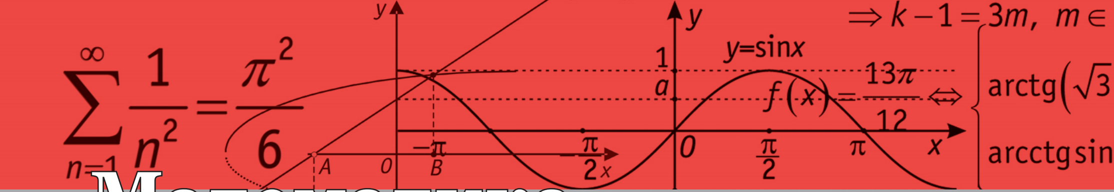


Пукас Юрий Остапович
Учитель математики МОУ «Гимназия города Троицка» Московской области.

Десятичная запись числа

Как правило, условия задач на десятичную запись числа хорошо понятны школьникам, и они порой смело берутся за решение самых трудных, даже не подозревая об этом. Возможно, что знакомство с разобранными здесь примерами поможет нашим читателям не только не бояться подобных задач, но и решать их.

Задача, которую вы решаете, может быть очень скромной, но, если она бросает вызов вашей любознательности, и, если вы решаете её собственными силами, то вы сможете испытать ведущее к открытию напряжение ума и насладиться радостью победы.

Джордж Пойя

С задачами на десятичную запись числа мы сталкиваемся ещё в начальной школе, решая математические ребусы – примеры на сложение, умножение или деление, в которых некоторые цифры заменены буквами. Эти ребусы, как правило, простые, и приятные воспоминания о них сохранились, я думаю, у многих. Более сложные ребусы встречаются потом, на различных олимпиадах. Разберём два поучительных олимпиадных примера.

1. Решите ребус: $ABBA+A+B = CDDA$. Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, а разными буквами – разные. Объясните, как получен ответ. (2001, Московская область, районный этап, 6 класс.)

Решение. Так как числа $ABBA$ и $CDDA$ оканчиваются на одинаковую цифру, то на 0 оканчивается сумма различных цифр A и B. Поэтому $A+B=10$ и $ABBA+10=CDDA$. Прибавление единицы к B во втором разряде изменило цифры в двух высших разрядах, следовательно, $B=9$, $A=1$, $D=0$ и $C=2$.

Ответ. $1991+1+9=2001$.

2. Расшифруйте числовой ребус:

$$\begin{cases} MA\cdot MA=MИP, \\ AM\cdot AM=PИM. \end{cases}$$

Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а разным буквам – разные. (2000, Московская область, областной этап, 8 класс.)

Решение. Из первого уравнения следует, что $M=1$, так как квадрат двузначного числа начинается на ту же цифру, что и само число. Следовательно, $A \neq 1$. Из второго уравнения следует, что $A \leq 3$, иначе при возведении в квадрат двузначного числа мы получим четырёхзначное. Если $A = 2$, в первом уравнении получаем $12 \cdot 12 = 144$, то есть $И = Р$, противоречие. В случае $A = 3$ получаем ответ.

Ответ: $13 \cdot 13 = 169$, $31 \cdot 31 = 961$.

Судя по следующей задаче, умение разгадывать математические ребусы может очень пригодиться на Едином государственном экзамене.

3. Метеоролог вводит в компьютер результаты измерений температуры воздуха. Температура измеряется с точностью до одной десятой градуса. За всё время наблюдений температура наблюдалась выше $20\ ^\circ\mathrm{C}$, но ниже $26\ ^\circ\mathrm{C}$. Всего метеоролог ввёл 22 измерения, но из-за усталости и плохой клавиатуры один раз вместо десятичной запятой метеоролог нажал клавишу «0», а другой раз вообще не нажал десятичную запятую. После упорядочения данных получился ряд из 22 чисел, начинающийся числами 21,3; 21,7;... Если из полученного ряда удалить два первых числа, то среднее арифметическое оставшихся равно 149,53. Если удалить два последних, то среднее арифметическое оставшихся равно 23,28. Определите, в каких числах и какие ошибки допустил метеоролог. (Диагностическая работа МИОО, 18.05.2011.)

