Ажгалиев Урынбасар
Кандидат педагогических наук, учитель математики школы-гимназии № 4.
г. Нур-Султан.

Дыбыспаев Болатжан
Кандидат педагогических наук,
учитель математики школы-лицея № 28.
г. Нур-Султан.

Десять способов решения одной нестандартной системы уравнений

В математике встречаются системы уравнений с переменными, симметрично входящими в эту систему. Симметричность вхождения переменных привлекает внимание пытливых школьников для поиска различных способов решений. Рассматриваемая система предлагалась в разное время на математических олимпиадах регионального уровня сложности.

В настоящей статье предлагаем десять способов решения следующей системы:

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=37, \\ x^2+xz+z^2=28, \\ y^2+yz+z^2=19. \end{cases} \qquad (1)$$

I способ

Вычитая из первого уравнения второе и третье, и из второго уравнения – третье, получаем систему:

$$\begin{cases} (y-z)(x+y+z)=9, \\ (x-z)(x+y+z)=18, \\ (x-y)(x+y+z)=9. \end{cases} \qquad (2)$$

Введя переменную $x+y+z=t$ и складывая первое уравнение со вторым, второе уравнение с третьим и вычитая из первого уравнения третье, получим:

$$\begin{cases} (t-3z)t=27, \\ (3x-t)t=27, \\ (3y-t)t=0. \end{cases}$$

Из этой системы переменные x, y, z выразим через переменную t:

$$t:\ x=\frac{t^2+27}{3t},\ y=\frac{t}{3},\quad z=\frac{t^2-27}{3t}. \quad (3)$$

Подставив в третье уравнение системы (1) вместо y и z их значения через t из (3) имеем:

$$\frac{t^2}{9}+\frac{t^2-27}{9}+\frac{(t^2-27)^2}{9t^2}=19$$

или

$$t^4-84t^2+243=0,$$

откуда $t^2=81$ или $t^2=3$.

Переменная t принимает следующие значения:

$$t_1=3,\ \ t_2=-3,\ t_3=\sqrt{3},\ t_4=-\sqrt{3}.$$

Подставляя значения t в систему (3), получим четыре решения заданной системы:

(4; 3; 2), (-4; -3; -2),

$$\left(\frac{10}{\sqrt{3}};\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{8}{\sqrt{3}}\right),\ \left(-\frac{10}{\sqrt{3}};-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{8}{\sqrt{3}}\right).$$

II способ

Приведя систему (1) к виду (2), возведя в квадрат обе части системы (2) и сложив, получим:

$$(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz)\times$$
$$\times(x+y+z)^2=486.$$

Введем новые переменные:

$$x^2+y^2+z^2=u;\ \ xy+xz+yz=v. \quad (5)$$

Тогда из (1) и (4) получим:

$$\begin{cases}2u+v=84,\\(u-v)(u+2v)=243.\end{cases}$$

Корнями этой системы являются числа

$$u_1=55,\ v_1=-26,\ u_2=29,\ v_2=26.$$

Теперь можно найти значение

$$x+y+z:(x+y+z)^2=$$
$$=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz)=u+2v.$$

Подставляя значение u и v, получим: $x+y+z=\pm\sqrt{3}$ и $x+y+z=\pm 9$.

Подставляя значения $x+y+z$ в систему (2) получим четыре системы линейных уравнений.

Приведем одну из них:

$$\begin{cases}x+y+z=9,\\y-z=1,\\x-z=2,\end{cases}$$

решение которой – тройка натуральных чисел (4; 3; 2). Остальные решения получаются аналогично.

