ верен.

Однако, если правильный ответ под рукой, то станет ясно, что это не так. И возникает законный вопрос: почему? На этот вопрос одним словом не ответишь. Надо ещё и ещё раз вчитываться в условие задачи – оно сформулировано, я бы сказала, «провокационно», с точки зрения школьника, и, как выясняется, не только школьника. Почему при первом взгляде на неравенство школьник посчитал, что параметр – это a? Очень просто – в школе так было всегда: x – переменная, a – параметр. Но в условии ни слова о параметре! А вот относительно a сказано, что неравенство *выполняется* хотя бы при одном значении a, принадлежащем отрезку $[-1;2]$! А что это даёт? Это значит, что неравенство можно рассматривать *относительно* a, а тогда x здесь играет роль *параметра*. Теперь всё встает на свои места! Неравенство является *квадратным относительно* a, способы его исследования известны. Перепишем неравенство:

$$(2-a)x^3-3x^2+(a-5)x+$$
$$+2\left(5+4a-a^2\right)<0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2a^2+a\left(x^3-x-4\right)-2x^3+$$
$$+3x^2+5x-10>0.$$

Исследуем функцию

$$y(a)=2a^2+a\left(x^3-x-4\right)-$$
$$-2x^3+3x^2+5x-10.$$

По условию, $y(a)$ принимает положительное значение хотя бы при одном значении a, принадлежащем отрезку $[-1;2]$. Когда это возможно? Коэффициент при старшей степени квадратного трёхчлена положителен, поэтому условия задачи выполнены тогда и только тогда, когда значение квадратного трёхчлена положительно хотя бы на одном из концов отрезка (рис. 1 *а*, *б*, *в*),

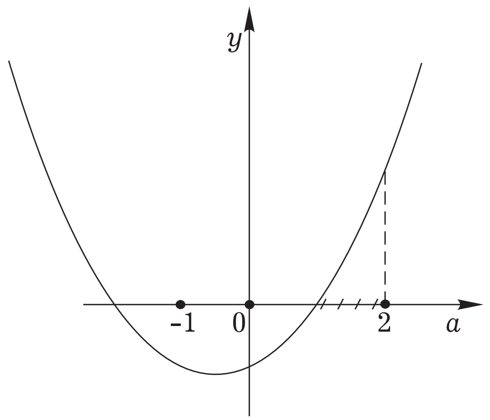
$$\left[\begin{array}{l} y(-1)>0, \\ y(2)>0. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^3-3x^2-6x<0, \\ -3x^2-3x+18<0. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x(x-2)(x+1)<0, \\ (x+3)(x-2)>0. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

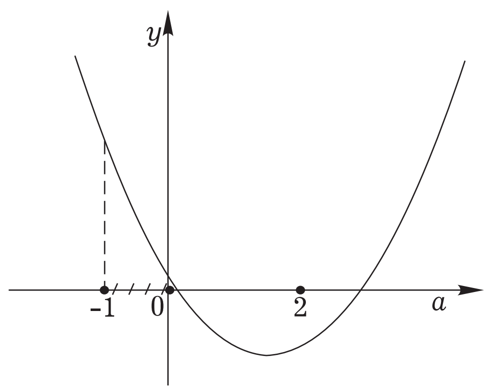
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in(-\infty;-1)\cup(0;2), \\ x\in(-\infty;-3)\cup(2;+\infty). \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(0;2)\cup(2;+\infty).$$

Ответ. $x\in(-\infty;-1)\cup(0;2)\cup(2;+\infty)$.



а



б

Рис. 1

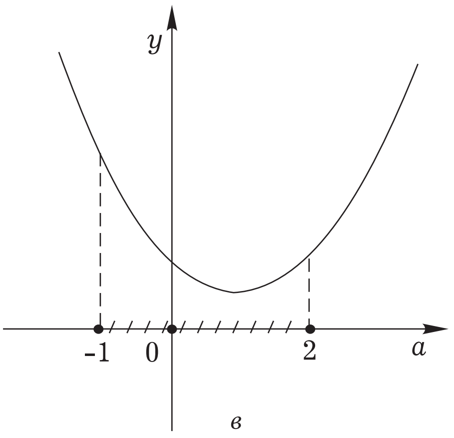


Рис. 1

Задача решена. Так что же в ней всё-таки необычного, «запутывающего»? Очень просто – отсутствует одно – единственное слово после слова «значения» – слово «параметра». Если бы оно было, то задача звучала бы более знакомо: найдите все значения *параметра* x, при которых неравенство

$$(2-a)x^3-3x^2+(a-5)x+2\left(5+4a-a^2\right)<0$$

выполняется хотя бы при одном значении a, принадлежащем отрезку $[-1;2]$. И никаких кривотолков, никаких кубических неравенств не возникает!

