Гашков Сергей Борисович
*Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры дискретной математики
механико-математического факультета
МГУ им. М. В. Ломоносова.
Много лет преподавал математику также в ФМШ N18
при МГУ (ныне СУНЦ МГУ).*

Центры тяжести и планиметрия

Методы вычисления центров тяжести, или, что то же самое, центров масс (далее для разнообразия используются оба термина), составляют один из важнейших разделов статики и являются самым древним разделом механики (да и физики вообще). Их основы были заложены знаменитым Архимедом. Его подход к этим задачам был в значительной мере геометрическим, и с тех пор методы нахождения центров масс простых плоских фигур составляют своеобразный раздел геометрии[1]. Как и саму геометрию, их можно излагать аксиоматически.

1. Центр масс конечной системы материальных точек

Например, в качестве аксиом можно взять следующие, кажущиеся достаточно очевидными, утверждения.

Акс. 0. У любой конечной системы точек центр масс существует и определён однозначно.

Акс. 1. Центр масс точки совпадает с ней.

Акс. 2. Центр масс двух точек с массами m_i, $i = 1, 2$, делит отрезок, их соединяющий, в отношении $m_1 : m_2$ и расположен ближе к большей массе (если они равны, то он находится посередине).

Акс. 3. Если множество точек M разбито на два непересекающихся подмножества M_i с суммарными массами m_i и центрами масс A_i, $i = 1, 2$, то центр масс множества M совпадает с центром масс системы из двух точек A_i с массами m_i.

Этих аксиом достаточно, чтобы вычислить центр масс любого конечного множества точек A_i с массами m_i, $i = 1, \ldots, n$. Для этого можно с помощью аксиомы 3 заменить точки A_1, A_2 на одну точку A_{12} с массой $m_1 + m_2$, определив положение точки A_{12} с помощью аксиомы 2. Если $n > 2$, то к полученному $(n - 1)$-точечному множеству $\{A_{12}, A_3, \ldots, A_n\}$ применяем тот же приём и так продолжаем, пока не получим одну точку $A_{12\ldots n}$ с массой $m_1 + \ldots + m_n$, которая,

[1] Далее мы в значительной степени следуем прекрасному учебнику теоретической механики профессора Московского университета Н. Е. Жуковского [1], написанному в истинно геометрическом стиле. Многие (но не все) излагаемые далее факты взяты из этой книги (но доказательства часто даются другие).

согласно аксиоме 1, является центром масс системы точек A_i, $i = 1,\ldots,n$.

Указанный приём можно, конечно, применять к данному множеству точек различными способами, например, на первом шаге можно вместо точек A_1, A_2 взять любую пару различных точек A_i, A_j, но, согласно аксиоме 1, результат от порядка выбора точек не зависит.

Независимость результата от выбранного порядка выполнения указанных операций выглядит не столь уж и очевидной. Например, при нахождении тремя возможными способами центра тяжести системы из трёх точек равных масс «бесплатно» получается известная всем школьникам теорема о пересечении медиан в треугольнике. Действительно, центр масс лежит на каждой из медиан, значит и на их пересечении, поэтому они пересекаются, а пересекаться они могут только в одной точке.

Используя понятие центра масс, можно легко доказать многие геометрические теоремы. Например, поместив в вершины треугольника массы, равные 2, и заменяя каждую из них на две единичные массы, сосредоточенные в той же вершине, заметим, что центр масс полученной системы из шести точек по-прежнему находится в точке пересечения медиан. Заменяя каждую пару точек, лежащих в разных вершинах, на точку с массой 2, лежащую в середине стороны, соединяющей эти вершины, получим три точки, лежащие в вершинах срединного треугольника, образованного средними линиями исходного треугольника. Согласно аксиоме 2, точка пересечения медиан срединного треугольника совпадает с точкой пересечения медиан исходного треугольника (можно, конечно, ещё доказать, что эти два треугольника гомотетичны с коэффициентом 2 относительно их общей точки пересечения медиан).

2. Центры тяжести и векторная алгебра

Если выбрать на плоскости произвольную точку O и провести из неё радиус-векторы v_i в точки A_i, то радиус-вектор $v = \overrightarrow{OA}$, где A – найденный выше центр масс системы точек A_i с массами m_i, вычисляется следующим образом:

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n,\ \ \alpha_i = \frac{m_i}{m},$$

$$m = m_1 + \ldots + m_n.$$

Из этой формулы видно, что в случае равных масс их центр тяжести не зависит от величины массы. Далее его для краткости будем называть *центроидом*[1].

Приведённую выше формулу легко доказать, если воспользоваться свойствами векторов. Сначала докажем её для $n = 2$ (т. е. выведем аксиому 2 из известных свойств векторов).

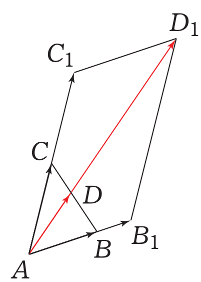

Рис. 1. Вычисление центра тяжести двух точечных масс и сложение векторов

На рис. 1 изображены векторы $v_1 = \overrightarrow{AB}$, $v_2 = \overrightarrow{AC}$, $m_1 v_1 = \overrightarrow{AB_1}$, $m_2 v_2 = \overrightarrow{AC_1}$, где $m_1 = |AB_1| / |AB|$,

[1] Например, центроидом треугольника является точка пересечения его медиан.