Решение. В результате ошибок вместо чисел $\overline{2a,b}$ и $\overline{2c,d}$ получились числа $\overline{2ab}$ и $\overline{2c0d}$.

Отметим, что $a < 6$ и $c < 6$, так как наблюдаемые значения температуры меньше, чем $26\ ^\circ\mathrm{C}$. Понятно, что после упорядочения данных в ряду из 22 чисел эти числа имеют номера 21 и 22 соответственно. Данные задачи позволяют найти сумму этих двух натуральных чисел. Действительно, сумма всех 22-х чисел равна $149{,}53 \cdot 20 + 21{,}3 + 21{,}7 = 3033{,}6$. Отсюда следует, что $\overline{2a,b} + \overline{2c0d} + 23{,}28 \cdot 20 = 3033{,}6$. В результате получаем математический ребус: $\overline{2ab} + \overline{2c0d} = 2568$, или $\overline{ab} + \overline{c0d} = 368$.

Если $b + d = 8$, то $a = 6$, но по условию это невозможно, поэтому $b + d = 18$. Тогда $a = 5$ и $c = 3$. Сумма цифр $b + d = 18$, это возможно лишь в случае $b = d = 9$.

Ответ. В числе 23,9 вместо запятой поставлен ноль, а в числе 25,9 пропущена запятая.

На всякий случай напомним вам об одном очень часто используемом известном факте: остаток от деления на 9 любого числа равен остатку от деления на 9 суммы цифр этого числа. В нашей следующей задаче эту сумму цифр S удаётся найти.

4. Десятичная запись натурального числа k содержит шестьдесят три цифры. Среди них есть двойки, тройки и четвёрки. Других цифр нет. Число двоек на 22 больше числа четвёрок. Найти остаток от деления k на 9. (Олимпиада РУДН, 2008; Объединённая межвузовская математическая олимпиада, 2010.)

Решение. Пусть x – число двоек, y – число троек, z – число четвёрок. По условию $x + y + z = 63$, а так как $x = z + 22$, то получаем, что $y + 2z = 41$. Это нам сейчас пригодится: $S = 2x + 3y + 4z = 2(x + y + z) + (y + 2z) = 2 \cdot 63 + 41 = 167$. Остаток при делении на 9 этого числа равен 5.

Ответ. 5.

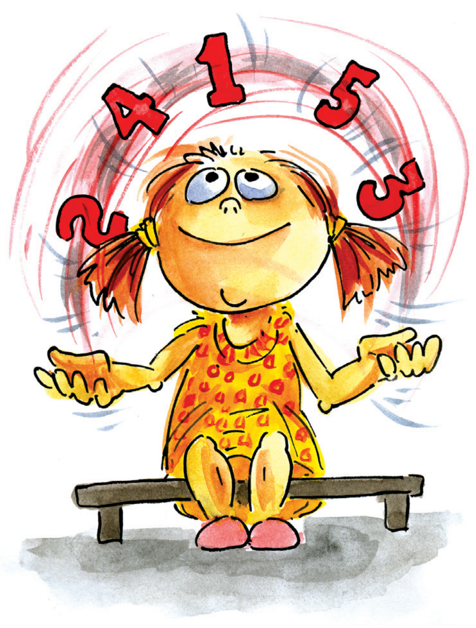
5. К десятичной записи целого числа $n \neq 0$ приписали справа какую-то цифру. К получившемуся новому числу прибавили квадрат числа n, а потом вычли 3. Получилось число $14n$. Какое число n было взято и ка-

кая цифра была приписана? (МГУ, дополнительный набор, 2007.)

Решение. Неожиданное коварство этой задачи в том, что мы привыкли приписывать цифры (справа или слева) к *натуральным* числам. Если к десятичной записи натурального числа приписать справа цифру k, то мы получим число $10n+k$, а если эту же цифру k мы припишем справа к отрицательному числу n, то получим число $10n-k$.

Учтя всё это, составляем уравнение: $10n \pm k + n^2 - 3 = 14n$, или $n^2 - 4n \pm k - 3 = 0$. Его дискриминант, делённый на 4, равен $7-k$ для положительных n, и $7+k$ для отрицательных. Небольшим перебором находим те значения цифры k, при которых соответствующие дискриминанты – квадраты целых чисел.