Итак, *невозможность* исследовать кубическое неравенство заставила искать другие пути решения задачи.

Пример 2. (МГУ, 1994, биофак) Найти все значения x, при которых неравенство

$$(4-2a)x^2+(13a-27)x+(33-13a)>0$$

выполнено для всех a, удовлетворяющих условию $1<a<3$.

Решение. Кажется, здесь всё проще – неравенство квадратное. Попробуем его решить. Оказывается, это не так просто сделать, потому что при старшей степени есть параметр. Надо работать осторожно. Так как $1<a<3$, то $4-2a$ может быть как положительным, так и отрицательным или нулём.

1. Если $a=2$, то

$$-x-7>0 \Leftrightarrow x<-7.$$

2. Если $a\neq 2$, то так или иначе будет работать дискриминант. Найдём его:

$$D=169a^2-702a+729-(33-13a)\times$$
$$\times(16-8a)=169a^2-702a+729-$$
$$-528+208a+264a-104a^2=$$
$$=65a^2-230a+201.$$

Ясно, что с таким дискриминантом исследовать неравенство «в лоб», т. е. стандартными школьными методами, едва ли возможно.

Что делать? Читаем условие задачи. Кто сказал, что x – параметр? Школьная традиция. В условии нет слова «параметр»!

Этот пример совершенно сбивает с толку любого школьника: неравенство квадратное относительно обычной переменной x, но как его исследовать, неясно. Ни одному школьнику, по крайней мере, на практике автора, не приходит в голову решать задачу иначе. Читаем ещё раз условие задачи: неравенство

$$(4-2a)x^2+(13a-27)x+(33-13a)>0$$

выполнено для всех a, удовлетворяющих условию $1<a<3$. Перепишем его относительно a:

$$(4-2a)x^2+(13a-27)x+(33-13a)>0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -a\left(2x^2-13x+13\right)+4x^2-27x+$$
$$+33>0 \Leftrightarrow a\left(2x^2-13x+13\right)-4x^2+$$
$$+27x-33<0.$$

Оказалось, наше неравенство имеет вид $k(x)a+b(x)<0$, т. е. оно линейное, но ... с коэффициентами, зависящими от параметра.

Поэтому рассмотрим всевозможные прямые $y = ka + b$ в плоскости $(a;y)$ на промежутке $(1;3)$ (рис. 2).

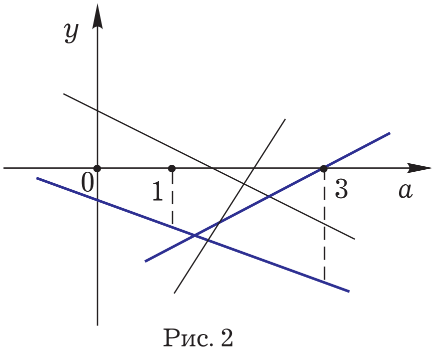


Рис. 2

Видно (синие прямые), что необходимым и достаточным условием отрицательности линейной функции на открытом промежутке является неположительность линейной функции на обоих концах промежутка (но одновременное обращение в 0 на концах невозможно), т. е. выполнение системы неравенств:

$$\begin{cases} y(1) \le 0, \\ y(3) \le 0, \\ y(1)^2 + y(3)^2 \ne 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 14x + 20 \ge 0, \\ 2x^2 - 12x + 6 \le 0, \\ y(1)^2 + y(3)^2 \ne 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 10 \ge 0, \\ x^2 - 6x + 3 \le 0, \\ y(1)^2 + y(3)^2 \ne 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;2] \cup [5;+\infty), \\ x \in \left[3-\sqrt{6};3+\sqrt{6}\right]. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[3-\sqrt{6};\ 2\right] \cup \left[5;\ 3+\sqrt{6}\right].$$

Ответ. $\left[3-\sqrt{6};\ 2\right] \cup \left[5;\ 3+\sqrt{6}\right]$.

