Гашков Сергей Борисович
*Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры дискретной математики
механико-математического факультета
МГУ им. М. В. Ломоносова.
Много лет преподавал математику также в ФМШ N18
при МГУ (ныне СУНЦ МГУ).*

Центры тяжести многоугольников

Статья является продолжением статьи «Центры тяжести и планиметрия», опубликованной в прошлом номере журнала.

1. Как находить центры масс произвольных фигур

После того как найден центр тяжести треугольника, можно найти центр тяжести и произвольного (не обязательно выпуклого) многоугольника. Для этого достаточно произвольным образом разрезать его на треугольники. Проще всего это сделать, проводя диагонали в многоугольнике, не допуская их самопересечений в точках, отличных от его вершин, до тех пор, пока это возможно. В результате получится разбиение n-угольника на $n - 2$ треугольника.

Возьмём любую триангуляцию многоугольника, заменим каждый треугольник точкой, расположенной в точке пересечения его медиан, с массой, равной его площади, и потом найдём центр тяжести построенных масс указанным выше способом (с помощью векторной формулы). Согласно принятым выше аксиомам, полученная точка и будет центром масс данного многоугольника. Применяя различные триангуляции, мы всегда получим один и тот же результат.

Для того чтобы найти центр масс произвольной, но достаточно «хорошей» плоской фигуры с равномерно распределённой массой, достаточно вписать в эту фигуру n-угольник, найти его центр масс и выполнить переход к пределу при n, стремящемся к бесконечности. Под хорошей фигурой здесь понимается любая фигура, для которой упомянутый предельный переход можно строго обосновать. Мы не будем углубляться в эти вопросы, скажем только, что хорошими фигурами заведомо являются все фигуры, изучаемые в элементарной геометрии, т. е. фигуры, ограниченные отрезками прямых и/или дугами окружностей, а придумать «нехорошую» фигуру – на самом деле трудная задача.

Указанный метод вычисления центров масс придумал Архимед. Он умел применять его даже для не совсем элементарных фигур, например для сегментов параболы. Читатель, знакомый с теорией пределов, может самостоятельно попробовать повторить результаты Архимеда, например, найти центр тяжести сектора круга с данным углом или соответствующего сегмента.

Для упрощения нахождения центров масс произвольных фигур полезно использовать два свойства, которые можно принять за аксиомы.

Акс. 4. Если система материальных точек имеет ось симметрии (т. е. прямую, при зеркальном отражении от которой система точек переходит в саму себя), то её центр масс лежит на этой оси.

Акс. 5. Если система материальных точек имеет центр вращения (т. е. точку, при повороте вокруг которой на угол, меньший 360 градусов, система переходит в себя), то её центр масс совпадает с центром вращения. В частности, если система точек имеет центр симметрии, то центр масс с ним совпадает.

Эти свойства в случае конечной системы точек легко вытекают из аксиомы Акс. 0 и доказанной выше векторной формулы для центра масс. Действительно, при зеркальном отражении или повороте система переходит в себя и поэтому её центр масс остаётся на месте. Если же предположить, что утверждения Акс. 4, 5 не верны и воспользоваться упомянутой формулой (и теоремами элементарной геометрии), то центр масс при указанном движении перемещается в другую точку, что невозможно. Однако для бесконечных систем точек всё не так просто хотя бы потому, что такая система может вообще не иметь центра масс (как, например, прямая, потому что она бесконечна в обе стороны, или луч, потому, что он бесконечен в одну сторону), поэтому указанные свойства мы принимаем за аксиомы и в их формулировку добавляем предположение о существовании у рассматриваемой системы точек центра масс.

Из указанных аксиом вытекает, например, что круг с равномерно распределённой массой имеет центр масс, совпадающий с центром круга, и то же самое верно для окружности с равномерной распределённой массой.

Аналогичные утверждения верны и для правильного многоугольника с равномерно распределённой массой и для правильного многоугольника с массой, равномерно распределённой по его периметру.

2. Быстрое построение центра масс конечной системы точек

Согласно указанному выше векторному способу вычисления центра масс по формуле

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n,\ \alpha_i = \frac{m_i}{m},$$

$$m = m_1 + \ldots + m_n,$$

построение центра масс циркулем и линейкой (если величины масс заданы в виде длин данных n отрезков) можно выполнить следующим образом. Выберем в качестве точки приложения радиус-векторов точку, совпадающую с положением одной из заданных масс. Тогда можно считать, что вектор $v_n = 0$, и не учитывать его в вычислениях. С формальной точки зрения это означает замену n на $n - 1$. Вначале построим все радиус-векторы $m_i v_i$. Каждое из этих построений (см. рис. 1) требует проведения 4 линий[1], одна из которых является продолжением вектора v_i, если заранее проведена подходящая прямая через начало координат O и от точки O на ней отложены отрезки с длинами 1, m_i, $i = 1, \ldots, n - 1$. Очевидно, для проведения этих построений требуется провести

$$4(n - 1) + n + 1 = 5n - 3$$

линий.