Ответ. 1 и 6; 2 и 7; 3 и 6; 4 и 3; −1 и 2; −2 и 9.



Бывает, что цифры не только приписывают, но и зачёркивают.

6. Уменьшится или увеличится и во сколько раз число 1/1996, если в десятичной записи этого числа зачеркнуть первую после запятой отличную от нуля цифру? (Вторая Соросовская олимпиада, 9 класс.)

Решение. При делении 1 на 1996 получается 0,00050100... При зачёркивании цифры 5 получаем число $(1/1996-1/2000)\cdot 10$. Разделив это число на 1/1996, мы найдём ответ на вопросы задачи. При делении получается $0{,}02=1/50$.

Ответ. Уменьшится в 50 раз.

7. Найдите число, которое увеличивается в 1996 раз, если в его десятичной записи поменять местами цифры, стоящие на первом и пятом после запятой местах. (Вторая Соросовская олимпиада, 10 класс.)

Решение. Поняв, что у искомого числа все цифры до запятой и первая после запятой равны нулю (иначе замена соответствующих цифр не приведёт к такому значительному увеличению), составляем уравнение $x+y/10-y/10^5=1996x$, где x – это искомое число, а y – цифра, стоящая на пятом месте после запятой. Отсюда получаем:

$$x=9999y/(10^5\cdot 1995)=$$

$$=3333y/(10^5\cdot 665)=(0{,}000050120...)y.$$

На пятом месте после запятой в числе x стоит цифра y, это значит, что $5y$ оканчивается на y, это возможно лишь при $y=5$.

Ответ. 3333/13300000.

Автор следующей задачи – призер 2-й и 3-ей Соросовских олимпиад.

8. К некоторому натуральному числу справа последовательно приписали два двузначных числа. Полученное число оказалось равным кубу суммы трёх исходных чисел. Найдите все возможные тройки исходных чисел. (О. Косухин. Московская математическая олимпиада, 2005, №11, 5.)

Решение. Первое число обозначим через a, приписываемые справа к нему двузначные числа через b и c. Ещё для удобства обозначим сумму трёх исходных чисел через x: $a+b+c=x$. По условию задачи $a\cdot 10^4+100\cdot b+c=x^3$. Убедимся, что $x<100$. Действительно, если $x\geq 100$, то

$$x^3=x^2\cdot x\geq 10^4(a+b+c)>$$
$$>a\cdot 10^4+100\cdot b+c.$$

Так как $x<100$, то a – либо однозначное, либо двузначное число. В первом случае x^3 – пятизначное число, во втором – шестизначное. Отметим также, что $x\geq 22$, так как $21^3=9261$ – четырёхзначное число.

В этот момент мы вплотную приблизились к решению задачи. Найти его помогает введённое *для удобства* обозначение $x=a+b+c$. Имея перед глазами эту запись и то, что $x^3=a\cdot 10^4+100\cdot b+c$, мы рано или поздно запишем разность $x^3-x=9999a+99b$. Получается, что произведение трёх подряд идущих чисел $x^3-x=(x-1)x(x+1)$ делится нацело на 99. Следовательно, одно из этих трёх чисел делится на 9, а другое (или то же самое) – на 11. Для $22\leq x\leq 99$ надо разобрать 7 случаев.

1) $x=44$, тогда $x+1=45$ делится на 9. Получаем $44^3=85184$, $a=8$, $b=51$, $c=84$, но их сумма не равна 44.

2) $x=45$ $(x-1=44)$, $45^3=91125$, найдено решение: $a=9$, $b=11$, $c=25$.

3) $x=54$ $(x+1=55)$, $54^3=157464$, $15+74+64>54$.

4) $x=55$ $(x-1=54)$, $55^3=166375$, $16+63+75>55$.

5) $x=89$ $(x-1=88)$, $89^3=704969$, $70+49+69>89$.

6) $x=98$ $(x+1=99)$, $98^3=941192$, $94+11+92>98$.

7) $x=99$, $99^3=970299$, $97+2+99>$ >99, к тому же 2 – не двузначное число.