III способ

Из первого и второго уравнений системы (2) получим:

$$y=\frac{x+z}{2}. \quad (6)$$

Из (6) и (1) получим:

$$\left(\frac{x+z}{2}\right)^2+z\left(\frac{x+z}{2}\right)+z^2=19. \quad (7)$$

Взяв уравнение (7) и второе уравнение системы (1) напишем новую систему

$$\begin{cases}\left(\dfrac{x+z}{2}\right)^2+z\left(\dfrac{x+z}{2}\right)+z^2=19,\\x^2+xz+z^2=28.\end{cases} \quad (8)$$

$$(8)\Rightarrow\begin{cases}x^2+4zx+7z^2=76,\\x^2+xz+z^2=28.\end{cases} \quad (9)$$

Умножив первое уравнение на 7, второе на 19, и, вычитая из первого уравнения второе, получим однородное уравнение

$$4x^2-3xz-10z^2=0,$$

откуда $x=2z$ или $x=-\dfrac{5z}{4}$.

Дальнейшее решение не представляет затруднений.

IV способ

Выделяя полные квадраты из первой системы имеем:

$$\begin{cases}(x-y)^2=37-3xy,\\(x-z)^2=28-3xz,\\(y-z)^2=19-3yz.\end{cases}\qquad(10)$$

Учитывая соотношение (6) имеем уравнение

$$37-3xy=19-3yz,$$

откуда получаем $x-z=\frac{6}{y}$.

Соотношения (6) и (10) образуют систему:

$$\begin{cases}x-z=\frac{6}{y},\\x+z=2y.\end{cases}\qquad(11)$$

Почленно складывая и вычитая уравнения систем (11) имеем

$$x=\frac{3}{y}+y,\ \ z=y-\frac{3}{y}.\qquad(12)$$

Подставляя выражение для x в первое уравнение системы (1) получаем

$$3y^4-28y^2+9=0,$$

отсюда $y^2=9$ или $y^2=\frac{1}{3}$; откуда $y_{1,2}=\pm 3,\ y_{3,4}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Значения x и z находим из системы (12):

$$x_{1,2}=\pm 4,\ \ x_{3,4}=\pm\frac{10}{\sqrt{3}},\ \ z_{1,2}=\pm 2,\ \ z_{3,4}=\pm\frac{8}{\sqrt{3}}.$$

V способ

Умножив каждое уравнение системы (1) на соответствующий множитель получим следующую систему:

$$\begin{cases}x^3-y^3=37x-37y,\\z^3-x^3=28z-28x,\\y^3-z^3=19y-19z.\end{cases}\qquad(13)$$

Путем почленного сложения левой и правой частей системы (13) приходим к уравнению $x+z=2y$, полученному в III способе.

Второе уравнение системы (1) запишем в виде

$$(x+z)^2-xz=28,$$

или $\quad 4y^2-xz=28,$

откуда $\quad xz=4y^2-28.$

Получаем систему $\begin{cases}x+z=2y,\\xz=4y^2-28.\end{cases}$

По теореме Виета имеем

$$t^2-2yt+4y^2-28=0,$$

отсюда

$$t_{1,2}=y\pm\sqrt{28-3y^2},$$

значит

$$x=y+\sqrt{28-3y^2},\quad z=y-\sqrt{28-3y^2}.$$

Подставляя выражения для z в третье уравнение системы (1) имеем

$$y^2+y\left(y-\sqrt{28-3y^2}\right)+$$
$$+y^2-2y\sqrt{28-3y^2}+28-3y^2=19,$$

или, после упрощений, $y^2\left(28-3y^2\right)=9$,

откуда $y^2=9$ и $y^2=\frac{1}{3}$; $y_{1,2}=\pm 3$, $y_{3,4}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Далее, из вышеприведённых выражений для x и z, получаем все решения системы.

VI способ

Как в III способе находим $x+z=2y$. Это уравнение можно трактовать как выполнение того, что x, y и z образуют арифметическую прогрессию, то есть $x=y-d$, $z=y+d$.

Далее имеем

$$\begin{cases}(y-d)^2+(y-d)y+y^2=37,\\ y^2+(y+d)y+(y+d)^2=19,\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}3y^2-3yd+d^2=37,\\ 3y^2+3yd+d^2=19.\end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе получаем

$$yd=-3,$$

откуда

$$d=\frac{-3}{y}.$$

Подставляя выражение для d в первое уравнение последней системы имеем: $3y^4-28y^2+9=0$.

