Пукас Юрий Остапович
Учитель математики МАОУ «Гимназия города Троицка» Москва.

Что должен знать школьник, решая на экзамене задание С4

Планиметрические задачи в вариантах ЕГЭ по математике (задания С4) – это довольно сложные задачи на вычисление длин, углов, площадей, связанных с плоскими фигурами. Их характерной особенностью является то, что часто (как правило!) требуется рассмотрение двух случаев, а это приводит к двум разным ответам. Разбирая типичные задачи вариантов последних лет, мы будем обращать ваше внимание на наиболее часто встречающиеся в них геометрические конфигурации и свойства (теоремы), используемые для вычисления неизвестных величин.

В первую очередь напомним важную терему о касательной и секущей, она нам много раз ещё пригодится: *если из точки, лежащей вне окружности, проведены к окружности касательная и секущая, то произведение всей секущей на её внешнюю часть равно квадрату касательной*. Секущих, проведённых из одной точки, может быть несколько (на рис. 1 их три), поэтому имеют место равенства: $AH^2 = AE \cdot AD = AC \cdot AB = AG \cdot AF$.

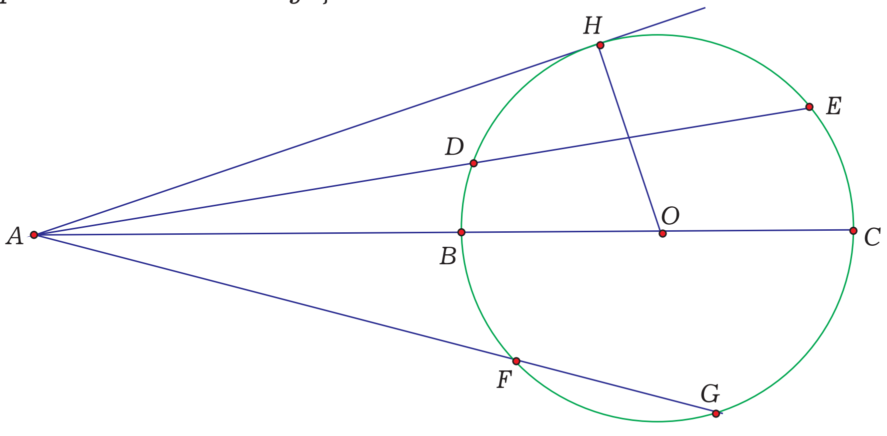

Рис. 1

При решении экзаменационных и олимпиадных задач может пригодиться и обратное утверждение: *если для точек, расположенных на сторонах угла EAG имеет место равенство $AE \cdot AD = AG \cdot AF$, то точки D, E, F и G лежат на одной окружности.* На всякий случай напомним также, что $OH \perp AH$. Теперь переходим к разбору задач, вспоминая при необходимости и другие нужные нам важные факты и теоремы.

Задача 1 (олимпиада «Ломоносов», 2007). На стороне AC треугольника ABC взята такая точка D, что окружность, проходящая через точки A, B и D, касается прямой BC. Найти AD, если $AB = 18$, $AC = 36$ и $BD = 15$.

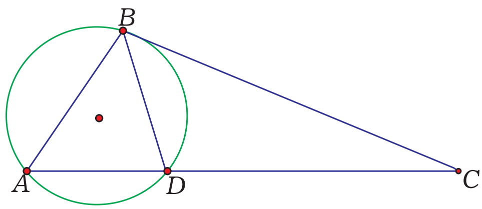

Рис. 2

Решение. Треугольники ABC и CBD подобны по двум углам: угол ACB у них общий, а вписанный угол BAD и угол DBC между касательной и хордой равны половине дуги BD (рис. 2). Поэтому $AC/BC = AB/BD = BC/DC$. Из первого равенства находим, что $BC = 30$, из второго – $DC = 25$, поэтому $AD = AC - DC = 11$. Заметим, что из равенства $AC/BC = BC/DC$ следует утверждение упомянутой выше теоремы: $BC^2 = AC \cdot DC$.