И вот, наконец, мы ещё раз встречаемся с такого типа задачей – это задание С3 демонстрационного варианта ЕГЭ – 2007. Заметим, кстати, что и на мехмате, и на биофаке это были последние задания варианта (на мехмате – шестое, на биофаке – пятое!), т. е. самые трудные (на *весь* вариант отводится 4 астрономических часа).

Пример 3. (Демо ЕГЭ -2007) Найдите все значения x, которые удовлетворяют неравенству

$$(2a-1)x^2 < (a+1)x + 3a$$

при любом значении параметра a, принадлежащем промежутку $(1;2)$.

Решение. По внешнему виду неравенства и условию для a это полная копия предыдущей задачи. Но … есть разница – здесь a названо параметром, а формулировка «Найдите все значения x, которые *удовлетворяют* неравенству…» просто «заставляет» решать неравенство относительно x!

Странная постановка задачи. Обычно требуется найти такие значения параметра, при которых надо найти некоторое подмножество решений: например, найти такие значения параметра, при которых решение единственно, или решений всего два, или решений нечётное количество и т. д., т. е. так или иначе надо найти подмножество решений, обладающее каким-нибудь свойством. Короче, исходя из «особых» свойств подмножества, ищется, *выделяется* подмножество значений параметра, при котором решения обладают заданным свойством. В нашей задаче в формулировке все поставлено с «ног на голову»: подмножество значений параметра задано, и надо найти решения, ему соответствующее. Без сомнения, задача имеет право на существование, но в такой постановке задачи встречаются крайне редко.

В задачах МГУ не было слова «параметр», и это давало свободу думать и выбирать путь решения при нестандартной постановке, а задача ЕГЭ своим дополнительным словом просто «принуждает» идти по традиционному пути: найти все решения неравенства, а затем отбирать те, которые удовлетворяют дополнительным условиям. Опубликованное в Интернете решение совпадает с приведённым выше решением примера. К сожалению, в Интернете никак не комментируется такой путь решения. Наверное, поэтому задача оказалась в центре внимания учителей, и появились публикации о различной методике решения *квадратного* неравенства с параметром. С методикой, которую мы разобрали на варианте биофака, знакомы далеко не все, а задачи ЕГЭ даются абсолютно для всех. Значит, должно быть решение, может быть, более длинное, но доступное всем? Оказалось, что в этой задаче такой путь есть, в отличие от задания С3 из ЕГЭ – 2005.

Мы решим задачу двумя способами.

Первый способ (школьный – решение квадратного неравенства).

Оказывается, задача *отличается* от «биофаковской» тем, что уравнение $(2a-1)x^2=(a+1)x+3a$ имеет «хорошие» корни:

$$(2a-1)x^2=(a+1)x+3a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=\dfrac{3a}{2a-1}, \end{array}\right.$$

а потому квадратное неравенство можно решить «в лоб» при любых a, а потом отобрать нужные решения. Так как a принадлежит промежутку $(1;2)$, то $2a-1>0$ и $\dfrac{3a}{2a-1}>0$. Значит, на нашем промежутке

$(2a-1)x^2<(a+1)x+3a \Leftrightarrow -1<x<\dfrac{3a}{2a-1}$.

Как теперь будем отбирать нужные решения? Мы поступим просто: так как графиком функции $x=\dfrac{3a}{2a-1}$ является классическая гипербола, то решить неравенство на заданном промежутке можно графически в плоскости $(a;x)$. Авторы КИМов считают этот метод далёким от школы. А решение в Интернете школьное? Итак, строим прямую $x=-1$ и гиперболу

$$x=x(a)=\frac{3a}{2a-1}=$$
$$=\frac{3\left(a-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}{2\left(a-\frac{1}{2}\right)}=\frac{3}{2}+\frac{3}{4\left(a-\frac{1}{2}\right)}.$$

Решением неравенства

$$-1<x<\frac{3a}{2a-1}$$

на промежутке, где $a\in(1;2)$, является «криволинейный четырёхугольник», ограниченный пунктирными синими вертикалями, пунктирной синей прямой $x=-1$ и пунктирной синей ветвью гиперболы – рис. 3. Теперь отмечаем те x, которые являются решениями при *всех* (при любых) $a\in(1;2)$ – это красные вертикальные линии, проекция которых на ось Ox даёт ответ: $x \in (-1;2]$ – рис. 3.