$m_2 = |AC_1| / |AC|$ согласно определению умножения вектора на число, и $m_1v_1 + m_2v_2 = \overline{AD}_1$, где $AB_1D_1C_1$ – параллелограмм согласно правилу сложения векторов. Согласно Акс. 2, центр тяжести двух масс m_1 и m_2, расположенных в точках B и C соответственно, находится в точке D отрезка BC такой, что $CD : DB = m_1 : m_2$, откуда имеем $CD : CB = m_1 : (m_1 + m_2)$, значит, вектор $\overrightarrow{CD}$ равен

$$\frac{m_1}{m_1+m_2}\overrightarrow{BC} = \frac{m_1}{m_1+m_2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}),$$

поэтому вектор

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} =$$

$$= \overrightarrow{AC} + \frac{m_1}{m_1+m_2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) =$$

$$= \frac{m_1}{m_1+m_2}\overrightarrow{AB} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{AC} =$$

$$= \frac{m_1}{m_1+m_2}v_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}v_2,$$

что и доказывает формулу при $n = 2$.

Для доказательства формулы

$$v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n,\ \alpha_i = \frac{m_i}{m},$$

$$m = m_1 + ... + m_n,$$

в общем случае применим индукцию. Базис ($n = 2$) уже доказан. Его можно применить и для выполнения шага индукции. Покажем, что независимо от порядка выполнения указанных выше операций получится данная выше формула для центра масс. Без ограничения общности можно считать, что точки A_1 и A_2 заменяются вначале точкой A_{12} массы $M_1 = m_1 + m_2$, расположенной в их центре тяжести. Согласно базису индукции, этот центр тяжести находится в конце радиус-вектора

$$V_1 = \frac{m_1}{M_1}v_1 + \frac{m_2}{M_1}v_2.$$

Для нахождения центра масс системы точек $\{A_1, \ldots, A_n\}$ согласно Акс. 2 нужно найти центр масс системы точек $\{A_{12}, A_3, \ldots, A_n\}$. Согласно предположению индукции, он находится в конце радиус-вектора

$$\frac{1}{m}(V_1M_1 + v_3m_3 + ... + v_nm_n).$$

Но

$$\frac{1}{m}V_1M_1 = \frac{1}{m}(m_1v_1 + m_2v_2),$$

значит

$$\frac{1}{m}(V_1M_1 + v_3m_3 + ... + v_nm_n) =$$

$$= \frac{1}{m}(m_1v_1 + ... + m_nv_n).$$

С помощью доказанной формулы центр масс любой конечной системы точек можно вычислить чисто алгебраически. Более того, указанную формулу можно взять в качестве определения центра масс, тогда указанные выше аксиомы превратятся в теоремы элементарной геометрии. Точнее, если выбрать на плоскости произвольную точку O и провести из неё радиус-векторы v_i в точки A_i, то центр масс данной системы точек с массами m_i определяется радиус-вектором $v = \overrightarrow{OA}$, где

$$v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n,\ \alpha_i = \frac{m_i}{m},$$

$$m = m_1 + ... + m_n,$$

точка A при этом не зависит от выбора точки O (начала координат). Другое определение центра масс данной системы точек таково: это такая точка A, для которой радиус-векторы v_i, направленные из A в A_i, удовлетворяют равенству

$$m_1v_1 + ... + m_nv_n = 0.$$

Но и здесь надо доказывать существование и единственность такой точки.

Доказательства утверждений Акс. 0 – Акс. 3 удобно проводить, пользуясь не обычной евклидовой аксиоматикой геометрии, а векторной аксиоматикой, в которой все понятия геометрии формулируются на языке векторов и операций над ними.

Задача 1. Докажите равносильность обоих определений.

Указание. Использовать векторную алгебру.

Применяя второе из приведённых выше определений центра масс, легко доказать Акс. 2 проще, чем сделано выше.

Но верно и обратное: из указанных аксиом для понятия центра масс можно вывести все теоремы геометрии, в которых не используются метрические понятия – расстояние между точками и величина угла между прямыми.

Например, сочетательный закон сложения трёх векторов можно вывести из теоремы о точке пересечения медиан в треугольнике, которая вытекает из теоремы о центре тяжести трёх точек с равными массами. На языке центров тяжести можно определить понятие отрезка между двумя точками: это просто множество всех позиций, которые может занимать центр тяжести системы из этих двух точек при всех возможных значениях масс этих точек. Если n точек лежат на одной прямой, то множество всех позиций, которые может занимать центр тяжести системы из этих точек при всех возможных значениях масс, также образует отрезок (верно, конечно, и обратное утверждение). Если массы этих точек равны, а сами точки распределены на этом отрезке равномерно, т. е. расстояния между соседними точками равны, то центр тяжести лежит точно в середине этого отрезка. Если не все n точек лежат на одной прямой, то множество всевозможных положений центра масс этой системы точек образует выпуклый m-угольник, который совпадает с выпуклой оболочкой данной системы точек. В частности, если данные n точек лежат в вершинах выпуклого n-угольника, то его выпуклая оболочка с ним совпадает. При $n = 3$ получается определение треугольника на языке центров масс.