Ответ. 11.

Задача 2. Две окружности, касающиеся некоторой прямой в точках A и B, пересекаются в точках C и D. Известно, что $AB = 8$, $CD = 15$. Найдите медиану CE треугольника ABC.

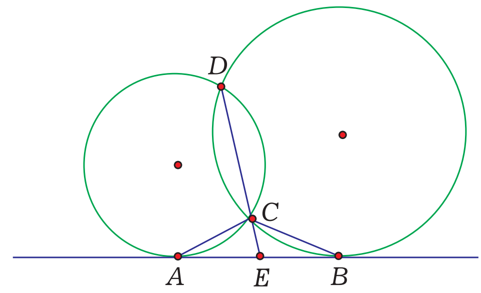

Рис. 3

Решение. Сначала покажем, что точки C, D и E лежат на одной прямой. Пусть прямая CD пересекает отрезок AB в некоторой точке F. Тогда FA – это касательная к левой окружности, а FB – к правой. По теореме о касательной и секущей $AF^2 = FC \cdot FD = FB^2$. Получается, что $AF = FB = 4$, и точка F совпадает с точкой E. Пусть длина отрезка CE (внешней части секущей) равна x (рис. 3). Получаем: $4^2 = x(x + 15)$, или $x^2 + 15x - 16 = 0$, откуда находим, что $x = 1$. Итак, медиана $CE = 1$.

А нет ли второго случая? Вот он! Точка D находится между точками C и E (рис. 4).

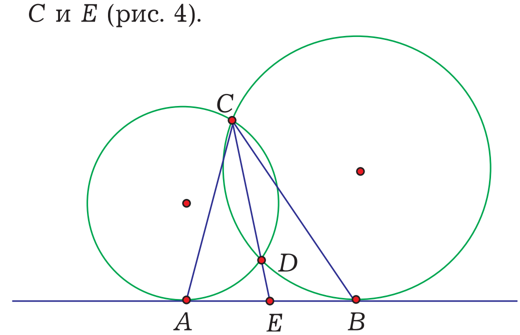

Рис. 4

В этом случае $DE = x = 1$, а медиана $CE = x + 15 = 16$.

Ответ. 1 или 16.

Задача 3 (ЕГЭ-2011). В треугольнике PQR угол R – прямой, RA – высота, QB – медиана. Прямые AB

и QR пересекаются в точке C, лежащей на луче QR. Окружность, проходящая через точки A и B, касается прямой QR в точке D. Найдите DR, если известно, что $BC = 25$ и $AB = 11$.

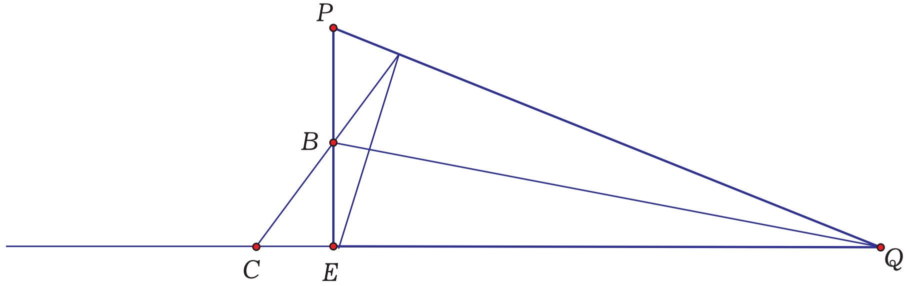

Рис. 5

Решение. Вскоре станет ясно, что эта задача аналогична только что разобранной, но сначала надо понять, для чего проведены высота и медиана. В ряде задач (с ними мы ещё не раз встретимся, см., например, задачу 8) *высота, опущенная на гипотенузу*, играет особую роль, и сейчас это может отвлечь наше внимание. Но здесь для решения важно лишь то, что треугольник RAP – прямоугольный, и поэтому его медиана AB, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы PR: $PB = BR = AB = 11$.