Остальное решение не представляет затруднений.

VII способ

Вычитая из первого уравнения системы (1) второе и, разложив получившуюся разность на множители, получим:

$$(y-z)(x+y+z)=9,$$

откуда

$$y-z=\frac{9}{x+y+z}.$$

Повторив эту процедуру со вторым и третьим уравнениями, имеем

$$x-y=\frac{9}{x+y+z}=y-z.$$

Обозначив $y-z=d$, получаем $x=y+d$ и $z=y-d$.

Так как $y-z=d$ и $x+z=2y$, то $dy=3$.

Подставляя в третье уравнение системы (1) $z=y-d$, имеем $y^2+y(y-d)+(y-d)^2=19$, или $3y^2-3dy+d^2=19$, или $3y^2+d^2=28$.

Учитывая, что $dy=3$, имеем систему уравнений $\begin{cases}3y^2+d^2=28,\\ dy=3,\end{cases}$

откуда $3y^4-28y^2+9=0$.

Далее легко можно получить значения y, d, x и z.

VIII способ

Сложив первое и третье уравнения системы (1) и приравняв эту сумму с удвоенным вторым уравнением имеем:

$$x^2+z^2+2xz-2y^2-xy-yz=0,$$

или

$$x^2+x(2z-y)+z^2-2y^2-yz=0,$$

откуда

$$x=\frac{-2z+y\pm\sqrt{4z^2-4zy+y^2-4z^2+8y^2+4yz}}{2},$$

или $x=2y-z$, или $x=-z-y$, или $x+y+z=0$, что невозможно в силу уравнения $(y-z)(x+y+z)=9$ из VII способа. Далее можно использовать один из приведенных способов (III или VII) и довести решение до конца.

Рассмотренные нами восемь алгебраических способов позволяют сформулировать некоторые общие положения, полезные при решении системы уравнений с несколькими неизвестными:

1. Почленное алгебраическое сложение, умножение и деление позволяют находить зависимость между неизвестными.

2. Введение вспомогательных переменных позволяет выразить искомые неизвестные через новую переменную.

3. Применение свойства арифметической прогрессии позволило в некоторых способах упростить решение.

4. Нахождение зависимости между переменными с помощью дискриминанта также облегчает решение системы.

IX способ

Решение данной системы связано с точкой Торричелли. Точка Торричелли является следствием известной проблемы Штейнера, которая гласит, что для трех точек A, B, C, не лежащих на одной прямой, существует единственная точка M этой плоскости, такая, что сумма $AM+BM+CM$ минимальна.

Точка Торричелли обладает следующим свойством: каждая сторона треугольника ABC видна из точки M под углом в $120°$. Применяя к треугольникам ABM, ACM, BCM теорему косинусов, можно получить следующую интерпертацию системы (4): $AM=x$, $BM=y$, $CM=z$.

$$AB=\sqrt{37},\ AC=\sqrt{28},\ BC=\sqrt{19},$$
$$\angle AMB=\angle AMC=\angle BMC=120° \text{ (рис. 1)}$$

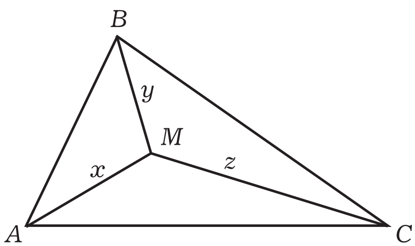

Рис. 1

Применяя поворот с центром в точке A на угол $60°$ получим образы точек B и M (B_1 и M_1) (рис. 2).

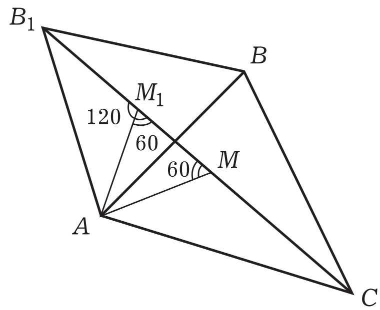

Рис. 2

Докажем, что точки B_1, M_1, M и C лежат на одной прямой.