Барицентрические координаты. Произвольную точку внутри треугольника можно рассматривать как центр подходящим образом подобранных масс m_i, $i = 1, 2, 3$, помещённых в его вершины. Набор чисел $(m_1: m_2: m_3)$, очевидно, однозначно определяет соответствующий центр масс (согласно доказанной выше формуле, на векторном языке он задается радиус-вектором

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3,$$

где $\alpha_i = m_i/m$, $m = m_1 + m_2 + m_3$, v_i – радиус-векторы вершин треугольника). Этот набор называется *барицентрическими координатами* точки. Они, очевидно, определены не однозначно, а с точностью до умножения на произвольную константу[1]. Это свойство барицентрических координат называется *однородностью*[2] и во многих случаях оказывается очень удобным. Для того чтобы определить координаты точек на границе треугольника, удобно ввести понятие нулевой массы. Тогда, например, координатами вершин треугольника будут (1: 0: 0), (0: 1: 0), (0: 0: 1), а координаты точки, делящей сторону, соединяющую 1-ю вершину со 2-й в отношении $a : b$ (считая от 1-й вершины), будут $(b: a: 0)$.

Задача 2. Докажите, что барицентрические координаты точки пересечения медиан имеют вид (1: 1: 1).

Барицентрические координаты можно сделать однозначно определенными, если наложить на них дополнительное условие $m_1 + m_2 + m_3 = 1$. Такие координаты иногда называют *ареальными*.[3] Причина названия про-

[1] При умножении масс на одно и то же число положение центра масс не меняется.

[2] Именно из-за него в определении барицентрических координат вместо запятых стоят двоеточия.

[3] От слова *area* – площадь.

ста: если треугольник имеет площадь, равную единице, и точка внутри него имеет ареальные координаты (α_1: α_2: α_3), то площади трёх треугольников, на которые он разбивается этой точкой, в точности равны α_1, α_2, α_3 (α_i – площадь треугольника, противоположного вершине с массой m_i, а сумма всех α_i равна единице).

Задача 3. Докажите это свойство ареальных координат.

Барицентрические (и ареальные) координаты можно также приписать (если хочется) любой точке плоскости вне треугольника, если для их определения использовать отрицательные массы[1].

О барицентрических координатах (открытых немецким математиком А.Ф. Мёбиусом) можно написать целую книгу (сам Мёбиус и написал). Им посвящена значительная часть книги [2]. В ней описаны, в частности, применения этих координат в химии и металлургии (для описания смесей, сплавов и растворов), колориметрии (для задания произвольного цвета используют так называемые RGB-координаты), популяционной генетике (интерпретация закона Харди-Вейнберга) и, естественно, в математике (подразделения полиэдров в топологии, интерполяция функций многих переменных).

3. Центроид четырёхугольника и параллелограмм Вариньона

Для того чтобы найти центр тяжести четырёх равных масс, можно применить следующий приём. Разбиваем эти массы произвольным образом на две пары, заменяем каждую пару точкой удвоенной массы, расположенной точно посередине между точками этой пары, тогда задача сведётся к нахождению центра масс системы из двух построенных точек. Так как их массы равны, искомый центр находится ровно посередине между построенными серединами. Указанное построение работает всегда, в том числе и когда одна или несколько точек совпадают. В этом случае задачу можно рассматривать как нахождение центра тяжести трёх или двух точек уже с не обязательно равными массами. В этом случае задачу можно также решить указанным выше способом.

Если все четыре точки различны, то их можно рассматривать как вершины четырёхугольника; четыре из шести пар вершин формируют его стороны, а две – диагонали[2]. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырёхугольника, иногда называют *бимедианами*. К двум бимедианам можно добавить отрезок, соединяющий центры диагоналей. Тогда из приведённого выше рассуждения вытекает, что все три указанных отрезка (две бимедианы и отрезок, соединяющий середины диагоналей) пересекаются в одной точке – центре тяжести равных масс, расположенных в вершинах четырёхугольника, и эта точка служит их общим центром. Четырёхугольник, образованный серединами сторон данного четырёхугольника, имеет указанные бимедианы в качестве диагоналей. Отсюда следует, что этот срединный четырёхугольник является параллелограммом (см. рис. 2). Он называется *параллелограммом*

[1] С физической точки зрения отрицательные массы бессмысленны, но здесь они используются чисто формально.

[2] Формально говоря, таких четырёхугольников будет несколько, но мы выберем из них не самопересекающийся. Он определён однозначно, но не обязан быть выпуклым и может вырождаться в треугольник в том смысле, что две соседние стороны могут лежать на одной прямой.

Вариньона в честь французского математика и механика XVII века. Из сказанного выше следует, что середина отрезка, соединяющего центры диагоналей, совпадает с центром параллелограмма Вариньона.

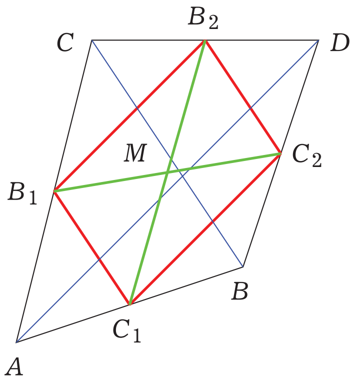

Рис. 2. Параллелограмм Вариньона и центр четырёх равных масс

Задача 4. Докажите, что стороны параллелограмма Вариньона параллельны диагоналям данного четырёхугольника и равны их половинам.