Здесь мы применили важную **теорему** о том, что *медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы*. Верна (и важна) и обратная **теорема**: *если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.*

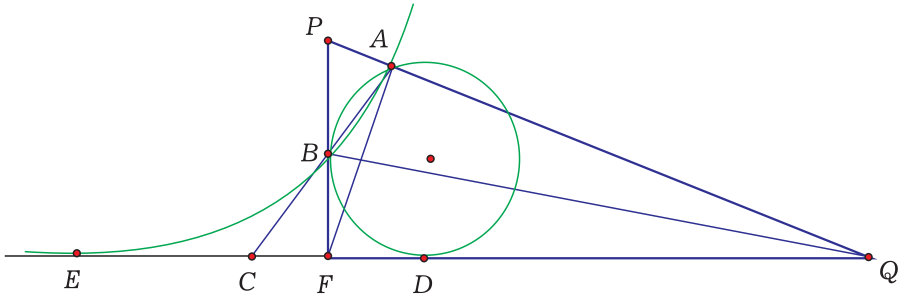

Рис. 6

Два случая касания окружности, проходящей через точки A и B, с прямой QR показаны на рис. 6. Это точки D и E соответственно. Теперь из треугольника CRB по теореме Пифагора находим $CR = 6\sqrt{14}$, а затем применяем теорему о касательной и секущей: $AC{\cdot}CB = EC^2 = CD^2$. Отсюда находим, что $EC = CD = 30$. Тогда $ER = EC + CR = 30 + 6\sqrt{14}$, а $RD = CD – CR = 30 - 6\sqrt{14}$.

Ответ. $30 \pm 6\sqrt{14}$.

Задача 4 (задание С4 из демонстрационных вариантов 2009 – 2013 гг.). На стороне BA угла ABC, равного 30°, взята такая точка D, что $AD = 2$ и $BD = 1$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, D и касающейся прямой BC.

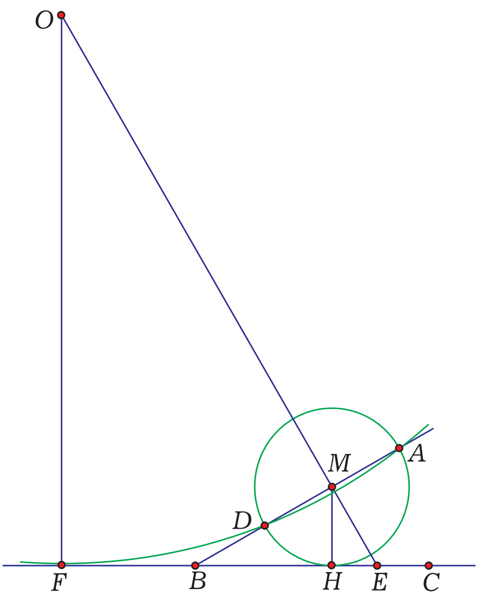

Рис. 7

Здесь, как и в двух предыдущих задачах, две касательные (BF и BH) и одна секущая BA, общая для двух окружностей (рис. 7). Решение этой задачи (даже два) вы без труда найдёте на официальном сайте ФИПИ, а её ответ ($R_1 = OF = 7$; $R_2 = MH = MA = MD = 1$) совпадёт с ответом следующей задачи (№5). Неудивительно, ведь это – одна и та же задача! Надо только понять, что от треугольника PQR нам нужен только угол QRP, на сторонах которого разворачивается действие, а длина 27 отрезка PR не играет никакой роли.