Ответ. 9, 11, 25.

Следующие четыре задачи так или иначе связаны с определением числа цифр в десятичной записи натурального числа.

9. Десятичная запись числа 2^{1984} содержит m цифр, а десятичная запись числа 5^{1984} содержит n цифр. Чему равна сумма $m+n$? (Региональный этап Всероссийской математической олимпиады, 1984.)

Решение. Если десятичная запись числа A, не являющегося степенью 10, содержит k цифр, то $10^{k-1}<A<10^k$. Тогда получается, что $10^{m-1}<2^{1984}<10^m$ и $10^{n-1}<$ $<5^{1984}<10^n$. Перемножая эти неравенства, получаем: $10^{m+n-2}<$ $<10^{1984}<10^{m+n}$. Получается, что $m+n=1985$.

Ответ. 1985.

10. Решите уравнение $[n\lg 2]+$ $+[n\lg 5]=2010$ относительно натурального числа n (через $[x]$ обозначается наибольшее целое число, не превосходящее x). (Олимпиада «Покори Воробьевы горы – 2010».)

Решение. Любое число x можно представить в виде суммы его целой и дробной части: $x=[x]+\{x\}$, причём $0\leq\{x\}<1$. Воспользовавшись этим соотношением, преобразуем левую часть уравнения:

$$[n\lg 2]+[n\lg 5]=n\lg 2+n\lg 5-$$
$$-\{n\lg 2\}-\{n\lg 5\}=n-(\{n\lg 2\}+\{n\lg 5\}).$$

Числа $[n\lg 2]$, $[n\lg 5]$ и n являются целыми, поэтому целой должна быть и сумма $(\{n\lg 2\}+\{n\lg 5\})$. Эта сумма не равна нулю, так как числа $n\lg 2$ и $n\lg 5$ оба не являются целыми и их дробные части больше нуля (и меньше единицы!). Но тогда получается, что $\{n\lg 2\}+\{n\lg 5\}=1$, и, следовательно, $[n\lg 2]+[n\lg 5]=n-1=2010$.

Ответ. $n=2011$.

11. Сколько цифр содержится в десятичной записи 99991-го члена последовательности a_n, если $a_1=0$, $a_{n+1}=2a_n+1024$, $\lg 2=0{,}301029...$? (Географический факультет МГУ, 2004.)

Решение. Последовательность a_n задана рекуррентно. Попробуем найти формулу n-го члена этой последовательности в явном виде. Вычислим несколько первых последовательных членов: $a_1=0$, $a_2=1024=2^{10}$, $a_3=2\cdot 2^{10}+2^{10}=2^{10}\cdot 3$, $a_4=2^{10}\cdot 7$, $a_5=2^{10}\cdot 15$. Появляется догадка, что $a_n=2^{10}(2^{n-1}-1)$, так как числа 3, 7 и 15 (множители при 2^{10}) можно вычислить по формуле $b_n=(2^{n-1}-1)$.

Убедимся, что последовательность a_n действительно задаётся формулой $a_n=2^{10}(2^{n-1}-1)$. Для этого вычислим a_{n+1} по рекуррентной формуле:

$$a_{n+1}=2a_n+2^{10}=2\cdot 2^{10}(2^{n-1}-1)+2^{10}=$$
$$=2^{10}(2\cdot 2^{n-1}-2+1)=2^{10}(2^n-1).$$

Догадка подтвердилась. Теперь мы можем вычислить 99991-й член последовательности: $a_{99991}=2^{10}\left(2^{99990}-1\right)=$ $=2^{100000}-2^{10}$. Теперь нам надо определить, сколько цифр содержится в десятичной записи этого числа.

Разбирая задачу 7, мы отмечали, что если десятичная запись числа A содержит k цифр, то $10^{k-1}\le A<10^k$. Следовательно, $k-1\le\lg A<k$, то есть $k=[\lg A]+1$.

Теперь, чтобы ответить на вопрос задачи, нам надо найти, чему равно выражение $[\lg a_{99991}]+1$.