Указание. Применить теорему о средней линии треугольника.

Задача 5. Докажите, что площадь четырёхугольника вдвое больше площади его параллелограмма Вариньона.

Указание. Треугольники, отсекаемые от четырёхугольника его параллелограммом Вариньона, подобны с коэффициентом 2 треугольникам, отсекаемым от него диагоналями. В случае невыпуклого четырёхугольника можно использовать не только сложение, но и вычитание площадей.

Задача 6. Докажите, что центр тяжести вершин четырёхугольника (центр его параллелограмма Вариньона) совпадает с точкой пересечения диагоналей тогда и только тогда, когда данный четырёхугольник – параллелограмм.

Указание. Центр параллелограмма Вариньона совпадает с серединой отрезка, соединяющего центры диагоналей. Если обе диагонали в точке пересечения не делятся пополам, то указанная середина не совпадает с точкой пересечения диагоналей, а если обе делятся пополам, то указанная середина вырождается в их точку пересечения. Четырёхугольник, у которого обе диагонали делятся точкой пересечения пополам, является параллелограммом.

4. Как найти центры тяжести треугольника и многоугольников

Возвращаясь к понятию центра масс, рассмотрим вопрос о нахождении центра масс бесконечной системы точек. Например, как найти центр масс отрезка данной массы m? Если разбить отрезок n точками на равные отрезки и в каждую поместить массу m/n, то центр масс такой системы находится в центре отрезка независимо от n. Естественно предположить, что центр отрезка с равномерно распределённой по нему массой m также находится в его центре. Мы примем этот факт за аксиому. В отличие от аксиом, касающихся конечных систем точек, доказать это утверждение в рамках элементарной геометрии затруднительно хотя бы потому, что не ясно, как точно определить понятие равномерно распределённой массы.

Попытка дать такое определение приводит к парадоксам, связанным с тем, что не ясно, как в этом случае определить массу произвольной точки отрезка: если она всегда больше нуля, то отрезок должен иметь бесконечную массу, а если она всегда равна нулю, то и масса отрезка нулевая. Выход из этих парадоксов даёт теория пределов в рамках дифференциального и интегрального исчисления[1]. Далее мы бу-

[1] В интегральном исчислении даётся определение центра тяжести произвольных фигур и тел с произвольным распределением масс, и это определение имеет вид интеграла.

дем рассматривать только простейшие фигуры и только равномерное распределение масс.

Для того, чтобы найти центр тяжести треугольника, его можно представить состоящим из попарно непересекающихся отрезков, параллельных одной из сторон. Заменяя каждый из этих отрезков на точку в его центре с той же массой (можно считать, например, что масса отрезка равна его длине), сводим задачу к нахождению центра масс системы точек, лежащих на отрезке (используем при этом соответствующее обобщение аксиомы 2). Искомый центр масс лежит на этом отрезке – медиане треугольника. Найти его сразу затруднительно, но это и не нужно – ведь аналогичное рассуждение показывает, что он лежит и на двух других медианах, а значит, совпадает с их точкой пересечения[1].

Аналогично доказывается, что центр масс трапеции с равномерно распределённой массой лежит на отрезке, соединяющем середины параллельных сторон трапеции. Как его найти, укажем чуть ниже.

5. Центр тяжести периметра треугольника

Рассмотрим, следуя книге [1], задачу о нахождении центра масс периметра произвольного треугольника (т. е. объединения трёх его сторон). Этот вопрос представляет интерес, например, потому, что центр тяжести всего треугольника совпадает с центром тяжести только трёх его вершин, в которых сосредоточена вся его масса, причём во всех одинаковая, т. е. с точкой пересечения медиан. А что будет, если масса равномерно распределена по всему периметру? Оказывается, центр масс в этом случае совпадает с другой замечательной точкой треугольника – центром окружности, вписанной в срединный треугольник (см. рис. 3).

Действительно, заменим каждую сторону треугольник её центром, предполагая, что вся масса стороны сосредоточена в её середине. Согласно аксиоме 3, задача сводится к нахождению центра тяжести трёх вершин треугольника, масса каждой из которых равна длине противоположной стороны[2].

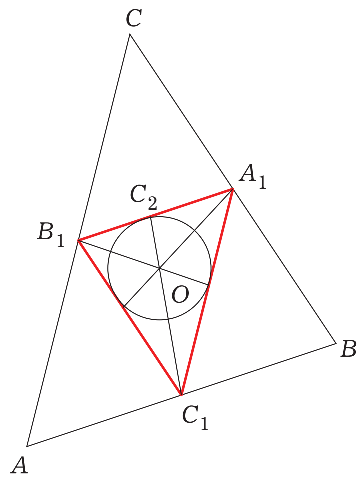

Рис. 3. Центр тяжести периметра треугольника

Для нахождения указанного центра тяжести применим описанный выше метод вычисления центра масс системы из трёх точек. Согласно

[1] Интересно, что такое рассуждение, восходящее к Архимеду, не требует никаких вычислений.