Задача 5 (тестирование мехмата МГУ, 2004). В треугольнике PQR известны стороны $PR = 27$ и $QR = 3$. На стороне QR взята такая точка S, что $QS:QR = 2:3$. Найти радиус окружности, проходящей через точки Q и S и касающейся прямой PR, если угол $PRQ = 30^o$.

В задачах 4 и 5 центры меньших окружностей совпадают с серединами отрезков AD и QS соответственно. Усложним задачу 5, изменив в её условии величину угла.

Задача 6. На стороне QR угла QRP, равного 60^o, взята такая точка S, что $QS = 2$ и $SR = 1$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки Q и S и касающейся прямой PR (рис. 8).

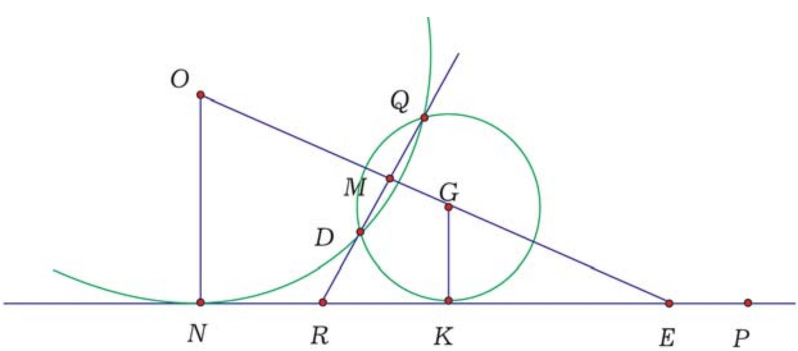

Рис. 8

Решение. Точка M – середина отрезка SQ, поэтому $RS = SM = MQ =$ $= 1$. Центры окружностей, проходящих через точки Q и S (и касающихся прямой PR в точках N и K), лежат на прямой ME, перпендикулярной SQ. Обозначим $R_1 = ON$ и $R_2 = GK$.

$NR^2 = RK^2 = RQ \cdot RS$, $NR = RK = \sqrt{3}$.

Так как угол QRP равен 60^o, $RE =$ $= 2RM = 4$. Далее: $NE = RE + NR =$

$= 4 + \sqrt{3}$, $KE = RE - RK = 4 - \sqrt{3}$.

$R_1 = NE/\sqrt{3} = 4/\sqrt{3} + 1$, $R_2 = $

$= KE/\sqrt{3} = 4/\sqrt{3} - 1$.

Ответ. $4/\sqrt{3} \pm 1$.

Задача 7 (МГУ-2012). Окружность с центром, лежащим на стороне BC треугольника ABC, касается сторон AB и AC в точках D и E соответственно и пересекает сторону BC в точках F и G (точка F лежит между точками B и G), см. рис. 9. Найдите CG, если известно, что $BF = 1$, а $DA{:}BD = EC{:}AE = 2$.

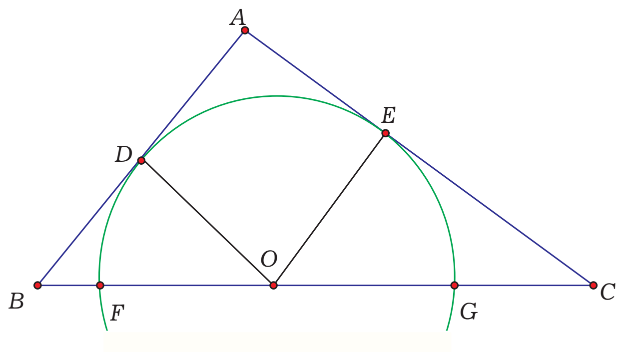

Рис. 9

Решение. Введём обозначения: $FO = OG = R$, $CG = x$, $BD = a$. Тогда $DA = AE = 2a$, $EC = 4a$. Так как $BD^2 = BG \cdot BF$ и $EC^2 = FC \cdot CG$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a^2 = 1 + 2R, \\ 16a^2 = x(x + 2R). \end{cases}$$

Но этого недостаточно. Необходимо ещё одно уравнение! Всё ли мы использовали из условий задачи? Во-первых, можно заметить, что $AC = 2AB$, во-вторых, введя обозначение R, мы никак не использовали то, что это радиус! Центр окружности лежит на стороне BC, соединим его отрезком с вершиной A (рис. 10).

