**Погосян Никита Богданович**
*Учитель математики Физико-математической школы имени А. Шагиняна, г. Ереван.*

# Делимость на числа вида $10n\pm1$

В статье представлен алгоритм реализации признаков делимости чисел на 9 и 11, отличный от широко известных. Как станет ясно ниже, этот алгоритм будет применён при проверке делимости на числа, имеющие вид $10n\pm1$, и получении частного (если деление выполняется без остатка). Этот подход также предоставляет возможность получить период бесконечных десятичных периодических дробей.

На основе известных признаков делимости чисел на 9 и 11 представим иной алгоритм реализации указанных признаков. Забегая вперёд, отметим некоторые особенности алгоритма, который будет описан ниже.

Во-первых, он простой, естественный, и поэтому его легче запомнить и применять.

Во-вторых, он будет обобщён и применён при делении на числа, имеющие вид $10n\pm1$, т. е. на числа, которые заканчиваются цифрами 1 или 9.

В-третьих, он предоставляет возможность получить частное (если деление выполняется без остатка), а в общем случае – наибольший общий делитель (НОД) делимого и делителя.

В-четвёртых, в отличие от деления столбиком, здесь не нужно «угадывать» цифры частного, а действия умножения и вычитания (или сложения) выполняются с уменьшившимися числами.

И, наконец, он предоставляет возможность получить период бесконечных десятичных периодических дробей.

## 1. Деление на числа вида $10n+1$

Описание алгоритма начнём с примера проверки делимости некоторого числа А на 11.

*Отнимем последнюю цифру числа А от числа, получающегося из А вычёркиванием последней цифры. Указанное действие применяем повторно к полученному результату, пока этот результат превышает 11. Если А делится на 11 без остатка, то в конце всегда получим 0. Верно и обратное утверждение: если в конце получим 0, то А* *делится на 11 без остатка, а частное этого деления – число, составленное из вычеркнутых цифр в обратном порядке.*

**Пример 1.** Проиллюстрируем описанный выше алгоритм при проверке делимости числа 358897 на число 11. Следуя описанию, получим схему, представленную ниже, где перед каждым шагом алгоритма подчёркнуты вычеркнутые цифры.

$$\begin{array}{r} 35889\underline{7} \\ -\qquad 7 \\ \hline 3588\underline{2} \\ -\qquad 2 \\ \hline 358\underline{6} \\ -\qquad 6 \\ \hline 35\underline{2} \\ -\qquad 2 \\ \hline 3\underline{3} \\ -\qquad 3 \\ \hline 0 \end{array}$$

В конце получается 0, значит, число 358897 делится на 11 без остатка, а частное равно числу, составленному из вычеркнутых цифр: $358897 = 11 \cdot 32627$.

Приступим к обобщению и обоснованию описанного выше алгоритма для чисел вида $10n+1$ (заканчивающихся цифрой 1).

Пусть $n$ и $N$ – натуральные числа, $k$ – цифра, $m$ – делитель числа $10n+1$. Рассмотрим делимость чисел $10N+k$ и $N-nk$ на число $10n+1$. Заметим, что

$$(10N+k)-10(N-nk)=k(10n+1). \quad (1)$$

Из равенства (1) и из того, что числа $10n+1$ и 10 – взаимно простые, следует, что если число $N-nk$ делится на $m$ без остатка, то число $10N+k$ делится на $m$. Верно и обратное утверждение.

Пусть число $10N+k$ делится на $10n+1$. Тогда

$$10N+k=(10n+1)\cdot P_1, \qquad (2)$$

$$N-nk=(10n+1)\cdot P_2. \qquad (3)$$

Из равенств (1), (2) и (3) получим:

$$P_1=10P_2+k.$$

Сформулируем алгоритм делимости данного числа на $10n+1$.

*Последнюю цифру данного числа $A$ умножаем на $n$ и результат отнимаем от числа, которое получается из $A$ вычёркиванием последней цифры. Указанное действие повторяем по отношению к полученному результату, пока результат превышает $10n+1$. Если $A$ делится на $10n+1$, то в конце получим 0, а частное этого деления равно числу, состоящему из вычеркнутых цифр в обратном порядке. Если результат не равен 0, то $A$ не делится на $10n+1$ без остатка, но НОД результата и $10n+1$ равен НОД $A$ и $10n+1$.*

Приведём примеры применения данного алгоритма.