[2] Здесь безразлично, что понимается под длинами противоположных сторон – то ли речь идёт о сторонах $\triangle ABC$, то ли о сторонах $\triangle A_1B_1C_1$, образованного центрами сторон $\triangle ABC$. Так как $\triangle A_1B_1C_1$ является срединным треугольником для $\triangle ABC$, то, согласно известному свойству, длины его сторон в два раза меньше длин соответствующих сторон $\triangle ABC$.

аксиоме 2, центр тяжести системы из точек A_1, B_1 с массами, пропорциональными $|B_1C_1|$ и $|A_1C_1|$ соответственно, расположен в точке C_2, делящей сторону A_1B_1 пропорционально сторонам A_1C_1, B_1C_1. Но тогда отрезок C_1C_2 совпадает с биссектрисой угла C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ в силу известного из школьной геометрии свойства биссектрисы. Согласно аксиомам 2, 3, искомый центр тяжести точек A_1, B_1, C_1 с массами $|B_1C_1|$, $|A_1C_1|$, $|A_1B_1|$ лежит на биссектрисе C_1C_2 треугольника $A_1B_1C_1$. Аналогичное рассуждение показывает, что он лежит и на остальных двух биссектрисах, а значит, совпадает с их точкой пересечения, т. е. с центром вписанного в срединный $\Delta A_1B_1C_1$ круга.

Для нахождения центра масс периметра произвольного многоугольника или вообще произвольной конечной системы отрезков можно, разумеется, аналогичным образом свести задачу к нахождению центра масс конечной системы точек, однако такого красивого ответа, как для треугольника, по-видимому, не получится (за исключением случаев, когда рассмотренная система обладает тем или иным свойством симметрии).

Задача 7. Докажите, что центроид треугольника совпадает с центром масс его периметра тогда и только тогда, когда треугольник правильный.

Указание. Так как для любого треугольника центр масс совпадает с центром масс его срединного треугольника, а центр масс периметра данного треугольника совпадает с центром круга, вписанного в срединный треугольник, а последний подобен данному треугольнику, достаточно доказать, что центр вписанного круга совпадает с центроидом треугольника тогда и только тогда, когда треугольник правильный. Указанное совпадение возможно только в случае, когда биссектрисы являются медианами. Но биссектриса совпадает с медианой только у равнобедренного треугольника.

6. Центр масс четырёхугольника и параллелограмм Виттенбауэра

Указанный выше приём для нахождения центра масс многоугольника можно, конечно, применить и для четырёхугольника, но есть более быстрый способ. После того как мы нашли центры масс двух треугольников, на которые четырёхугольник разбивается диагональю, можно, не вычисляя его с помощью аксиомы 2 (для чего нужно будет вычислить площади треугольников), заметить, что искомый центр тяжести лежит на отрезке, соединяющем центры этих треугольников (см. рис. 4).

Проведя другую диагональ и повторив эти рассуждения для двух треугольников, отсекаемых этой диагональю, получим второй отрезок, на котором тоже лежит искомый центр. Значит, он лежит на пересечении полученных отрезков (см. рис. 5).

Но есть и другой способ найти центр тяжести четырёхугольника. Согласно книге известного немецкого геометра В. Бляшке[1] (эта ссылка дана в [3]), это можно сделать, найдя центр *параллелограмма Виттенбауэра*[2] (см. рис. 6).

Он определяется следующим образом: стороны четырёхугольника разбиваются каждая парой точек на три равных отрезка, через каждую пару соседних точек деления, расположенных на смежных сторонах, проводятся прямые. Они и ограничивают параллелограмм (см. рис. 6).

[1] *Blaschke, W*. Projective Geometry. – Birkhäuser, Basel, 1954.
[2] F. Wittenbauer (1857–1922).

Задача 8. Докажите, что параллелограмм Виттенбауэра действительно параллелограмм.

Указание. Его стороны параллельны соответствующим диагоналям данного четырёхугольника.

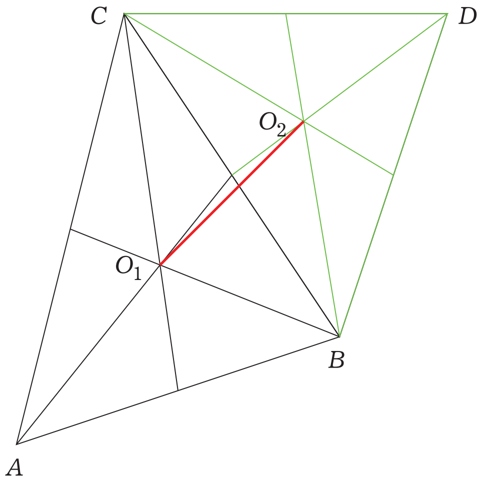

Рис. 4. Разбиение четырёхугольника на два треугольника, а также их центры тяжести

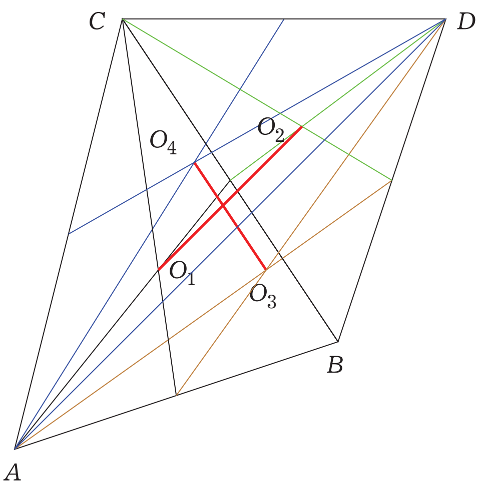

Рис. 5. Построение центра тяжести четырёхугольника

Задача 9. Докажите, что для любого четырёхугольника стороны его параллелограмма Виттенбауэра составляют по длине две трети от параллельных им диагоналей этого четырёхугольника.