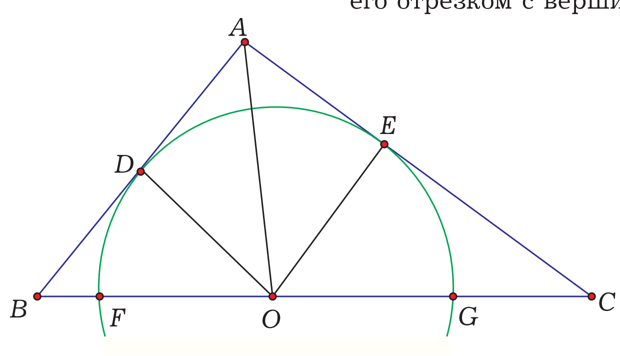

Рис. 10

Окружность с центром O вписана в угол BAC, поэтому отрезок AO – биссектриса треугольника BAC. А по свойству биссектрисы $OC/OB = AC/AB$. Отсюда получаем недостающее соотношение: $2(1+R) = x+R$, или $R = x-2$. Исключив неизвестные R и a, получаем квадратное уравнение $x^2 - 12x + 16 = 0$. Его корни $x_{1,2} = 6 \pm 2\sqrt{5}$, но так как $R = x-2 > 0$, подходит только больший корень.

Ответ. $CG = 6 + 2\sqrt{5}$.

Задача 8 (МГУ-2009). Окружность радиуса 2 с центром на основании равнобедренного треугольника касается его боковых сторон. Одну из точек касания соединили отрезком с противолежащей вершиной основания. Этот отрезок делится высотой треугольника, проведённой к основанию, в отношении 4:3, считая от вершины. Найдите площадь треугольника.

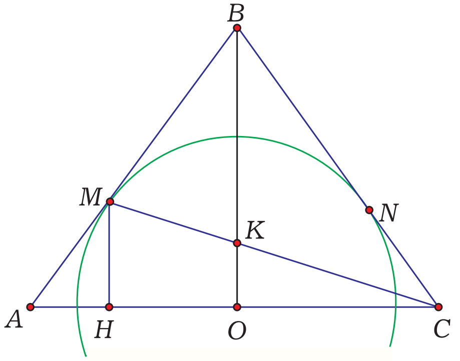

Рис. 11

Решение. Как и в предыдущей задаче, центр окружности лежит на стороне треугольника, но касательные и секущие здесь не потребуются. Пусть AC – основание равнобедренного треугольника ABC (рис. 11). Так как окружность с центром O вписана в угол ABC (M и N – её точки касания со сторонами AB и BC соответственно), отрезок BO является биссектрисой этого угла. В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведённая к основанию, является также медианой и высотой: $AO = OC$, $BO \perp AC$.

По условию задачи $KC{:}MK = 4{:}3$. Опустим из точки M перпендикуляр на основание AC: $MH \perp AC$, следовательно, отрезок MH параллелен BO. Получается, что $KC : MK = OC : HO = AO : HO = 4{:}3$. Тогда $AO : AH = AB : AM = 4{:}1$. Обозначим $AM = x$, $AB = 4x$ и $MB = 3x$. Соединим отрезками точки касания с центром окружности (рис. 12).

Радиус $OM = 2$ является высотой, опущенной на гипотенузу прямоугольного треугольника AOB. Поэтому $AM{\cdot}MB = OM^2$, или $3x^2 = 4$, $x = 2\sqrt{3}/3$, $AB = 8\sqrt{3}/3$.