**Пример 2.** Чтобы проверить делимость числа 775434 на 31 $(n=3)$, данное число представим в виде $10N+k$, где $k$ – цифра $(77543\cdot10+4)$, и последовательно применим формулу $N-3k$ $(77543-3\cdot4)$ до тех пор, пока в результате не получим число, не превосходящее число 31. Перед каждым шагом алгоритма подчёркнуты вычеркнутые цифры.

$$\begin{array}{r} -\,77543\underline{4} \\ 12 \\ \hline -\,7753\underline{1} \\ 3 \\ \hline -\,775\underline{0} \\ 0 \\ \hline -\,77\underline{5} \\ 15 \\ \hline -\,6\underline{2} \\ 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

Результат 0 показывает, что число 775434 без остатка делится на 31, а частное равно числу, состоящему из вычеркнутых цифр, т. е. $775434=31\cdot25014$.

**Пример 3.** Проверить делимость числа 67483 на 91 $(n=9)$.

Представим 67483 в виде $10N+k$ $(6748\cdot10+3)$ и последовательно применим формулу $N-9k$ $(6748-3\cdot9)$, пока результат превышает 91:

$$\begin{array}{r} -\,6748\underline{3} \\ 27 \\ \hline -\,672\underline{1} \\ 9 \\ \hline -\,66\underline{3} \\ 27 \\ \hline 39 \end{array}$$

Так как результат не 0, значит, число 67483 не делится на 91, но

$$\text{НОД}(67483,\,91)=\text{НОД}(39,\,91)=13.$$

**Пример 4.** Найти наименьшее число, заканчивающееся числом 6914, которое делится на 41.

Пусть $\overline{n6941}$ – искомое число. Тогда получаем схему:

$$\begin{array}{r} -\,n691\underline{4} \\ 16 \\ \hline -\,n67\underline{5} \\ 20 \\ \hline -\,n4\underline{7} \\ 28 \\ \hline -\,(n-3)6 \\ 24 \\ \hline 0 \end{array}$$

Значит, $n-3=24$, $n=27$, ответ:

$$276914=41\cdot6754.$$

## 2. Деление на числа вида $10n-1$

Описание алгоритма начнём с примера проверки делимости некоторого числа $A$ на 9. Последнюю цифру $A$ прибавим к числу, получающемуся из $A$ вычёркиванием последней цифры. Указанное действие повторяем по отношению к полученному результату до тех пор, пока результат превышает 9. Если $A$ делится на 9 без остатка, то в конце получим 9. Верно и обратное утверждение: если в конце получим 9, то $A$ делится на 9 без остатка, а частное этого деления получим, если добавим 1 к числу, состоящему из цифр, равных дополнениям до девяти подчёркнутых цифр в том же порядке.

**Пример 5.** Проиллюстрируем описанный выше алгоритм при проверке делимости 446742 на 9. Действуя так, как было описано выше, получим следующую схему (перед каждым шагом алгоритма подчёркнуты вычеркнутые цифры):

$$\begin{array}{r}
+\begin{array}{r} 44674\underline{2} \\ 2 \end{array} \\ \hline
+\begin{array}{r} 4467\underline{6} \\ 6 \end{array} \\ \hline
+\begin{array}{r} 447\underline{3} \\ 3 \end{array} \\ \hline
+\begin{array}{r} 45\underline{0} \\ 0 \end{array} \\ \hline
+\begin{array}{r} 4\underline{5} \\ 5 \end{array} \\ \hline
9
\end{array}$$

Так как в конце получается 9, значит, число 446742 делится на 9 без остатка, а частное равно числу, составленному из цифр $9-\underline{5}=4$, $9-\underline{0}=9$, $9-\underline{3}=6$, $9-\underline{6}=3$, $9-\underline{2}+1=8$, т. е. $446742=9\cdot 49638$.

Приступим к обобщению и обоснованию вышеописанного алгоритма для чисел вида $10n-1$ (заканчивающихся цифрой 9).

Пусть $n$ и $N$ – натуральные числа, $k$ – цифра, $m$ – делитель числа $10n-1$. Рассмотрим делимость чисел $10N+k$ и $N+nk$ на число $10n-1$.

Заметим, что

$$10(N+nk)-(10N+k)=(10n-1)k. \quad (4)$$

Из равенства (4) и из того, что числа $10n-1$ и 10 взаимно простые, следует, что если число $N+nk$ делится на $m$ без остатка, то число $10N+k$ тоже делится на $m$. Верно и обратное утверждение.