Получаем:

$$\left[\lg(2^{100000}-2^{10}\right]+1=$$
$$=[\lg(2^{100000}(1-2^{-99990}))]+1=$$
$$=[100000\cdot\lg 2+\lg(1-2^{-99990})]+1=$$
$$=[30102{,}9...+\lg(1-2^{-99990})]+1=$$
$$=30102+1=30103,$$

поскольку $\lg(1-2^{-99990})>-0{,}9$. В последнем можно убедиться хотя бы так:

$$\lg(1-2^{-99990})>\lg(1/3)>$$
$$>\lg(10^{-1/2})=-1/2>-0{,}9.$$

Ответ. 30103.

12. Сколько цифр содержится в десятичной записи 9998-го члена последовательности a_n, если $a_1=0$, $a_{n+1}=5a_n+500$, $\lg 5=0{,}698970...$? (Географический факультет МГУ, 2004.)

Решение. В этой задаче труднее, чем в предыдущей, найти формулу n-го члена данной последовательности. Вычислив a_2 = 500, a_3 = 500·6, a_4 = 500·31 и a_5 = 500·156, надо догадаться, что a_2 = 125·4, a_3 = 125·24, a_4 = 125·124 и a_5 = 125·624. Доказав, что $a_n=5^3(5^{n-1}-1)$, вы уже без особых трудностей найдёте ответ.

Ответ. 6990.

13. Найдите все пары натуральных чисел a и b, удовлетворяющих равенству $a^b+26=\overline{ab}$ (в правой части стоит число, получаемое приписыванием десятичной записи числа a перед десятичной записью числа b).

Решение. Задачи, подобные этой, предлагались прошлым летом (12.07.2010) во время так называемой «второй волны» сдачи ЕГЭ. По типу они наиболее близки к задаче С6 из Демонстрационных вариантов ФИПИ 2009 – 2011 годов.

Если $a = 1$, то решений нет. Пусть теперь $a > 1$.

Разберём сначала случай, когда b – однозначное число. Тогда $a^b + 26 = = 10a + b$; $a(10 - a^{b-1}) = 26 - b > 0$.

При $b \geq 5$ получается, что $(10 - a^{b-1}) < 0$, а правая часть при однозначных b положительна. Проверяем значения $b \leq 4$. Если $b = 1$, то получаем, что $9a = 5$, целых решений нет. Уравнения, получаемые при $b = 3$ и $b = 4$, имеют соответственно вид $10a - a^3 = 23$ и $10a - a^4 = = 22$. Небольшой перебор возможностей показывает, что целых решений они не имеют.

В случае $b = 2$ получаем квадратное уравнение: $a^2 + 26 = 10a + 2$, или $a^2 - 10a + 24 = 0$. Отсюда находим два значения a: $a_1 = 4$ и $a_2 = 6$.

Покажем, что других решений нет. Пусть a – n-значное число, и b – k-значное ($k \geq 2$). Тогда $10^{n-1} \leq a < 10^n$, $10^{k-1} \leq b < 10^k$, $10^{n+k-1} \leq \overline{ab} < 10^{n+k}$.

Так как по условию $a^b + 26 = \overline{ab}$, то $a^b < \overline{ab}$, откуда $b \cdot \lg a < \lg(\overline{ab})$. Так как $(n - 1) \leq \lg a < n$ и $(n + k - 1) \leq$ $\leq \lg(\overline{ab}) < (n + k)$, то последовательно усиливая неравенства, получаем: $b(n - 1) < n + k$. Прибавив и отняв единицу в правой части, получаем: $b(n - 1) < n + k + 1 - 1$, откуда $(b - - 1)(n - 1) < k + 1$. Так как число b неоднозначное, оно заметно превосходит количество знаков своей десятичной записи, другими словами, $b \gg k$. Нам хватит оценки $b < k + 8$.

Получаем $(k + 7)(n - 1) < k + 1$. Это возможно, только если a – однозначное число. Случай однозначного a надо разобрать отдельно. Для $n = 1$ наши «усиления» неравенств оказались слишком грубыми. Итак, a – однозначное число ($n = 1$). Так как

$$b \cdot \lg a < \lg(\overline{ab}) < n + k = k + 1 \text{ и } \lg a \geq \geq \lg 2 > 0{,}3,\ b \geq 10^{k-1},$$

то получаем: $0{,}3 \cdot 10^{k-1} < k + 1$, или $3 \cdot 10^k < 100(k + 1)$.