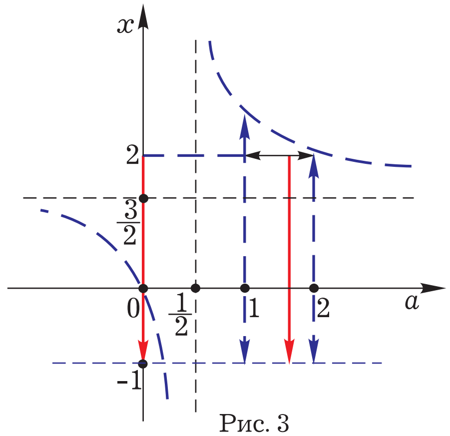


Рис. 3

Второй способ (не школьный – решение линейного неравенства).

Рассмотрим всевозможные прямые $y(a) = a\left(2x^2 - x - 3\right) - x^2 - x$, или записанные короче $y = ka + b$, в плоскости $(a;y)$ на промежутке $(1;2)$ (рис. 4), где

$$k(x) = 2x^2 - x - 3,\ b(x) = -x^2 - x.$$

В задаче требуется найти все значения x, при каждом из которых эта функция отрицательна для всех $a \in (1;2)$.

Видно (синие прямые), что необходимым и достаточным условием отрицательности линейной функции на открытом промежутке является неположительность линейной функции на обоих концах промежутка, причём, одновременное обращение в 0 на концах невозможно, т. е. выполнение системы условий:

$$\begin{cases} y(1) \le 0, \\ y(2) \le 0, \\ y(1)^2 + y(2)^2 \ne 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

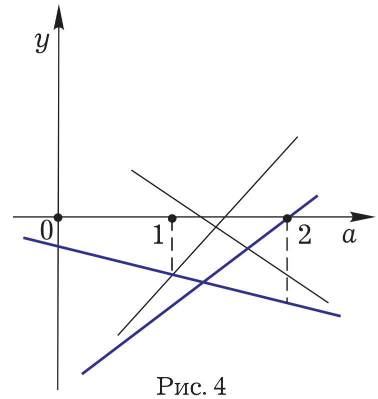


Рис. 4

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(2x^2 - x - 3\right) - x^2 - x \le 0, \\ 2\left(2x^2 - x - 3\right) - x^2 - x \le 0, \\ \left(\left(2x^2 - x - 3\right) - x^2 - x\right)^2 + \\ \left(2\left(2x^2 - x - 3\right) - x^2 - x\right)^2 \ne 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \le 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1) \le 0, \\ (x-2)(x+1) \le 0, \\ (x-3)^2 \cdot (x+1)^2 + (x-2)^2 \cdot (x+1)^2 \ne 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1;3], \\ x \in [-1;2], \\ x \ne -1. \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1;2],$$

Ответ: $(-1;2]$.

Решение задачи не исчерпывается приведёнными способами.

Часть 2

Пример 1. (МГУ, 1994, мехмат) Найдите все значения x, при каждом из которых наименьшее из двух чисел $3x+5$ и $\log_2\left(5\cdot 2^{2x+2}-2^{x+2}+1\right)$ отрицательно.

Решение. *Первый способ* (школьный).

Итак, если

$$3x+5\le \log_2\left(5\cdot 2^{2x+2}-2^{x+2}+1\right),$$

то $3x+5<0$; если же

$$\log_2\left(5\cdot 2^{2x+2}-2^{x+2}+1\right)\le 3x+5,$$

то $\log_2\left(5\cdot 2^{2x+2}-2^{x+2}+1\right)<0$. Это запишем как совокупность систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x+5\le \log_2\left(5\cdot 2^{2x+2}-2^{x+2}+1\right)^*,\\ 3x+5<0;\end{cases}\\ \begin{cases}\log_2\left(5\cdot 2^{2x+2}-2^{x+2}+1\right)\le 3x+5^{**},\\ \log_2\left(5\cdot 2^{2x+2}-2^{x+2}+1\right)<0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Видно, что самыми сложными являются неравенства, отмеченные значками * и **. Решим их отдельно.