Пусть число $10N+k$ делится на $10n-1$. Тогда

$$10N+k=(10n-1)\cdot P_1, \quad (5)$$

$$N+nk=(10n-1)\cdot P_2. \quad (6)$$

Из равенств (4), (5) и (6) получим

$$P_1=10P_2-k.$$

Сформулируем алгоритм делимости на $10n-1$.

*Последнюю цифру данного числа A умножим на n и результат прибавим к числу, которое получается из A вычёркиванием последней цифры. Указанное действие повторяем по отношению к полученному результату, пока он превышает $10n-1$. Если A делится на $10n-1$, то в конце получим $10n-1$, а частное этого деления получается, если добавить 1 к числу, состоящему из цифр, равных дополнениям до 9 вычеркнутых цифр в обратном порядке. Если результат не равен $10n-1$, то A не делится на $10n-1$ без остатка, но НОД результата и $10n-1$ равен НОД A и $10n-1$.*

Приведём примеры применения данного алгоритма.

**Пример 6.** Чтобы проверить делимость числа 681283 на 19 $(n=2)$, 681283 представим в виде $10N+k$, где $k$ – цифра $(68128\cdot 10+3)$, и последовательно применим формулу $N+nk$ $(68128+2\cdot 3)$, пока в результате не получим число, не превосходящее число 19. Перед каждым шагом алгоритма подчёркнуты вычеркнутые цифры.

$$\begin{array}{r}
+\begin{array}{r} 68128\underline{3} \\ 6 \end{array} \\ \hline
+\begin{array}{r} 6813\underline{4} \\ 8 \end{array} \\ \hline
+\begin{array}{r} 682\underline{1} \\ 2 \end{array} \\ \hline
+\begin{array}{r} 68\underline{4} \\ 8 \end{array} \\ \hline
+\begin{array}{r} 7\underline{6} \\ 12 \end{array} \\ \hline
19
\end{array}$$

Результат 19 показывает, что число 681283 делится на 19 без остатка, а частное равно числу, состоящему из цифр $9-\underline{6}=3$, $9-\underline{4}=5$, $9-\underline{1}=8$, $9-\underline{4}=5$, $9-\underline{3}+1=7$, т. е. $681283=19\cdot 35857$.

**Пример 7**. Проверить делимость числа 1844761 на 69 $(n=7)$.

Представим 1844761 в виде $10N+k$: $1844761=184476\cdot 10+1$ и последовательно применим формулу $N+nk$ $(184476+7\cdot 1=184483)$, пока результат превышает 69:

$$
\begin{array}{rr}
 & 184476\underline{1}\\
+ & 7\\ \hline
 & 18448\underline{3}\\
+ & 21\\ \hline
 & 1846\underline{9}\\
+ & 63\\ \hline
 & 190\underline{9}\\
+ & 63\\ \hline
 & 25\underline{3}\\
+ & 21\\ \hline
 & 46
\end{array}
$$

Так как результат не 69, значит, число 1844761 не делится на 69, но НОД (1844761, 69)=НОД (46, 69)=23.

**Пример 8.** Найти наименьшее число, заканчивающееся числом 72655, которое делится на 19.

Пусть искомое число $\overline{n72655}$. Тогда получаем схему:

$$
\begin{array}{rr}
 & n7265\underline{5}\\
+ & 10\\ \hline
 & n727\underline{5}\\
+ & 10\\ \hline
 & n73\underline{7}\\
+ & 14\\ \hline
 & n8\underline{7}\\
+ & 14\\ \hline
 & (n+2)2\\
+ & 4\\ \hline
 & n+6
\end{array}
$$

Значит, $n+6=19$, т. е. $n=13$.

Ответ: $1372655=19\cdot 72245$.

Заметим, что описанные выше алгоритмы можно применять при делении на числа, оканчивающиеся цифрами 3 и 7 (так как $\ldots 3\cdot 3=\ldots 9$, $\ldots 7\cdot 3=\ldots 1$).

**Пример 9.** С целью проверки делимости 602693 на 13 применим алгоритм деления данного числа на число 39, так как $13\cdot 3=39$ (т. е. $n=4$). Если данное число делится на 13, то в конце должно быть 0, 13 или 26.

$$
\begin{array}{rr}
 & 60269\underline{3}\\
+ & 12\\ \hline
 & 6028\underline{1}\\
+ & 4\\ \hline
 & 603\underline{2}\\
+ & 8\\ \hline
 & 61\underline{1}\\
+ & 4\\ \hline
 & 6\underline{5}\\
+ & 20\\ \hline
 & 26
\end{array}
$$

Следовательно, число 602693 делится на 13.