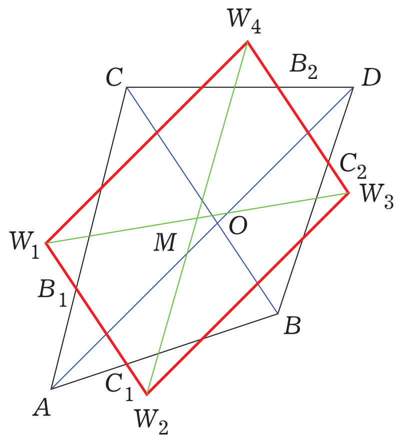

Рис. 6. Параллелограмм Виттенбауэра

Указание. Треугольники, отсекаемые от четырёхугольника его параллелограммом Виттенбауэра, подобны с коэффициентом 3 треугольникам, отсекаемым от него диагоналями.

Задача 10. Докажите, что для любого четырёхугольника его параллелограмм Виттенбауэра подобен параллелограмму Вариньона с коэффициентом подобия 4/3, и найдите отношение его площади к площади этого четырёхугольника.

Задача 11. Докажите, что для любого четырёхугольника центр соответствующего параллелограмма Виттенбауэра совпадает с центром тяжести этого четырёхугольника (точкой пересечения отрезков, соединяющих центры пар треугольников, на которые данный четырёхугольник разбивается диагоналями).

Указание. В таких случаях древние индусы писали: «Смотри!» (рис. 7). Действительно, точка O_1 является центром $\Delta\ ACB$, поэтому она делит пополам отрезок C_1B_1, где C_1C – треть стороны AC, а B_1B – треть стороны AB. Отрезок C_1B_1 параллелен CB и стороне W_1W_2 параллелограмма Виттенбауэра. Значит, $W_1C_1B_1W_2$ – параллелограмм, и поэтому $|C_1O_1| = |W_1W_2|/2$. Аналогично точка O_2 делит пополам отрезок C_2D_2, $|C_2O_2| = |C_1O_1|$, $C_2O_2 \parallel C_1O_1$. Тогда $O_1C_1C_2O_2$ — параллелограмм, значит $O_1O_2 \parallel W_1W_4$, поэтому O_1O_2 лежит на средней линии параллелограмма Виттенбауэра. Аналогично, O_3O_4 лежит на другой его средней линии. Поэтому точка пересечения O_1O_2 и O_3O_4 (центр масс четырёхугольника $ABCD$) совпадает с центром параллелограмма Виттенбауэра.

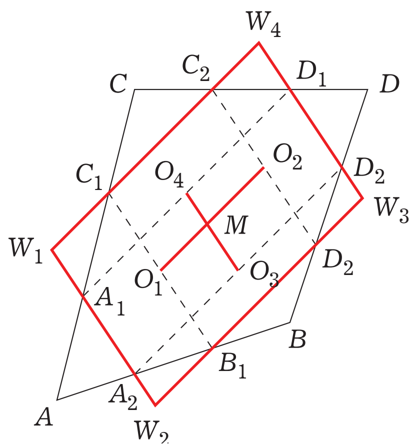

Рис. 7. Центр тяжести параллелограмма Виттенбауэра совпадает с центром тяжести четырёхугольника

Задача 12. ([3]) Докажите, что центр тяжести четырёхугольника совпадает с его центроидом тогда и только тогда, когда этот четырёхугольник – параллелограмм.

Указание. Данное условие выполнено тогда и только тогда, когда центры параллелограммов Вариньона и Виттенбауэра совпадают (и являются их центром подобия). Достаточно доказать, что общий центр M обоих параллелограммов совпадает с точкой O пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$, и применить задачу 6. Допустим, что $M \neq O$ (см. рис. 6). Для получения противоречия достаточно доказать, что тогда OM параллельна всем сторонам параллелограммов. Докажем, например, что $OM \parallel W_1W_4$. Проведём через M прямую, параллельную диагонали CB четырёхугольника $ABCD$ до пересечения со стороной W_1W_4 параллелограмма Виттенбауэра в точке P. Точку пересечения отрезка PM со стороной параллелограмма Вариньона обозначим через Q. Из подобия этих параллелограммов (см. задачу 10) следует, что $PM : QM = 4 : 3$. Рассмотрим точки P_1, Q_1, в которых диагональ CB пересекается с теми же сторонами параллелограммов Виттенбауэра и Вариньона. Так как W_1W_4 отсекает от $\triangle ACO$ подобный ему (по двум углам) с коэффициентом $1/3$ треугольник, то $CP : CO = 1 : 3$, т. е. $OP : CO = 2 : 3$. Аналогично получаем, что $OQ : CO = 1 : 2$ (для обоснования можно также воспользоваться свойствами средней линии треугольника). Отсюда имеем

$$OP : OQ = 4 : 3.$$

Но так как

$$PM : QM = 4{:}3 = PO : QO,\ PM \parallel PO$$

и пересекающие их стороны параллелограммов параллельны, то

$$OM \parallel W_1W_4.$$

Довольно длинное решение задачи 12 с использованием векторной алгебры имеется в статье [4].