$S_{AOB} = AB{\cdot}OM/2 = 8\sqrt{3}/3$. Тогда $S_{ABC} = 2S_{AOB} = 16\sqrt{3}/3$. Площадь найдена.

Ответ. $16\sqrt{3}/3$.

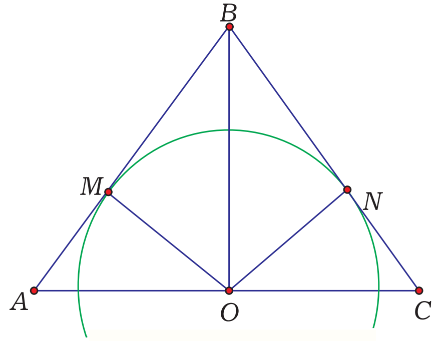

Рис. 12

Задача 9 (ЕГЭ-2012). В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 4$, $BC = 6$, $AC = 5$. Окружность, проходящая через точки A и C, пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L, отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC (рис. 13). Найдите длину отрезка KL.

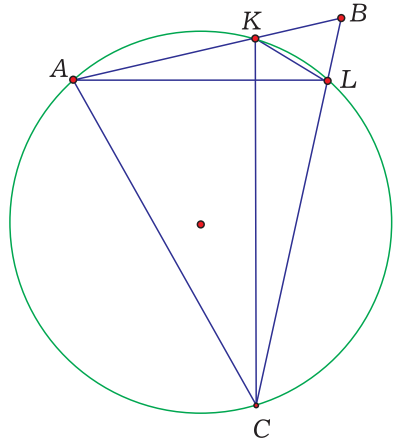

Рис. 13

Решение. Нам дано, что точки A, C, K и L лежат на одной окружности, но каково их взаимное расположение на двух секущих, проведённых к этой окружности из точки B?

Но сначала отметим одну очень важную особенность изображённой на рис. 13 «стандартной» ситуации. Из того, что $BA{\cdot}BK = BC{\cdot}BL$, а угол B – общий», следует подобие треугольников ABC и KBL, а также – подобие треугольников ABL и CBK. Для установления первого подобия вместо свойства секущих можно использовать равенство углов BAC и KLB (следует из того, что четырёхугольник $AKLC$ – вписанный), а для второго подобия – равенство вписанных углов KAL и KCL, опирающихся на дугу KL (убедитесь в этом самостоятельно).

Теперь уточним взаимное расположение точек. Так как отрезок KL должен касаться вписанной в треугольник ABC окружности, обе точки K и L не могут находиться вне этого треугольника. Ситуация, когда точка L расположена на стороне BC, а точка K – на продолжении стороны AB, показана на рис. 14.

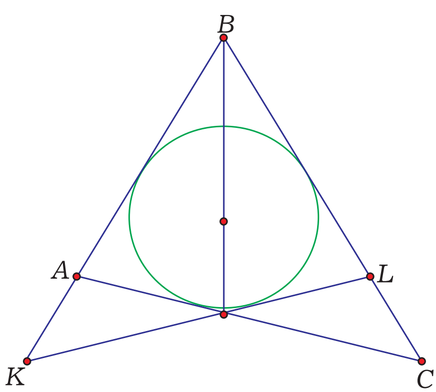

Рис. 14

Заметим, что в этом случае треугольники KBL и CBA не просто подобны, а равны, так как вписанная окружность треугольника ABC является оной и для треугольника KBL! Здесь даже вычисления не потребуются: $KL = AC = 5$.

Если же точка K расположена на стороне AB, а точка L – на продолжении стороны BC, то должны выполняться соотношения $AB > KB = BC$. Но это невозможно, так как по условию $AB < BC$. Нам осталось найти длину отрезка KL в ситуации, когда обе эти точки расположены внутри треугольника (рис. 13).