**Пример 10.** С целью проверки делимости числа 43673 на 17 применим алгоритм деления данного числа на число $17\cdot 3=51$ (то есть $n=5$).

Если данное число делится на 17, то в конце должно получиться 0, 17 или 34.

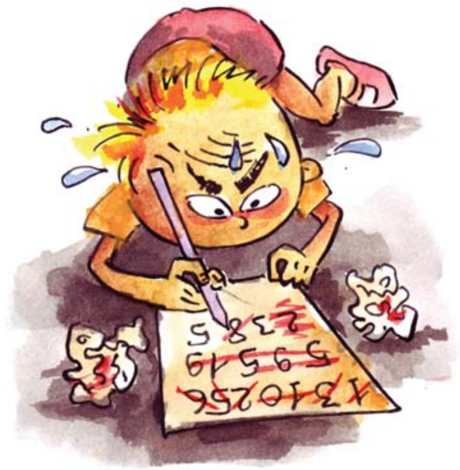
$$
\begin{array}{rr}
 & 4367\underline{3}\\
- & 15\\ \hline
 & 435\underline{2}\\
- & 10\\ \hline
 & 42\underline{5}\\
- & 25\\ \hline
 & 17
\end{array}
$$

Итак, число 43673 делится на 17.

## 3. Определение периода в десятичной записи обыкновенной дроби

Известно, что если знаменатель обыкновенной несократимой дроби содержит простой множитель, отличный от 2 и 5, то такая дробь превращается в бесконечную периодическую десятичную дробь.

Ниже приводится алгоритм превращения такой обыкновенной дроби в бесконечную десятичную дробь, без деления числителя на знаменатель.



Рассмотрим случай, когда знаменатель дроби имеет вид $10n+9$.

Для любого числа вида $10n+9$ число $n+1$ назовём коэффициентом числа $10n+9$. Последовательность, построенная по алгоритму, изложенному ниже, назовём последовательностью числа $10n+9$.

В качестве первого члена последовательности числа $10n+9$ берётся любое число вида $10m+k$, меньшее числа $10n+9$, где $k$ – любая цифра, а $m$ – целое число, $0 \le m \le n$ (можно начинать с 1). Каждый следующий член, начиная со второго, вычисляется по предшествующему члену $10m+k$ по формуле $m+(n+1)k$ (если член – однозначное число, то $m=0$). Вычисления производятся до тех пор, пока снова не получится первый член последовательности.

Если какое-нибудь число, меньшее $10n+9$, не является членом построенной последовательности, то можно взять его в качестве первого члена и построить ещё одну последовательность числа $10n+9$.

Докажем некоторые свойства этих последовательностей.

Пусть $10m+k<10n+9$.

1. Каждый член последовательности $10n+9$ меньше числа $10n+9$. Действительно,

$$10n+9-\left(m+(n+1)k\right)=$$

$$=n-m+(n+1)(9-k)>0,$$

так как $n-m\ge 0$, $9-k\ge 0$, и для выполнения первоначального неравенства необходимо, чтобы $n-m$, $9-k$ одновременно были не равны нулю.

2. Члены разных последовательностей числа $10n+9$ не равны. Пусть $m_1+(n+1)k_1=m_2+(n+1)k_2$.

Тогда $(m_1-m_2)=(n+1)(k_2-k_1)$. (1)

Ясно, что если $k_1=k_2$, то $m_1=m_2$. Но если $k_1\ne k_2$, то, так как $|k_1-k_2|\ge 1$, из равенства (1) следует $|m_1-m_2|\ge n+1$, что невозможно ввиду того, что $0\le m_1$, $m_2\le n$.

Из свойств 1 и 2 следует, что для любого числа вида $10n+9$ существует одна или несколько последовательностей числа $10n+9$, причём каждое число, меньшее $10n+9$, является членом только одной последовательности числа $10n+9$.

3. Если $r_1$ и $r_2$ – последовательные члены некоторой последовательности числа $10n+9$ (или $r_2$ – первый член, а $r_1$ – последний), то $10r_2 - r_1$ без остатка делится на число $10n+9$, причём частное равно последней цифре числа $r_1$.