$$(^*)\Leftrightarrow 3x+5\le \log_2\left(5\cdot 2^{2x+2}-2^{x+2}+1\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 2^{3x+5}\le \log_2\left(5\cdot 2^{2x+2}-2^{x+2}+1\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{3x+5}\le 5\cdot 2^{2x+2}-2^{x+2}+1.$$

Для удобства введём замену переменных: $2^x=t,\ t>0$. Тогда (*) неравенство примет вид:

$$32t^3\le 20t^2-4t+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(2t)^3-5(2t)^2+2(2t)-1\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2t-1)\left(4(2t)^2-(2t)+1\right)\le 0\Leftrightarrow 2t\le 1.$$

Возвращаемся к старым переменным: $2\cdot 2^x\le 1\Leftrightarrow x+1\le 0\Leftrightarrow x\le -1$.

Решим неравенство(**):

$$(^{**})\Leftrightarrow \log_2\left(5\cdot 2^{2x+2}-2^{x+2}+1\right)\le$$

$$\le 3x+5\Leftrightarrow \begin{cases}5\cdot 2^{2x+2}-2^{x+2}+1>0,\\ 5\cdot 2^{2x+2}-2^{x+2}+1\le 2^{3x+5}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}20\cdot\left(2^x\right)^2-4\cdot 2^x+1>0\Leftrightarrow x\in R,\\ x\ge -1,\end{cases}\Leftrightarrow x\ge -1.$$

Теперь возвращаемся к совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x+5\le \log_2\left(5\cdot 2^{2x+2}-2^{x+2}+1\right)\quad (^*),\\ 3x+5<0;\end{cases}\\ \begin{cases}\log_2\left(5\cdot 2^{2x+2}-2^{x+2}+1\right)\le 3x+5\quad (^{**}),\\ \log_2\left(5\cdot 2^{2x+2}-2^{x+2}+1\right)<0.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le -1,\\ 3x+5<0;\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge -1,\\ 5\cdot 2^{2x+2}-2^{x+2}+1<1.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le -1,\\ x<-\dfrac{5}{3};\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge -1,\\ 2^x\left(5\cdot 2^x-1\right)<0.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-\dfrac{5}{3},\\ \begin{cases}x\ge -1,\\ 2^x<\dfrac{1}{5}\Leftrightarrow x<-\log_2 5.\end{cases}\Leftrightarrow\varnothing\end{array}\right.\Leftrightarrow x<-\frac{5}{3}.$$

Задача решена, $x\in\left(-\infty;-\dfrac{5}{3}\right)$.

Второй способ (не школьный).

Решение довольно громоздкое. Попробуем формализовать заданные условия в общем виде. Для этого обозначим первое выражение, например, буквой A, а второе – буквой B:

$A = 3x+5\,,\quad B = \log_2\left(5\cdot 2^{2x+2} - 2^{x+2} + 1\right).$

Теперь запишем на языке неравенств все, что задано: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}A \le B,\\ A < 0;\end{cases}\\ \begin{cases}B \le A,\\ B < 0.\end{cases}\end{array}\right.$

Решить задачу – это значит решить совокупность двух систем неравенств. Нанесём множество решений совокупности на плоскость $(A;B)$ – рис. 5.

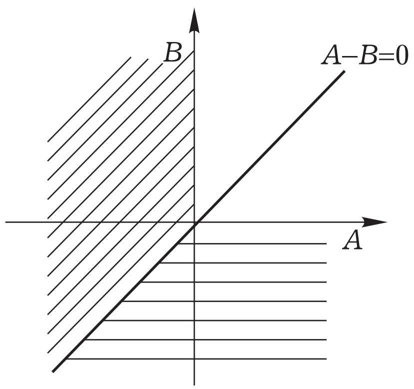


Рис. 5

Множество решений – заштрихованная часть плоскости. *Упрощение* решения состоит в том, что эту часть плоскости можно описать *по-другому* (составители считают это упрощение очевидным, а учащиеся до этого чаще всего не додумываются и запутываются в решении совокупности систем): $\left[\begin{array}{l}A<0,\\ B<0\end{array}\right.$, а тогда задача сводится к решению совокупности двух неравенств (вместо совокупности двух систем):

$$\left[\begin{array}{l}3x+5<0,\\ \log_2\left(5\cdot 2^{2x+2} - 2^{x+2} + 1\right) < 0.\end{array}\right.$$