При $k = 2$ получаем $300 < 300$, неравенство уже не выполняется, не выполнится оно и при $k > 2$, так как с ростом k левая часть растёт намного быстрее, чем правая. Мы показали, что других решений, кроме пар (4; 2) и (6; 2), нет.

Ответ. $a = 4$, $b = 2$; $a = 6$, $b = 2$.

Решения следующих трёх задач ещё нигде не публиковались. Безусловно, их можно считать «прототипами» задачи 13.

14. Найдите все пары a, b натуральных чисел, обладающих следующим свойством: если к десятичной записи числа b слева приписать десятичную запись числа a, то получится число b^a. (Олимпиада мехмата МГУ, 2007, № 8.4.)

Решение. Убеждаемся сначала, что в случаях $a = 1$ или $b = 1$ равенство, о котором говорится в условии, невозможно. Далее считаем, что $a>1$ и $b>1$.

Пусть теперь $b\le 9$. Покажем, что тогда для выполнения равенства необходимо условие $a \le 9$, иначе $b^a>\overline{ab}$. Допустим, что число a – k-значное ($k \ge 2$), то есть $10^{k-1}\le a < 10^k$. Ещё мы будем использовать такую оценку: $a \ge 10^{k-1} \ge 10(k-1)$. Действительно, если $k = 2$, то $10^{k-1} = 10(k-1)$, а при $k > 2$ левая часть растёт быстрее правой. Запишем теперь цепочку неравенств: $b^a \ge 2^a \ge 2^{10(k-1)} > 10^{3(k-1)} = 10^{k+(2k-3)} \ge 10^{k+1} > \overline{ab}$, так как число $\overline{ab}$ – $(k+1)$-значное.

Конечным перебором всех пар однозначных чисел a и b находим решение $a = 2$, $b = 5$. Перебор невелик, так как b^a должно быть двузначным числом. Покажем, что других решений нет.

Пусть $10^{n-1} \le b < 10^n$, где $n \ge 2$, и $10^{k-1}\le a < 10^k$. Тогда получаем: $10^{a(n-1)} \le b^a = \overline{ab} < 10^{n+k}$, откуда следует, что $a(n - 1) < n + k$. Если $a \ge 3$, то, используя очень грубую оценку $a - 2 \ge k$, после преобразований получаем: $n(a - 1) < 2(a - 1)$, или $n < 2$. Но это уже разобранный нами случай однозначного числа b.

Если $a = 2$ (тогда $k = 1$), из неравенства $a(n - 1) < n + k$ получим, что $n < 3$. Осталось рассмотреть случай $a = 2$ и $n = 2$. Получаем квадратное уравнение $b^2 = 200 + b$, которое не имеет целых решений.

Ответ. (2, 5).

15. Найдите все пары a, b натуральных чисел, обладающих следующим свойством: если к десятичной записи числа b слева приписать десятичную запись числа a, то получится число b^{a+b}. (Олимпиада мехмата МГУ, 2007, № 9.2.)

Решение. Для натуральных чисел a и b таких, что $b^{a+b} = \overline{ab}$, выполняется неравенство $b^a < \overline{ab}$. Как показано в решении задачи 14, это может иметь место лишь для однозначных чисел a и b. Конечным перебором всех таких пар находим ответ: $a = 3$, $b = 2$.

Ответ. (3, 2).

16. Найдите все тройки a, b, c натуральных чисел, обладающих следующим свойством: если к десятичной записи числа c слева приписать десятичную запись числа b, а затем к полученному числу слева приписать десятичную запись числа a, то получится число c^{a+b}. (Олимпиада мехмата МГУ, 2007, №10, 6.)

Комментарий. Как правило, задачи с номером 10.6 на олимпиадах мехмата МГУ остаются нерешёнными участниками. Мне пока тоже не удалось найти приемлемого (для публикации) решения этой задачи. Вся надежда на вас, читатели!

Ответ. (1, 2, 5) и (2, 1, 6).