Пусть вписанная окружность касается сторон треугольника AB, BC и AC в точках P, R и S соответственно (рис. 15). Зная стороны треугольника, надо уметь находить длины отрезков, на которые они поделены точками касания. Например, можно действовать так. Обозначив $AP = AS = a$, $BP = BR = b$, $CR = CS = c$, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} a + b = 4, \\ b + c = 6, \\ c + a = 5. \end{cases}$$

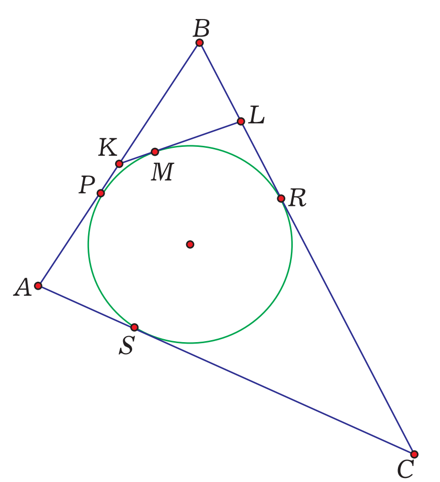

Рис. 15

Сложив все три уравнения, получим $2(a + b + c) = 15$, или $(a + b + c) = 7{,}5$.

Далее находим длины отрезков: $c = 7{,}5 - 4 = 3{,}5$; $a = 7{,}5 - 6 = 1{,}5$; $b = 7{,}5 - 5 = 2{,}5$.

Теперь можно найти периметр треугольника KBL, который не зависит от того, как мы проведём касательную KL (M – точка касания), а определяется величиной угла и радиусом вписанной в этот угол окружности. Действительно, так как $KM = KP$, а $LM = LR$, сумма $BK+KM+ML+BL = BP+BR = 2b = 5$.

Так как треугольники LBK и ABC подобны, отношение сторон KL/AC равно отношению периметров этих треугольников, т. е. $KL/AC = 5/15 = 1/3$. Отсюда получаем $KL = 5/3$.

Ответ. 5/3; 5.

Вот ещё несколько задач для самостоятельного решения.

Задача 10 (олимпиада «Ломоносов», 2007). На стороне AB треугольника ABC взята такая точка D, что окружность, проходящая через точки A, C и D, касается прямой BC. Найти AD, если $AC = 9$, $BC = 12$ и $CD = 6$.

Ответ. 10.

Задача 11 (ЕГЭ-2011). В треугольнике ACB угол C – прямой, CH – высота, BD – медиана. Прямые CB и DH пересекаются в точке E, лежащей на луче BC. Окружность, проходящая через точки D и H, касается прямой BC в точке M. Найдите MC, если известно, что $AC = 14$ и $EH = 16$.

Ответ. $12 \pm 4\sqrt{2}$.

Задача 12 (ЕГЭ-2011). Прямая, перпендикулярная боковой стороне равнобедренного треугольника, отсекает от него четырёхугольник, в которой можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок прямой, заключённый внутри треугольника, равен 6, а отношение боковой стороны треугольника к его основанию равно 5/6.

Ответ. 9/2 или 21/4.

Задача 13 (ЕГЭ-2011). Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключённый внутри треугольника, равен 12, а косинус острого угла равен 3/5.

Ответ. 8 или 9.

Задача 14 (ЕГЭ-2012). В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 7$, $BC = 8$, $AC = 9$. Окружность, проходящая через точки A и C, пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L, отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите длину отрезка KL.

Ответ. 9/4; 9.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Причина аварии

– Почему же спутники системы ГЛОНАС упали на Землю?

– Из-за финансовой ошибки.

– Может быть математической?

– Нет, финансовой: математику недоплатили – вот он и уволился, а спутник свалился.

Конец вере

– Неужели ты веришь тому, что говорят гадалки, яновидящие?

– Верил.

– А почему перестал?

– Да пошёл я к одной ясновидящей, постучался к ней, а она спрашивает «Кто там?». Что же она видит ясно?