Сравнение двух способов построения центра масс четырёхугольника. На первый взгляд кажется, что способ Виттенбауэра построения центра масс проще. В нём проводятся 6 прямых (стороны параллелограмма и его диагонали). В первом же методе надо у каждого треугольника найти центр (для этого проводятся две прямые), а потом точку пересечения двух диагоналей получившегося четырёхугольника – всего 10 прямых. Но надо учитывать сложность построения точек, делящих на три равные части стороны четырёхугольника. Тогда способ Виттенбауера оказывается более сложным.

Начнём с построения центра масс треугольника. Его можно построить, проведя всего 5 линий. Действительно, рассмотрим ΔABC и сложим векторы AC, AB, построив вектор AA_1, сделав 2 засечки окружностями (см. рис. 8).

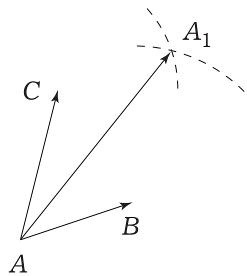

Рис. 8. Построение суммы двух векторов

Аналогично построим точку C_1. Заметим, что из двух нужных для этого окружностей одна (с центром в B) уже была построена, поэтому всего в указанной части построения использовалось 3 окружности. Проведя прямые CC_1, AA_1, получаем в их пересечении центр ΔABC. Если предположить, что прямые AB и CB были проведены, то указанное построение даёт также середины сторон AB, BC и две из трёх медиан ΔABC.

Оценим сложность построения центра масс четырёхугольника $ABCD$ первым способом. Предположим, что стороны четырёхугольника $ABCD$ даны. Построим указанным выше способом центры треугольников ABC, ACD. Для этого проведём 10 линий и построим середины всех сторон четырёхугольника $ABCD$. Чтобы найти центры треугольников ABD, BCD, достаточно в каждом из них провести по две медианы (ещё 4 линии), и в точках их пересечения получаем центры треугольников ABD, BCD. Остаётся в полученном четырёхугольнике, образованном построенными центрами, провести две диагонали. Общая сложность построения – 16 линий. Если стороны четырёхугольника не заданы, то их придётся провести. В этом случае сложность построения возрастает на 4.

Читателю предлагаем попробовать уменьшить сложность, используя параллелограмм Виттенбауэра. Вряд ли ему это удастся.

7. Центр тяжести трапеции

Центр тяжести трапеции можно найти более быстрым способом, чем центр тяжести произвольного четырёхугольника. Укажем, следуя книге [1], два способа это сделать. Первый способ очевиден из рис. 9.

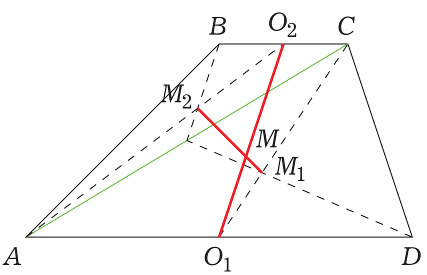

Рис. 9. Построение центра тяжести трапеции

Действительно, согласно сделанному в разделе 4 замечанию, центр масс трапеции лежит на прямой O_1O_2, соединяющей центры оснований. С другой стороны, он, как и у любого четырёхугольника, лежит на отрезке M_1M_2, соединяющем центры масс ΔABC, ΔACD.

Оценим сложность этого построения. Вначале для двух треугольников, на которые трапеция делится одной диагональю, строятся их центры со сложностью 10. При этом попутно строятся середины оснований (в предположении, что эти основания уже даны). Остаётся провести ещё 2 прямые и найти точку их пересечения (см. рис. 9). Боковые стороны (и диагонали) при этом не предполагаются данными. Если не даны основания, то сложность увеличивается на 2.

Второй способ показан на рис. 10. Здесь $A_1A = BC$, $C_1C = AD$.

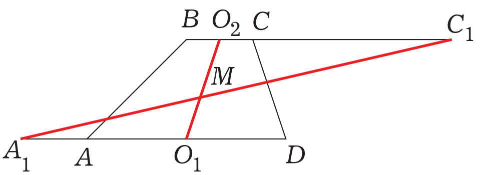

Рис. 10. Второй способ построения центра тяжести трапеции

Его обоснование не так очевидно и показано на рис. 11. Обозначим длины оснований трапеции через a, b, а длину отрезка O_1O_2, соединяющего их центры, через l. Точка M_2 – центр ΔABC – делит AO_2 в отношении 2 : 1. Аналогично расположена точка M_1. На рис. 11 проведены прямые M_jN_j, $j = 1, 2$, параллельно основаниям трапеции до пересечения с прямой O_1O_2. Через M обозначена точка пересечения M_1M_2 с O_1O_2 (центр масс трапеции). Пары ΔAO_2O_1, $\Delta M_2O_2N_2$ и ΔCO_2O_1, $\Delta M_1N_1O_1$ подобны (по двум углам) с коэффициентом 3, откуда следует, что $M_2N_2 : M_1N_1 = a : b$ и точки N_1, N_2 делят O_1O_2 на три равные части. Тогда ΔM_1MN_1 и ΔM_2MN_2 тоже подобны по двум углам с коэффициентом a/b, значит, $N_2M : N_1M = a : b$. Так как $N_2N_1 = l/3$, то имеем