Действительно, если $r_1 = 10m + k$, тогда $r_2 = m + (n+1)k$ и

$$10r_2 - r_1 = 10m + 10(n+1)k - \\ -10m - k = (10n+9)k. \qquad (2)$$

Так как $10n+9$ и 10 взаимно простые числа, из равенства 2 следует следующее свойство.

4. Если некоторый член последовательности числа $10n+9$ (например $r_1$) без остатка делится на какой-нибудь делитель числа $10n+9$, то все члены этой последовательности (в частности $r_2$) делятся на этот делитель.

Пусть $a$ – делитель числа $10n+9$ $(10n+9 = a \cdot q)$, $N$ – натуральное число, $k$ – цифра. Тогда имеет место теорема.

*Теорема 1.* Если при делении числа $10N+k$ на $10n+9$ частное равно $P_1$, а остаток $r_1$, а при делении числа $N+(n+1)k$ на $10n+9$ частное равно $P_2$, а остаток $r_2$, то в некоторой последовательности числа $10n+9$ число $r_1$ предшествует числу $r_2$ и $P_1 = 10 \cdot P_2 - k + k_1$, где $k_1$ – последняя цифра числа $r_1$.

*Доказательство.* Умножим равенство $N+(n+1)k = (10n+9)P_2 + r_2$ на 10 и из результата вычтем $10N + k = (10n+9)P_1 + r_1$, получим:

$$(10n+9)k = (10n+9)\times \\ \times\left(10P_2 - P_1\right) + \left(10r_2 - r_1\right).$$

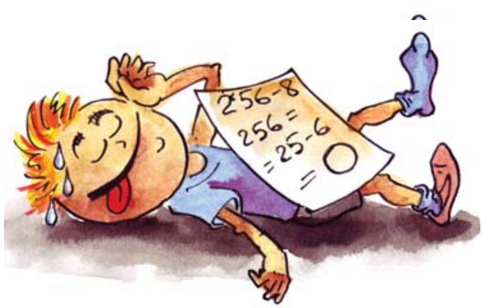
Следовательно, число $10r_2 - r_1$ без остатка делится на $10n+9$, и, так как числа $r_2$ и $r_1$ меньше $10n+9$, частное – однозначное число.

Пусть $r_1 = 10y + k_1$, где $k_1$ – цифра. Учитывая, что $r_2 = y + (n+1)k_1$, получаем, что

$$\frac{10r_2 - r_1}{10n+9} = \frac{10y + 10(n+1)k_1 - (10y + k_1)}{10n+9} = \\ = \frac{10nk_1 + 9k_1}{10n+9} = k_1,$$

т. е. имеем последнюю цифру числа $r_1$.

*Теорема 2.* Период правильной дроби $\dfrac{N}{10n+9}$ при записи в виде бесконечной десятичной дроби состоит из последних цифр всех членов последовательности числа $10n+9$, содержащих число $N$, в следующем порядке: начиная с члена последовательности, стоящего перед $N$, до первого члена последовательности, затем, продолжая с последнего члена последовательности до члена равного $N$ включительно.



*Доказательство.* Пусть последовательность числа $10n+9$ содержит число $N = r_i$ Тогда из равенства (2) имеем:

$$10r_i - r_{i-1} = (10n+9)k,$$

где $k$ – последняя цифра числа $r_i$.

Перепишем данное равенство в виде:

$$\frac{N}{10n+9} = \frac{k}{10} + \frac{r_{i-1}}{(10n+9)\cdot 10}. \qquad (3)$$

Из этого равенства следует, что первая цифра периода числа $\frac{N}{10n+9}$ равна $k$, т. е. последней цифре числа $r_i$, а вторая цифра равна первой цифре периода числа $\frac{r_{i-1}}{10n+9}$. Используя рекурсивные соотношения, получаем доказательство теоремы.

С целью полного решения задачи приведём некоторые замечания.

1. Если знаменатель несократимой обыкновенной дроби заканчивается цифрой 1, 3 или 7, то, умножая числитель и знаменитель дроби соответственно на 9, 3 или 7, получим дробь со знаменателем, имеющим вид $10n+9$, заканчивающимся цифрой 9.

2. Если знаменатель дроби равен $10^k \cdot m$, а $m$ взаимно простое с числом 10 и с числителем дроби, то такая дробь превращается в бесконечную десятичную дробь, в которой число цифр в предпериоде равно $k$.