[1] Здесь и далее под линиями понимаются прямые и окружности.

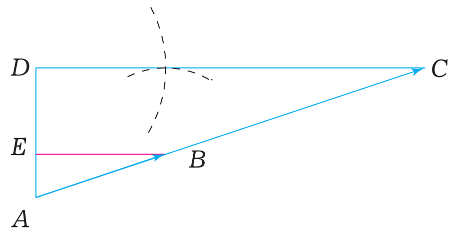

Рис. 1. Умножение вектора на число. Здесь $\overrightarrow{AB} = v$, $|AE| = 1$, $|AD| = \alpha$, $BE \parallel CD$. *Тогда* $\overrightarrow{AC} = \alpha v$

Потом нужно выполнить сложение $n - 1$ полученных векторов, последовательно прибавляя по вектору, используя построение рис. 2. Для этого требуется ещё $2(n - 2)$ линий. И в конце надо поделить полученный вектор на число $m_1 + ... + m_{n-1}$. Для этого нужно ещё $n - 2$ засечек циркулем для построения на данной прямой с единичным отрезком отрезка длины $m_1 + ... + m_{n-1}$ и 4 линии для выполнения деления (см. рис. 3). Общее число проведённых линий равно $8n - 5$.

Но есть более эффективный способ. Нужно на каждом шаге строить центр масс системы точек $\{m_1, ..., m_i\}$ и отрезок длины $m_1 + ... + m_i$ в предположении, что центр масс системы точек $\{m_1, ..., m_{i-1}\}$ и отрезок длины $m_1 + ... + m_{i-1}$ уже построены. Для этого достаточно через точку m_i провести подходящую прямую, отложить на ней от этой точки отрезки с длинами $m_1 + ... + m_{i-1}$ и m_i друг за другом (для этого требуется 3 линии, причём будет построен отрезок длины $m_1 + ... + m_i$) и разделить отрезок, соединяющий точку m_i с центром масс системы точек $\{m_1, ..., m_{i-1}\}$ в отношении $(m_1 + ... + m_{i-1})$: m_i, используя построение рис. 3. Для этого требуется ещё 4 линии. В итоге на каждом шаге используется 7 линий, а общее их число равно $7(n - 2)$. Этот способ предпочтительнее ещё и тем, что все построенные вспомогательные точки (центры масс) лежат в выпуклой оболочке данной системы точек (значит, не требуется проводить слишком длинных линий).

Найти центр системы n равных масс (т. е. центроид) можно быстрее. Для этого сначала находим сумму всех векторов, используя построение рис. 2.

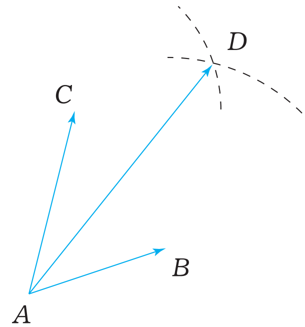

Рис. 2. Построение суммы двух векторов: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

А потом делим полученный вектор на n.

Деление можно выполнить так, как на рис. 3, если выбрать произвольный отрезок за единицу измерения и предварительно построить отрезок длины n. Это можно сделать со сложностью $O(\log n)$ и даже меньшей (см. [2]).

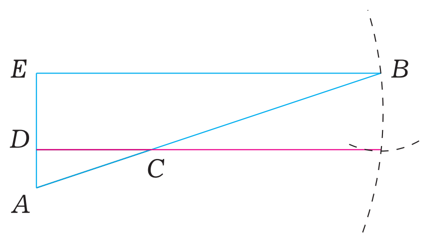

Рис. 3. Деление отрезка в данном отношении a:b. Здесь $|AD| = a$, $|ED| = b$, $CD \parallel BE$. *Тогда* $|AC|:|BC| = a:b$

В случаях $n = 3, 4, 6, 8$ есть ещё более простое построение. Для $n = 3$ в статье из предыдущего номера уже указывалось построение сложности 5.

Для $n = 4$ применяем указанный выше общий способ, но умножение полученного вектора на $1/4$ выполняем следующим образом. Проведём отрезок через его концы, поделим его пополам и подходящую его половину – ещё пополам. Каждое деление пополам способом рис. 4 требует проведения двух окружностей и прямой.

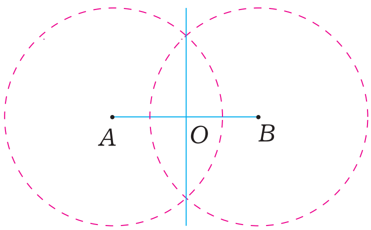

Рис. 4. Деление отрезка пополам

Общая сложность этих двух делений равна 7. Но если выбрать в первом делении окружности так, чтобы они обе проходили через концы отрезка, то при делении пополам полученной его половины можно проводить окружности того же радиуса, при этом окружность с центром в конце отрезка совпадёт с уже проведённой, и сложность уменьшится до 6. Полная сложность указанного построения равна 10.

Если $n = 6$, то у каждой тройки строим центр с помощью 5 линий, и остаётся поделить пополам отрезок, соединяющий построенные две точки со сложностью 4. Полная сложность указанного построения равна 14.