Теперь уже задачу сможет решить практически любой успевающий школьник:

$$\left[\begin{array}{l}3x+5<0,\\ \log_2\left(5\cdot 2^{2x+2} - 2^{x+2} + 1\right) < 0.\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x+5<0,\\ \begin{cases}5\cdot 2^{2x+2} - 2^{x+2} + 1 > 0,\\ 5\cdot 2^{2x+2} - 2^{x+2} + 1 < 1.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x+5<0,\\ \begin{cases}20\cdot 2^{2x} - 4\cdot 2^{x} + 1 > 0 \Leftrightarrow x\in R,\\ \left(5\cdot 2^{x} - 1\right)2^{x} < 0.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x < -\dfrac{5}{3},\\ x < \log_2\dfrac{1}{5} = -\log_2 5 < 2.\end{array}\right. \Leftrightarrow x < -\frac{5}{3}.$$

Ответ. $\left(-\infty;-\dfrac{5}{3}\right).$

Пример 2. (ЕГЭ – 2005, С3, вариант 1) Найдите все значения a, при каждом из которых наибольшее из двух чисел $b = 2^{3-a} - 4^{-a} - 9$ и $c = 2^{3+a} + 4^{a} - 3$ меньше 6.

Решение. *Первый способ* (школьный).

Если $2^{3-a} - 4^{-a} - 9 \ge 2^{3+a} + 4^{a} - 3$, то $2^{3-a} - 4^{-a} - 9 < 6$; если же

$$2^{3+a} + 4^{a} - 3 \ge 2^{3-a} - 4^{-a} - 9,$$

то $2^{3+a} + 4^{a} - 3 < 6$. Сделаем, для удобства, замену переменных: $2^{a} = t,\ t > 0$. Перепишем условие в новых переменных в виде совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{8}{t} - \dfrac{1}{t^2} - 9 \ge 8t + t^2 - 3 \quad (*),\\ \dfrac{8}{t} - \dfrac{1}{t^2} - 9 < 6;\end{cases}\\ \begin{cases}8t + t^2 - 3 \ge \dfrac{8}{t} - \dfrac{1}{t^2} - 9 \ (**),\\ 8t + t^2 - 3 < 6.\end{cases}\end{array}\right.$$

Видно, что самыми сложными являются неравенства, отмеченные значками * и **. Решим их отдельно для $t>0$.

Перепишем неравенство (*):

$$\frac{8}{t}-\frac{1}{t^2}-9\geq 8t+t^2-3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^4+8t^3+6t^2-8t+1\leq 0.$$

Получившееся неравенство относится к усложнённому возвратному: надо вынести за скобку t^2, а затем оставшееся неравенство группировкой сведётся к квадратному:

$$t^2\left(t^2+8t+6-\frac{8}{t}+\frac{1}{t^2}\right)\leq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2+\frac{1}{t^2}+8t-\frac{8}{t}+6\leq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(t^2-2+\frac{1}{t^2}\right)+8\left(t-\frac{1}{t}\right)+8\leq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4-2\sqrt{2}\leq t-\frac{1}{t}\leq -4+2\sqrt{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\left(2+\sqrt{2}\right)t\leq t^2-1\leq -2\left(2-\sqrt{2}\right)t\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t^2+2\left(2-\sqrt{2}\right)t-1\leq 0,\\ t^2+2\left(2+\sqrt{2}\right)t-1\geq 0.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t\in\left[\begin{array}{l}-2+\sqrt{2}-\sqrt{7-4\sqrt{2}};-2+\\+\sqrt{2}+\sqrt{7-4\sqrt{2}}\end{array}\right],\\ t\in\left(-\infty;-2-\sqrt{2}-\sqrt{7+4\sqrt{2}}\right]\cup\\ \cup\left[-2-\sqrt{2}+\sqrt{7+4\sqrt{2}};+\infty\right).\end{cases}\overset{t>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t\in\left(0;-2+\sqrt{2}+\sqrt{7-4\sqrt{2}}\right],\\ t\in\left[-2-\sqrt{2}+\sqrt{7+4\sqrt{2}};+\infty\right).\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t\in\left[\begin{array}{l}-2-\sqrt{2}+\sqrt{7+4\sqrt{2}};-2+\\+\sqrt{2}+\sqrt{7-4\sqrt{2}}\end{array}\right](***).$$