3. Если знаменатель имеет вид $2^k \cdot 5^n \cdot m$, а $m$ взаимно простое с числом 10 и с числителем дроби, то, умножив числитель и знаменатель данной дроби на $2^{n-k}$ (если $n > k$) или на $5^{n-k}$ (если $n > k$), мы сведём задачу к пункту 2.

Приведём примеры применения указанных выше алгоритмов.

**Пример 11.** Дроби $\frac{5}{19}$, $\frac{11}{19}$ и $\frac{17}{19}$ представить в виде бесконечной десятичной дроби.

*Решение.* Построение последовательности числа 19 начнём с числа 1. Представим число 1 в виде $10m+k$ $(m=0, k=1)$ и последовательно применим преобразование $m+2k$ до тех пор, пока заново не получим 1:

$$1 \to 2 \to 4 \to 8 \to 16 \to 13 \to 7 \to$$
$$\to 14 \to 9 \to 18 \to 17 \to 15 \to$$
$$\to 11 \to 3 \to 6 \to 12 \to 5 \to 10 \to \underline{1}.$$

В силу теоремы период числа $\frac{11}{19}$ состоит из последних цифр всех членов последовательности, начиная с 15 (член последовательности перед членом 11), до первого члена последовательности, затем, продолжая с последнего члена последовательности до члена, равного 11, т. е.:

$$\frac{11}{19} = 0,(578947368421052631).$$

Аналогично получим:

$$\frac{5}{19} = 0,(263157894736842105) \text{ и}$$

$$\frac{17}{19} = 0,(894736842105263157).$$

**Пример 12.** Сколько цифр имеет период десятичной записи дроби $\frac{14}{69}$?

*Решение.* Построим последовательность числа 69, которая начинается с числа 14. Число 14 представим в виде $10m+k$ $(m=1, k=4)$ и последовательно применим преобразование $m+7k$, пока снова не получим число 14:

$$14 \to 29 \to 65 \to 41 \to 11 \to 8 \to 56 \to 47 \to$$

$$\to 53 \to 26 \to 44 \to 32 \to 17 \to 50 \to 5 \to$$

$$\to 35 \to 38 \to 59 \to 68 \to 62 \to 20 \to 2 \to \underline{14}.$$

Следовательно, период числа $\frac{14}{69}$ состоит из 22 цифр, то есть: $\frac{14}{69} = 0,(2028985507246376811594)$.

**Пример 13.** Дроби $\frac{1}{13}$, $\frac{9}{13}$, $\frac{11}{13}$ представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

*Решение.* Представим данные дроби в виде:

$$\frac{1}{13} = \frac{3}{39},\ \frac{9}{13} = \frac{27}{39},\ \frac{11}{13} = \frac{33}{39}.$$

Построим последовательность числа 39, начинающуюся с числа 3.

$$3 \to 12 \to 9 \to 36 \to 27 \to 30 \to \underline{3}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{13} = \frac{3}{39} = 0,(076923) \text{ и}$$

$$\frac{9}{13} = \frac{27}{39} = 0,(692307).$$

Чтобы представить дробь $\frac{11}{13}$ в виде десятичной дроби, необходимо построить последовательность числа 39, которая начинается с числа 33 (так как число 33 отсутствует в уже построенной последовательности):

$$33 \to 15 \to 21 \to 6 \to 24 \to 18 \to \underline{33}.$$

Следовательно, $\frac{11}{13} = \frac{33}{39} = 0,(846153)$.

**Пример 14.** Представить дроби $\frac{7}{52}$ и $\frac{36}{65}$ в виде бесконечной десятичной дроби.

*Решение.* Преобразуем данные дроби:

$$\frac{7}{52} = \frac{7}{2^2 \cdot 13} = \frac{7 \cdot 5^2}{13 \cdot 2^2 \cdot 5^2} = \frac{175}{13 \cdot 100} =$$

$$= \frac{175}{13} : 100 = 13\frac{6}{13} : 100 = 13\frac{18}{39} : 100$$

$$\frac{36}{65} = \frac{36}{5 \cdot 13} = \frac{36 \cdot 2}{130} = \frac{72}{13} : 10 =$$

$$= 5\frac{7}{13} : 10 = 5\frac{21}{39} : 10$$

Используя последовательность числа 39 предыдущего примера, получим:

$$\frac{7}{52} = 13\frac{18}{39} : 100 = 13,(461538) : 100 =$$

$$= 0,13(461538)$$

$$\frac{36}{65} = 5\frac{21}{39} : 10 = 5,(538461) : 10 =$$

$$= 0,5(538461).$$