При указанном повороте $BM=B_1M_1$ и $AM+BM+CM=B_1M_1+MM_1+MC\geq B_1C$.

$$\angle B_1M_1A+\angle AM_1M=$$
$$=\angle M_1MA+\angle AMC=180°,$$

поэтому точки M, M_1 лежат на отрезке B_1C и неравенство обращается в равенство.

Введем обозначения: $\angle BAC=\alpha$, $\angle AB_1C=\beta$.

Из треугольника ABC имеем

$$\cos\alpha=\frac{23}{\sqrt{37}\sqrt{28}},\quad \sin\alpha=\frac{13\sqrt{3}}{\sqrt{37}\sqrt{28}}.$$

Из треугольника B_1AC находим:

$$\cos\angle B_1AC=\cos(60+\alpha)=-\frac{4}{\sqrt{259}}.$$

Тогда $B_1C=9$. Применяя теорему косинусов к треугольнику AB_1C и теорему синусов к треугольнику AB_1M имеем:

$$\cos\beta=\frac{5}{\sqrt{37}},\qquad \sin\beta=\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{37}};$$

$$\frac{x}{\sin\beta}=\frac{\sqrt{37}}{\sin 60}\Rightarrow x=4.$$

Теперь, применяя теорему косинусов к треугольнику AMC, находим:

$$28=16+z^2-8z\left(-\frac{1}{2}\right) \text{ или } z^2+4z-12=0,$$

$$z=2.$$

Тогда $y=B_1C-x-z=3$.

X способ

Пусть треугольник ABC с точкой Торричелли M соответствует заданной системе (1) (как в IX способе).

Вычислим площадь треугольника ABC двумя способами:

$$S_\triangle=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle A=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{37}\sqrt{28}\frac{13\sqrt{3}}{\sqrt{37}\sqrt{28}}=\frac{13\sqrt{3}}{2}$$

(вычисление $\sin\angle A$ приведено в IX способе)

$$S_\triangle=\frac{1}{2}xy\sin 120+\frac{1}{2}xz\sin 120+\frac{1}{2}yz\sin 120=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(xy+xz+yz),$$

откуда получаем уравнение

$$xy+xz+yz=26.$$

Напишем новую систему:

$$\begin{cases} xy+xz+yz=26, \\ x^2+xz+z^2=28, \\ x+z=2y. \end{cases}$$

Третье уравнение этой системы получено неоднократно ранее. Приведем решение этой системы

$$\begin{cases} y(x+z)+xz=26, \\ x^2+xz+z^2=28, \text{ или} \\ x+z=2y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(x+z)+xz=26, \\ (x+z)^2-xz=28, \text{ или} \\ x+z=2y. \end{cases} \begin{cases} 2y^2+xz=26, \\ 4y^2-xz=28, \end{cases}$$

откуда $y=\pm 3$.

Далее нахождение значений x и z можно легко получить, пользуясь этой системой.

Последние два способа условно можно назвать геометрическими. В процессе решения системы этими способами мы неоднократно пользовались алгебраическими соотношениями, что подчеркивает единство математики как цельной науки.

Литература

1. *Ажгалиев У., Ажгалиев Ш.* Система одна, а решений пять // Журнал ИФМ. – 1994. – № 2.
2. *Гусев В.А., Возняк Г.М.* Прикладные задачи на экстремумы. – М., 1985.
3. *Тихонов В.Ю., Шарич В.З.* Командно-личный турнир школьников и математическое многоборье 2008–2010. – М.: Издательство МЦНМО, 2012.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Как отличить физика от математика? Надо задать вопрос: «Антоним слову параллельно?»...

Математик ответит:

– Перпендикулярно.

Физик:

– Последовательно.