Решим теперь второе неравенство первой системы совокупности:

$$\frac{8}{t}-\frac{1}{t^2}-9<6\Leftrightarrow 15t^2-8t+1>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t\in\left(-\infty;\frac{1}{5}\right)\cup\left(\frac{1}{3};+\infty\right)\overset{t>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow t\in\left(0;\frac{1}{5}\right)\cup\left(\frac{1}{3};+\infty\right).$$

Учитывая условие (***), получим решение *первой* системы:

$$t\in\left[-2-\sqrt{2}+\sqrt{7+4\sqrt{2}};\ \frac{1}{5}\right)\cup$$

$$\cup\left(\frac{1}{3};\ -2+\sqrt{2}+\sqrt{7-4\sqrt{2}}\right].$$

Заметим, что при этом проводились очень «неприятные» сравнения.

Тогда решением неравенства (**) будет

$$t\in\left(0;-2-\sqrt{2}+\sqrt{7+4\sqrt{2}}\right]\cup$$

$$\cup\left[-2+\sqrt{2}+\sqrt{7-4\sqrt{2}};+\infty\right)\ (****).$$

Решим теперь второе неравенство второй системы совокупности:

$$8t+t^2-3<6\Leftrightarrow t^2+8t-9<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t\in(-9;1)\overset{t>0}{\Leftrightarrow}t\in(0;1).$$

Учитывая условие (****), получим решение *второй* системы:

$$t\in\left(0;-2-\sqrt{2}+\sqrt{7+4\sqrt{2}}\right]\cup$$

$$\cup\left[-2+\sqrt{2}+\sqrt{7-4\sqrt{2}};1\right).$$

Решением совокупности будет

$$t\in\left(0;\frac{1}{5}\right)\cup\left(\frac{1}{3};1\right).$$

Переходим к старым переменным:

$$\left[\begin{array}{l}0<2^a<\frac{1}{5},\\ \frac{1}{3}<2^a<1.\end{array}\right.\Leftrightarrow a\in\left(-\infty;-\log_2 5\right)\cup\left(-\log_2 3;0\right).$$

Ответ. $a\in\left(-\infty;-\log_2 5\right)\cup\left(-\log_2 3;0\right)$.

Трудно даже представить, как мог бы школьник в условиях ЕГЭ довести решение этим способом до конца.

Второй способ (не школьный).

Формализуем заданные условия в общем виде: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} b \le c, \\ c < 6; \end{cases} \\ \begin{cases} c \le b, \\ b < 6. \end{cases}\end{array}\right.$

Решить задачу – это значит решить совокупность двух систем неравенств. Нанесём множество решений совокупности на плоскость $(b;c)$ – рис. 6.

Множество решений – заштрихованная часть. *Упрощение* решения состоит в том, что эту часть плоскости можно описать *по-другому*:

$$\begin{cases} b < 6, \\ c < 6. \end{cases}$$

Можно обойтись и без плоскости. Для этого немного преобразуем совокупность:

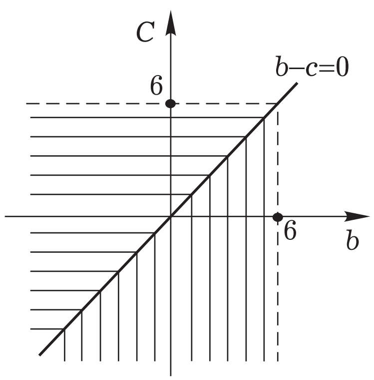


Рис. 6

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} b \le c, \\ c < 6; \end{cases} \\ \begin{cases} c \le b, \\ b < 6. \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} b \le c < 6 \Rightarrow b < 6, \\ c < 6; \end{cases} \\ \begin{cases} c \le b < 6 \Rightarrow c < 6, \\ b < 6. \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} b \le c, \\ c < 6, \\ b < 6; \end{cases} \\ \begin{cases} c \le b, \\ b < 6, \\ c < 6. \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} b < 6, \\ c < 6. \end{cases}$$