$$N_2M = la/(3(a + b)),$$
$$N_1M = lb/(3(a + b)).$$

Отсюда

$$MO_2 : MO_1 = (2a + b) : (2b + a),$$

так как

$$MO_2 = l/3 + la/(3(a + b)) = = l(2a + b)/(3(a + b)),$$
$$MO_1 = l(2b + a) / (3(a + b)).$$

Из равенств $A_1A = BC$, $C_1C = AD$ следует пропорция

$$MO_2 : MO_1 = (2a + b) : (2b + a) = = O_2C_2 : A_1O_1,$$

а так как $\angle A_1O_1M = \angle C_1O_2M$ как накрест лежащие при параллельных прямых, то ΔA_1O_1M и ΔC_1O_2M подобны, следовательно,

$$\angle A_1MO_1 = \angle C_1MO_2,$$

значит, прямая A_1C_1 проходит через точку M, что и требовалось доказать.

Оценим сложность этого построения. Вначале строятся точки A_1, C_1, для чего проводятся по 2 линии для каждой точки (если основания заданы, всё равно их нужно удлинять, проводя через них прямые). Потом строятся середины оснований. Остаётся провести две прямые. Как построить середины оснований? Если основания заданы, то каждую из середин можно построить с помощью двух окружностей и прямой, проходящей через их общую хорду (см. рис. 12).

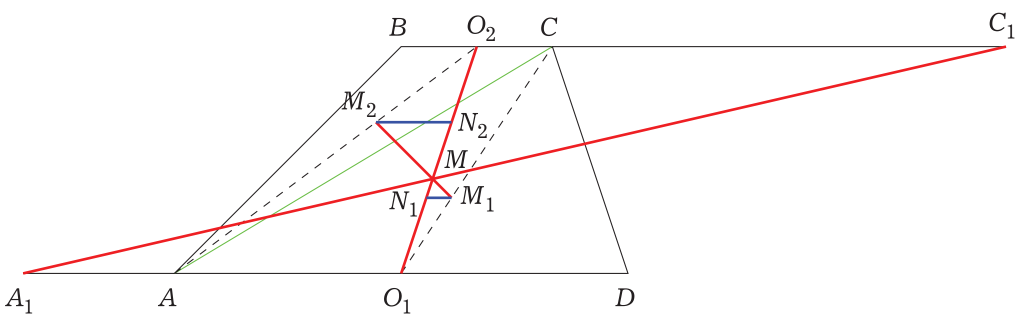

Рис. 11. Доказательство правильности второго способа

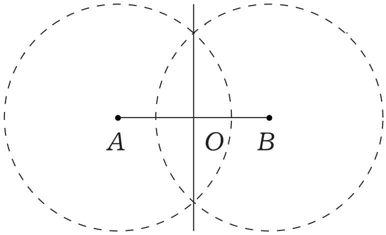

Рис. 12. Деление отрезка пополам

Общая сложность, как и в первом построении, равна 12 (но уже без предположения, что основания даны). Но можно построить середины оснований и другим способом. Проведём диагонали и найдём точку P их пересечения, продолжим боковые стороны до их пересечения в точке Q и проведём через P, Q прямую. Она делит основания пополам [1].

Задача 13. Докажите это.

Указание. Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей, делится этой точкой и боковыми сторонами на два равных отрезка. Примените признаки подобия треугольников.

Сложность указанного построения равна 11.

Список литературы

1. *Жуковский Н.Е.* Теоретическая механика. – М.: URSS, 2011.

2. *Балк М.Б., Болтянский В.Г.* Геометрия масс (серия «Библиотечка Кванта», вып. 61). – М.: Наука, 1981.

3. *Коксетер Г.С.М.* Введение в геометрию. – М.: Мир, 1966.

4. *Дворянинов С.В., Краутер З.* Чем центр тяжести треугольника отличается от центра тяжести четырёхугольника. // Математическое образование, 1(61), 2012, с.10 – 19.

5. *Гашков С.Б., Чубариков В.Н.* Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений. – М.: Дрофа, 2005.

[1] Использованный способ деления пополам двух параллельных отрезков одной линейкой принадлежит знаменитому швейцарскому геометру Якобу Штайнеру.

Мудрые мысли Мудрые мысли Мудрые мысли

Две силы наиболее успешно содействуют воспитанию культурного человека: искусство и наука. Обе эти силы соединены в книге.

М. Горький

Надо постоянно поддерживать серьёзным чтением живую связь между своей собственной мыслью и теми великими умами, которые из года в год своими постоянными трудами расширяют по разным направлениям всемирную область человеческого знания.

Д.И. Пирогов