Для $n = 8$ применяем общий способ, но умножение полученного вектора на $1/8$ выполняем следующим образом. Проведём отрезок через его концы, поделим его пополам, подходящую его половину опять пополам и потом – ещё пополам. Умножение на $1/4$ выполнялось, как указано выше, со сложностью 6. Последнее деление пополам требует ещё двух линий (в нём используется построенная ранее окружность). Полная сложность указанного построения равна

$$12 + 8 = 20.$$

3. Быстрое построение центра масс многоугольника

Оценим сложность построения центра масс n-угольника при $n > 4$. Выше был указан один способ его построения. Для этого достаточно разрезать его на $n - 2$ треугольника, у каждого из них построить центр масс (это делается со сложностью $5(n - 2)$), построить отрезки, длины которых равны площадям этих треугольников (отрезок единичной длины можно выбирать произвольно), и далее построить центр масс полученной системы $n - 2$ материальных точек (в предыдущем разделе было показано, что это делается со сложностью

$$7((n - 2) - 2) = 7(n - 4)).$$

Так как общее число сторон у $n - 2$ треугольников равно $3(n - 2)$, причём n сторон n-угольника можно считать заданными, тогда число сторон $n - 2$ треугольников, лежащих внутри n-угольника, вычисляется по формуле

$$(3(n - 2) - n)/2 = n - 3.$$

Эти стороны можно построить, проведя $n - 3$ отрезка. Остаётся оценить сложность построения отрезка, равного площади данного треугольника. Это можно сделать, решив следующие задачи.

Задача 1. Высоту треугольника можно построить со сложностью 4.

Указание. Разделить одну из его сторон пополам со сложностью 3, построить на этой стороне как на диаметре окружность, тогда точка её пересечения с другой стороной является основанием высоты, опущенной на эту сторону согласно тому, что диаметр виден из любой точки окружности под прямым углом.

Задача 2. Удвоенную площадь треугольника (при подходящем выборе единицы измерения длин) можно построить со сложностью 10.

Указание. Она равна произведению основания на высоту. Для выполнения умножения отрезков применить приём рис. 1. Единичный отрезок можно отложить на основании (выбрав его так, чтобы он был короче основания), на боковой стороне отложить высоту, тогда отрезок на боковой стороне, равный произведению основания на высоту, строится со сложностью 6.

Теперь окончательно сложность построения центра масс можно оценить как

$$(n - 3) + 5(n - 2) + 10(n - 2) + \\ + 7(n - 4) = 23n - 61.$$

Рассмотрим другой способ построения. Разобьём n-угольник (для простоты предполагаем, что он выпуклый) на четырёхугольники (и в случае нечётного n ещё один треугольник). Для этого в разбиении на $n - 2$ треугольника объединим пары треугольников с общей стороной в четырёхугольники. В случае чётного n число полученных четырёхугольников равно $n/2 - 1$, а в случае нечётного – $(n - 3)/2$. Построим у каждого из этих четырёхугольников центр масс способом, указанным в предыдущей статье. Сложность этого построения равна

$$(n - 3) + 16(n/2 - 1) = 9n - 19$$

(далее рассматриваем случай чётного n). Построим отрезки, длины которых равны площадям этих четырёхугольников. И, наконец, построим центр масс полученной системы $n/2 - 1$ материальных точек со сложностью $7(n/2 - 3)$. Остаётся оценить сложность построения системы отрезков, пропорциональных площадям построенных четырёхугольников.

Задача 3. Удвоенную площадь четырёхугольника (при подходящем выборе единицы измерения длин) можно построить со сложностью 16.

Указание. Опустим на диагональ четырёхугольника перпендикуляры из концов другой диагонали. Удвоенная площадь четырёхугольника равна произведению этой диагонали на сумму длин указанных перпендикуляров. Построить оба перпендикуляра можно со сложностью 8. На одной из сторон четырёхугольника откладываем отрезок, длина которого равна сумме этих перпендикуляров. Это можно сделать со сложностью 3. На диагонали откладываем отрезок единичной длины со сложностью 1. Тогда произведение диагонали на сумму перпендикуляров строится со сложностью 4 в виде отрезка на стороне четырёхугольника.

Теперь окончательно сложность построения центра масс можно оценить при чётном n как

$$9n - 19 + 16(n/2 - 1) + \\ + 7(n/2 - 3) = 20{,}5n - 56.$$

При n нечётном оценка имеет вид:

$$(n - 3) + 8(n - 3) + 5 + 7(n - 1)/2 + \\ + 8(n - 3) + 10 = 20{,}5n - 39{,}5.$$

Как видно, второй способ несколько более эффективен.

Задача 4. Оцените двумя указанными способами сложность построения отрезка, длина которого равна площади данного n-угольника.

Литература

1. *Жуковский Н.Е.* Теоретическая механика. – М.: URSS, 2011.

2. *Гашков С.Б., Чубариков В.Н.* Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений. – М.: Дрофа, 2005.