Теперь ясно, что задача сводится к решению *одной* системы двух *несложных* неравенств, в отличие от первого способа, в котором практически «непреодолимые» в условиях ЕГЭ трудности вызывает неравенство, которое во втором способе вообще не рассматривается:

$$\begin{cases} 2^{3-a} - 4^{-a} - 9 < 6, \\ 2^{3+a} + 4^{a} - 3 < 6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{3-a} - 4^{-a} - 15 < 0, \\ 2^{3+a} + 4^{a} - 9 < 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{3+a} - 1 - 15 \cdot 4^{a} < 0, \\ 2^{3+a} + 4^{a} - 9 < 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15 \cdot 2^{2a} - 8 \cdot 2^{a} + 1 > 0, \\ 2^{2a} + 8 \cdot 2^{a} - 9 < 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(2^{a} - \frac{1}{3}\right)\left(2^{a} - \frac{1}{5}\right) > 0, \\ \left(2^{a} + 9\right)\left(2^{a} - 1\right) < 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(2^{a} - 2^{\log_2 \frac{1}{3}}\right)\left(2^{a} - 2^{\log_2 \frac{1}{5}}\right) > 0, \\ \left(2^{a} - 1\right) < 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \in \left(-\infty;\ \log_2 \frac{1}{5}\right) \cup \left(\log_2 \frac{1}{3};\ +\infty\right), \\ a < 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \in \left(-\infty;\ \log_2 \frac{1}{5}\right) \cup \left(\log_2 \frac{1}{3};\ 0\right).$$

Ответ.

$a \in \left(-\infty;\ \log_2 \frac{1}{5}\right) \cup \left(\log_2 \frac{1}{3};\ 0\right).$

Среди учеников автора (начиная с 1994г) до сих пор не попалось столь гениального, который стал бы делать эти задачи вторым способом.

Составители задач МГУ «имели право» считать это упрощение *очевидным* – ведь задача была на мехмате, на досрочном экзамене в мае 1994 г. Кроме того, даже при поступлении на мехмат можно было, как видно выше, решить задачу и первым способом, хотя и длиннее. У них 4 часа на 6 задач, а на ЕГЭ задание С3 из ЕГЭ первым способом решить практически невозможно: и возвратное уравнение не всем известно, и вычисления «чудовищно» громоздки. А ЕГЭ пишет почти вся страна! Как додуматься до этого даже хорошему школьнику? В КИМах задача решается вторым способом – только ни слова о том, откуда следуют используемые условия. Думается, что именно *этим* объясняется очень низкий процент (2,2%) решаемости этой задачи в 2005 г. Некоторые школьники, не задумываясь над связью с задачей, решают систему

$$\begin{cases} 2^{3-a} - 4^{-a} - 9 < 6, \\ 2^{3+a} + 4^{a} - 3 < 6, \end{cases}$$

и попадают в этот процент, т. к. составители и не требуют явных объяснений перехода к этой совокупности.

Решение, представленное в КИМ-2005-2006, кажется очень не убедительным. Кстати, на «Марафоне 2006» учителя тоже спросили автора, почему надо решать одну систему, но ответа в аналитической форме не получили.

Приведённые примеры, на взгляд автора, показывают, что, с одной стороны, ЕГЭ по математике – далеко не тесты, в примитивном понимании этого слова, это настоящие задачи, требующие от решающего знаний, умений и навыков. Во-вторых, видно, насколько разными могут быть подходы к решению и насколько разнообразными сами решения. Отсюда следует, что очень трудно выработать единые критерии оценки оформления задач серии С. В частности, для решающего хорошо эти задачи некоторые свойства просто очевидны, а за их «неупоминание» могут быть снижены баллы. Жаль, что из опубликованной литературы так до сих пор и неясно, как же насчитываются 100 баллов, каков относительный вес разных частей ЕГЭ в этой сумме.

Список литературы

1. «Потенциал» №№5-7, 2005,

2. С. И. Колесникова. «Решение сложных задач ЕГЭ», Айрис Пресс, Москва.

3. С. И. Колесникова. «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ», Айрис Пресс, Москва.